

# Síntesis de Absorbedores de Vibración Pasivos Aplicando el Método de Box

Rubén Vázquez-León, César Vázquez-Lorenzana<sup>1</sup>, José Luis Urrutia-Galicia<sup>1</sup>

División Académica de Ingeniería y Arquitectura, Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Villahermosa, Tabasco, México  
Tel. 6-03-49, e-mail: [ruben.vasquez@daia.ujat.mx](mailto:ruben.vasquez@daia.ujat.mx)

<sup>1</sup> Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, 70472, México, D. F., 04510, México  
Tel. : 56-22-34-64, Fax : 56-22-34-74, e-mail: [cesarvl@yahoo.com](mailto:cesarvl@yahoo.com), [jug@pumas.iingen.unam.mx](mailto:jug@pumas.iingen.unam.mx)

## RESUMEN

El procedimiento clásico en la síntesis de absorbedores de vibración pasivos es iterativo y termina cuando se alcanza la condición óptima, definida cualitativamente como la presencia de dos picos iguales de altura mínima en el espectro de respuesta a la frecuencia del sistema completo (entendido como el sistema original más el absorbedor de vibraciones). Pocos intentos se han hecho para expresar cuantitativamente la condición óptima. Este reporte presenta una aplicación del algoritmo de optimización de Box (1965) en la solución del problema de síntesis para absorbedores de vibración aplicados a sistemas amortiguados de un grado libertad. Se utiliza un modelo dinámico semidefinido original y se proponen y evalúa una expresión analítica para la condición óptima. El enfoque permite atacar el problema introduciendo las restricciones funcionales y físicas en casos especiales.

Palabras clave: Absorbedores pasivos de vibración, Sistemas semidefinidos, Vibración de sistemas amortiguados, Método de Box.

## ABSTRACT

The classical procedure to synthesize passive tuned-mass vibration absorbers is an iterative one that finishes when the optimum condition is reached. The optimum condition has been defined in a qualitative way and expressed like two equalized peaks of minimal height in the frequency response spectrum of the entire system (Seen as the original system plus the vibration absorber). We found too few reports dealing with quantitative form trials to express the optimum condition. This paper shows an application of Box optimization method to solve the problem when the device is attached to a single degree of freedom system. An original semi-definite dynamical model is used and a quantitative criteria expression for the optimum condition is proposed and evaluated. This approach enables the introduction of physical and functional constraints to the problem and the solution of special cases.

KEY WORDS: Tuned-mass absorber, Semi-definite system, Damped main-system vibration, Box Method.

## NOMENCLATURA

Símbolo	Significado
$m_0$	Masa del apoyo del sistema principal,
$m_1$	Masa del sistema principal
$m_2$	Masa del absorbedor
$k_1$	Rigidez del acoplamiento entre el semiespacio y la masa principal.
$k_2$	Rigidez del acoplamiento entre la masa principal y la masa del absorbedor
$c_1$	Constante del amortiguador viscoso que produciría el mismo efecto que el amortiguamiento por histéresis del sistema principal sobre el movimiento del mismo.
$c_2$	Constante del amortiguador viscoso del absorbedor
$\alpha$	Parámetro que relaciona la masa del sistema principal y la masa del apoyo o semiespacio.
$\beta$	Parámetro que relaciona la masa del absorbedor y la masa del sistema principal
$\gamma$	Frecuencia de la fuente de excitación normalizada dividiéndola por la frecuencia natural del sistema principal de un grado de libertad
$\delta$	Relación de sintonización: cociente de la frecuencia natural del absorbedor dividida por la frecuencia natural del sistema principal, ambas frecuencias calculadas considerando cada elemento como sistemas aislados de un grado de libertad.
$\zeta_1$	Coefficiente de amortiguamiento del sistema principal considerado como sistema de un grado de libertad.
$\zeta_2$	Coefficiente de amortiguamiento del absorbedor considerado como sistema aislado de un grado de libertad.
$\omega$	Frecuencia de la excitación.
$\omega_1$	Frecuencia natural del sistema principal.
$\omega_2$	Frecuencia natural del absorbedor.
$\omega_{s0}$	Primera frecuencia natural del sistema semidefinido (Vibración en el modo de cuerpo rígido). Su valor es nulo.
$\omega_{s1}$	Segunda frecuencia natural del sistema semidefinido.
$\omega_{s2}$	Tercera frecuencia natural del sistema semidefinido.

## INTRODUCCIÓN

El absorbedor dinámico de vibraciones, cuya teoría fue derivada inicialmente por Brock (1906), es un dispositivo compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador. La masa se acopla, mediante el resorte y el amortiguador, a un sistema vibrante, llamado usualmente sistema principal, para reducir la amplitud de las vibraciones de la masa del sistema principal cuando éste recibe una señal de excitación. La excitación, que se puede expresar como una fuerza o una aceleración que dependen del tiempo, puede entrar al sistema a través del apoyo y/o de la masa cuyo desplazamiento se desea controlar. La amplitud de las vibraciones se reduce porque el dispositivo disipa energía a través del amortiguador viscoso cuando existe movimiento relativo entre las dos masas. La reducción de amplitud depende de la frecuencia natural del absorbedor y del nivel de amortiguamiento del mismo y, si dichos valores se eligen adecuadamente, se dice que es óptima. La elección de valores es, por lo tanto, un proceso de optimización y, en el caso del absorbedor dinámico pasivo, debe hacerse para el rango de frecuencias probables esperado de la fuente de excitación. Dentro de ese rango son especialmente importantes los valores cercanos a las frecuencias naturales del sistema completo.

## MARCO TEÓRICO

La solución para el problema de optimización del dispositivo cuando se aplica a un sistema no amortiguado de un grado de libertad con excitación en el apoyo puede encontrarse en las publicaciones de Ormondroyd (1928) y Den Hartog (1956). Una solución para el mismo problema pero con excitación en la masa principal aparece en la obra de Timoshenko (1972). Ambas soluciones se basan en el hecho de que, cuando no hay amortiguamiento en el sistema principal, hay dos puntos comunes a todos los espectros de respuesta del sistema. La optimización se consigue sintonizando en primer lugar la frecuencia del absorbedor para igualar los valores pico de la respuesta en esos puntos y eligiendo después el factor de amortiguamiento que minimice dichos valores pico. El valor práctico de estas soluciones es reducido por el hecho de que todos los sistemas reales alojan cierta cantidad de amortiguamiento intrínseco, generalmente de origen histerético. Tal situación es reconocida por varios autores, destacando Ioi e Ikeda (1978), quienes caracterizan analíticamente las condiciones óptimas para absorbedores que controlan la vibración de sistemas de un grado de libertad y proponen factores de corrección basados en el nivel de amortiguamiento del sistema principal; Randall et al (1978), quienes presentan un criterio gráfico para el diseño del dispositivo; y Warburton y Ayorinde (1980, 1982) quienes estudian el caso optimización cuando existe amortiguamiento en el sistema principal e introducen el concepto de Sistema Principal Equivalente de un grado de libertad para analizar cuerpos elásticos de distribución de masa continua. La mayoría de estos trabajos supone, sin

embargo, que el amortiguamiento del sistema principal es ligero y utiliza el concepto de puntos invariantes del problema clásico. Uno de los pocos intentos de construir una función de optimización fue reportado por Thompson (1981) quien aplicó el método del lugar geométrico de la frecuencia para obtener una expresión analítica en términos de la relación de frecuencias del absorbedor y el sistema principal. Dicha ecuación de sintonización debe resolverse numéricamente para obtener, en cada caso, la frecuencia de sintonización óptima.

Los trabajos más recientes relacionados con la optimización del dispositivo fueron presentados por Hsiang y Guan (1993), quienes proponen fórmulas explícitas basadas en ajuste de curvas para determinar los parámetros que hacen óptimo su desempeño, cuando se fija la relación de masas y se conoce el nivel de amortiguamiento del sistema a controlar; y por Sadek et al (1997), quienes presentan un método para estimar los parámetros del dispositivo cuando se aplica al control de la respuesta ante cargas sísmicas.

Cuando el dispositivo se aplica a sistemas de un grado de libertad, el criterio (cualitativo) de optimización de la mayoría de los trabajos revisados consiste en hacer que los dos picos que resultan en el espectro de frecuencia tengan la misma altura y que dicha altura sea mínima. Lo primero se consigue sintonizando las frecuencias naturales del sistema y del absorbedor. La reducción al mínimo de la respuesta pico se consigue eligiendo el nivel de amortiguamiento crítico del absorbedor.

Este artículo propone, una formulación secuencialmente definida (Box, 1965) para implementar el algoritmo de optimización de Box. Dicha secuencia de cálculos se basa en una función objetivo cuyo valor mínimo es representativo de que se satisface el criterio cualitativo mencionado arriba; y en fórmulas derivadas del análisis dinámico de un modelo general semidefinido. El programa OPTIM, de Evans (1971), se utilizó para obtener todas las soluciones numéricas que se presentan.

## MODELO MATEMÁTICO Y ANÁLISIS DINÁMICO

La figura 1 es un esquema de un sistema semidefinido, constituido por las masas  $m_0$ ,  $m_1$  y  $m_2$  que están acopladas físicamente por las rigideces  $k_1$  y  $k_2$  y los amortiguadores  $c_1$  y  $c_2$ .

La masa  $m_0$  puede representar el apoyo del sistema principal, cuando el sistema a controlar está empotrado o la masa del apoyo cuando el sistema a controlar se localiza, por ejemplo, a bordo de un helicóptero. Es claro que el modelo de la figura 1 se convierte en un sistema definido de dos grados de libertad si se supone que la masa  $m_0$  es de magnitud infinita.

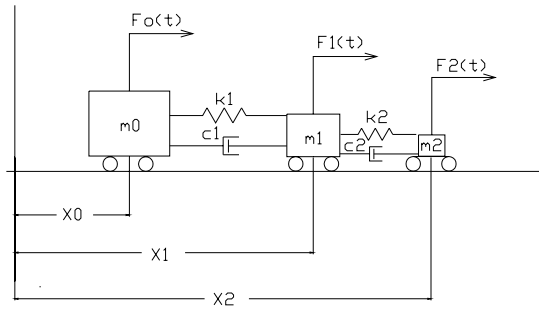


Fig. 1. Sistema semidefinido.

La masa  $m_0$  se llamará “semiespacio”. La masa  $m_1$  y, sus elementos de acoplamiento, la rigidez  $k_1$  y el amortiguador viscoso  $c_1$ , será “el sistema principal” y a la masa  $m_2$ , sus elementos de acoplamiento, el resorte  $k_2$  y el amortiguador viscoso  $c_2$ , “el sistema secundario” o, simplemente, “el absorbedor”. El arreglo completo de la figura 1 será “el sistema completo” ó, simplemente el “sistema”. Las fuerzas  $F_0$ ,  $F_1$  y  $F_2$  son funciones del tiempo y representan las excitaciones que pueden ser aplicadas sobre el sistema. La nomenclatura de la figura 1 es clásica, sin embargo, el significado de cada símbolo se presenta en la tabla de nomenclatura.

**Ecuaciones de movimiento con excitación armónica aplicada en el apoyo**

Si se supone que la única excitación sobre el sistema es  $F_0$ , se puede demostrar (Vásquez et al, 1998), el movimiento de la masa principal viene dado por:

$$\frac{X_1}{X_0} = \frac{1}{R(\gamma) + iI(\gamma)} \tag{1}$$

donde se han hecho las siguientes definiciones:

$$R(\gamma) = \frac{A\gamma^6 + B\gamma^4 + C\gamma^2 + \delta^4}{(1 + 4\gamma^2\zeta_1^2)[(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2]} \tag{2}$$

$$I(\gamma) = \frac{2\gamma^3 + D\gamma^2 + \zeta_1\delta^4\beta + \zeta_1\delta^4}{(1 + 4\gamma^2\zeta_1^2)[(\delta^2 - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2]} \tag{3}$$

con:

$$\begin{aligned} A &= 4\zeta_1\beta\delta\zeta_2 + 4\zeta_1^2 - 1 \\ B &= [-4\delta^2(1 + \beta) + 16\zeta_1^2\delta^2]\zeta_2^2 + (-8\zeta_1^2 + \beta + 2)\delta^2 + 1 \\ C &= -\delta^2[(\delta^2 - 4\zeta_2^2) + (\beta - 4\zeta_1^2)\delta^2 + 2] \\ D &= [-\beta + 4\zeta_2^2(1 + \beta) - 2]\zeta_1^2\delta^2 + \beta\delta\zeta_2 \end{aligned} \tag{4}$$

y, además, se han introducido los parámetros adimensionales:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} ; \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} ; \alpha = \frac{m_1}{m_0} ; \beta = \frac{m_2}{m_1} ; \\ \gamma &= \frac{\omega}{\omega_1} ; \delta = \frac{\omega_2}{\omega_1} ; \zeta_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1} ; \zeta_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Todas las definiciones anteriores son comunes en la literatura sobre el tema, excepto el parámetro  $\alpha$ , que relaciona la masa principal del sistema con la masa del apoyo o semiespacio.

**Ecuaciones de movimiento con excitación armónica aplicada en la masa principal**

Otra expresión para el movimiento de la masa principal se obtiene si se supone que la única excitación sobre el sistema es  $F_1$ , en ese caso, se demuestra (Vásquez, et. al. 1998) que, su ecuación de movimiento en términos de la frecuencia de excitación es:

$$X_1 = \frac{-F_1}{-Z_{1,1} + \frac{Z_{1,2}^2}{Z_{2,2}} + \frac{Z_{1,3}^2}{Z_{3,3}}} \tag{6}$$

donde:

$$\begin{aligned} Z_{1,1} &= -\omega^2 m_1 + i\omega(c_1 + c_2) + k_1 + k_2 \\ Z_{1,2} &= -i\omega c_2 - k_2 \\ Z_{1,3} &= -i\omega c_1 + k_1 \\ Z_{2,2} &= -\omega^2 m_2 + i\omega c_2 + k_2 \\ Z_{3,3} &= -\omega^2 m_3 + i\omega c_3 + k_3 \end{aligned} \tag{7}$$

y, después de introducir los parámetros adimensionales definidos en las ecuaciones (5) y definiendo al desplazamiento estático como,  $X_E = \frac{F_1}{k_1}$ , la expresión (6) finalmente resulta:

$$\frac{X_1}{X_E} = \frac{1}{R + iI} \tag{8}$$

donde se han hecho las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= \gamma^2 - 1 - \delta^2\beta - \dots \\ &\dots - \delta^2\beta \left[ \frac{-4\gamma^2\zeta_2^2(\gamma^2 + \delta^2) - \delta^2(\gamma^2 - \delta^2)}{(\gamma^2 - \delta^2) + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2} \right] - \dots \\ &\dots - \alpha \left[ \frac{-[4\gamma^2\zeta_1^2(\gamma^2 + \alpha) + (\alpha - \gamma^2)]}{(-\gamma^2 + \alpha)^2 + 4\gamma^2\alpha^2\zeta_1^2} \right] \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 I(\gamma) = & -2\gamma(\zeta_1 + \beta\delta\zeta_2) + \dots \\
 & \dots + 2\delta^3\beta\gamma\zeta_2 \frac{(\delta^2 + 4\gamma^2\zeta_2^2 - 2\gamma^2)}{(\gamma^2 - \delta^2)^2 + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2} + \dots \\
 & \dots + 2\alpha\gamma\zeta_1 \frac{(\alpha + 4\gamma^2\zeta_1^2\alpha - 2\gamma^2)}{(\alpha - \gamma^2)^2 + 4\gamma^2\alpha^2\zeta_1^2}
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\gamma_i = \frac{\omega_{si}}{\omega_i} = \sqrt{\frac{1}{2}P_1 \mp \sqrt{P_2}} \quad i = 1,2 \tag{14}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 P_1 = & \alpha + 1 + \delta^2(\beta + 1) \\
 P_2 = & (\delta^2 - \alpha)^2 + (\delta^2\beta + 1)^2 + 2(\delta^2 - \alpha)(\delta^2\beta - 1)
 \end{aligned} \tag{15}$$

Donde  $\omega_{s1}$  y  $\omega_{s2}$  son dos de las tres frecuencias naturales que tiene el sistema semidefinido en ausencia de amortiguamiento. La otra frecuencia natural es nula y se asocia con el modo de cuerpo rígido (Meirovitch, 1975).

**Análisis del movimiento de la masa del absorbedor**

Es muy importante analizar el movimiento relativo de la masa del absorbedor respecto a la masa principal ya que su desplazamiento máximo relativo puede limitar físicamente el valor práctico de una solución óptima teórica. Cuando se hacen optimizaciones, este paso del diseño tiende a ser despreciado. El movimiento relativo del absorbedor no depende del punto de aplicación de la excitación y está dado por:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{(4\gamma^2\zeta_2^2 + \delta^2 - \gamma^2)\delta^2}{(\gamma^2 - \delta^2) + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2} - \frac{2\delta\gamma^3\zeta_2^2}{(\gamma^2 - \delta^2) + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2}i \tag{11}$$

O, en términos de las magnitudes:

$$|X_2| = \delta \frac{\sqrt{4\gamma^2\zeta_2^2 + \delta^2}}{\sqrt{(\gamma^2 - \delta^2)^2 + 4\gamma^2\delta^2\zeta_2^2}} |X_1| \tag{12}$$

La ecuación (11) permite estudiar el vector de desplazamientos relativos como una función de la frecuencia de excitación. Alternativamente, puede usarse la ecuación (12) para estimar el espacio libre necesario para la acción del absorbedor suponiendo, conservadoramente, que las masas se moverán en oposición de fase para cualquier valor de dicha frecuencia.

Frecuencias naturales del sistema.

La solución del problema de valores propios del modelo semidefinido conduce a la ecuación:

$$\begin{aligned}
 & \gamma^4 - [4\delta\zeta_1\zeta_2(1 + \alpha + \alpha\beta) + \delta^2(1 + \beta) + \alpha + 1]\gamma^2 + \delta^2(1 + \alpha + \alpha\beta) + \dots \\
 & \dots + i[-2\delta\zeta_2(\beta + 1) - 2\zeta_1(\alpha + 1)]\gamma^3 + (2\delta(\delta\zeta_1(\alpha + 1) + \dots \\
 & \dots + (\alpha(\zeta_2 + \beta(1 + \delta\zeta_1)) + \zeta_2))\gamma] = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

Esta ecuación debe resolverse, en cada caso, aplicando algún método numérico. Sin embargo, si en la propia ecuación se considera el caso no amortiguado, el problema de valores propios produce los siguientes resultados:

**OPTIMIZACIÓN**

El concepto de óptimo es, en esencia, subjetivo pero parte de esa característica desaparece si existen expresiones matemáticas para las variables, sus restricciones y las relaciones funcionales entre ellas. En su forma más abstracta cualquier problema de optimización exige la definición explícita de una función a optimizar o función objetivo. La región de diseño factible dentro de la cual debe buscarse el valor óptimo de la función objetivo está definida por relaciones funcionales explícitas o implícitas que representan las restricciones impuestas al diseño.

**Región de diseño factible**

Las relaciones funcionales del problema que nos ocupa están expresadas en términos de los parámetros adimensionales definidos en las ecuaciones (5). El uso de parámetros adimensionales permite obtener soluciones numéricas únicas para las que sin embargo, pueden haber varios sistemas reales dimensionalmente equivalentes. La región de diseño factible está acotada por los rangos de variación de dichos parámetros. Los rangos o intervalos de definición son variables según el problema a resolver. Los límites que se presentan en el cuadro No. 1 son convenientes si se desea lograr un diseño convencional económico.

Cuadro. No. 1. Límites convencionales de los parámetros adimensionales

$\alpha$	Por la naturaleza del problema este parámetro suele tener un valor relativamente pequeño y es nulo en los enfoques clásicos. Un valor relativamente grande tiene un efecto que podría no ser despreciable a muy bajas frecuencias, como se explica en las conclusiones de este trabajo.
----------	---

$\beta$	Teóricamente, la razón entre la masa del absorbedor y la masa efectiva del sistema a controlar puede ser tan grande como se desee. En la práctica, lo deseable es que su valor sea menor o igual que la unidad. Hemos observado que cuanto más grande es la masa del absorbedor, tanto mayor es la reducción de la amplitud de vibración una vez sintonizado el dispositivo pero, por razones económicas, se recomienda que su valor máximo permisible sea de 0.05.
$\gamma$	Matemáticamente, la razón entre la frecuencia de la fuente de excitación y la del sistema principal puede variar desde cero (condición de carga estática) hasta infinito. En la práctica, las frecuencias muy altas no suelen tener efecto sobre el sistema, ya que el espectro de respuesta empieza a hacerse notablemente asintótico a partir del valor $\gamma=2$ , como se puede apreciar en las gráficas de los espectros de frecuencia.
$\delta$	Aparentemente, la unidad es el valor máximo de la razón entre la frecuencia natural del absorbedor y la del sistema principal. La elección de este valor, o sintonización de la masa del absorbedor, es el paso más importante de la optimización.
$\zeta_1$	El coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema principal debe determinarse experimentalmente. Los valores típicos publicados van desde 0.05 hasta 0.25. Matemáticamente no hay restricciones para este parámetro. Sin embargo, si los sistemas principales están fuertemente amortiguados puede no ser necesaria la instalación de un absorbedor dinámico para reducir la amplitud de sus oscilaciones.
$\zeta_2$	El coeficiente de amortiguamiento viscoso del absorbedor debe proponerse para optimizar la respuesta del sistema. Den Hartog habla de un valor crítico para cada sistema que minimiza la amplitud de la respuesta pico. Valores por debajo del crítico producen amplitudes mayores que el mínimo posible y si se rebasa el valor crítico, la masa principal tiende a "arrastrar" a la del apéndice y el efecto del absorbedor no contribuye a mejorar el desempeño del sistema. Los autores han fijado arbitrariamente un intervalo de variación desde 0.0 hasta 2.0.

### Función objetivo

La función objetivo es una relación definida con los parámetros del sistema cuyo valor mínimo (o máximo) produce la condición óptima. Los espectros de respuesta típicos para los sistemas de dos grados de libertad tienen uno o dos picos, dependiendo del amortiguamiento del absorbedor. La condición óptima corresponde a un espectro que tiene dos picos de amplitud mínima iguales entre sí. Una de las aportaciones del algoritmo es la proposición de la función objetivo que se describe a continuación:

Sea:

$$F(\gamma) = \frac{1}{R(\gamma) + iI(\gamma)}$$

Las ecuaciones (2) y (3) definen a las funciones  $R(\gamma)$  e  $I(\gamma)$  en el caso de excitación en el apoyo. Las ecuaciones (9) y (10) lo hacen en el caso de excitación aplicada en la masa principal.

La función objetivo propuesta es:

$$F_{objetivo} = \left| F(g_2)^2 - F(g_1)^2 \right| + \frac{F(g_1) + F(g_2)}{2} \quad (16)$$

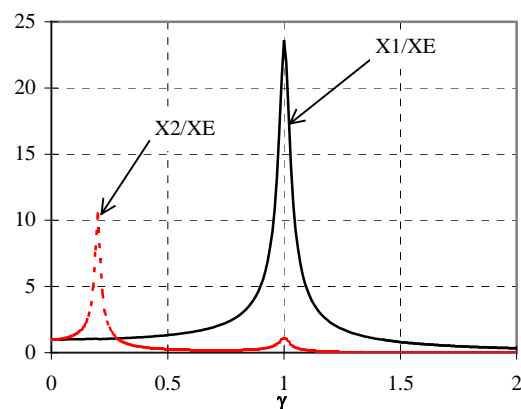
Donde  $g_1$  y  $g_2$  son los valores del parámetro  $\gamma$  que producen picos en el espectro de respuesta. La formulación secuencial del problema de optimización es:

### Procedimiento de optimización

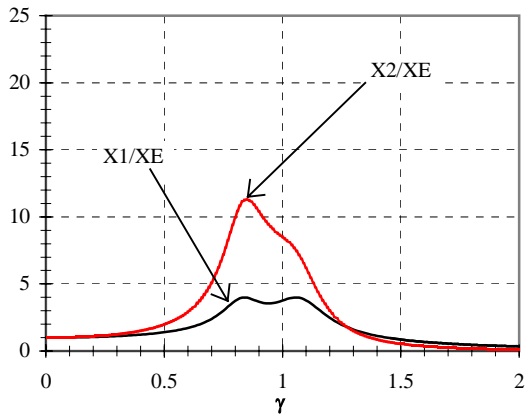
Dado el valor del parámetro  $\zeta_1$ , por ejemplo:

- Proponer un conjunto de valores, dentro de los rangos recomendados por la práctica, para los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ , y  $\zeta_2$ .
- Calcular los valores de:  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$
- Buscar numéricamente, en la vecindad de estos valores, los valores  $g_{m1}$  y  $g_{m2}$ , de  $\gamma$  que producen los valores pico del factor de amplificación en el espectro de respuesta a la frecuencia.
- Evaluar la función objetivo.
- Repetir los tres pasos anteriores utilizando algún método iterativo para minimizar la función objetivo. Se utilizó una versión modificada de OPTIM, el programa desarrollado por Evans (1971), que implementa el método de Box.

El procedimiento propuesto permite atacar de varias maneras el problema de optimización, inclusive tomando como único dato de entrada el valor del coeficiente de amortiguamiento del sistema a controlar. En la práctica este valor es conocido, junto con el de la rigidez de dicho sistema. Los rangos de variación de los parámetros adimensionales discutidos arriba delimitan la región de diseño factible.



(a)



(b)

Figura 2. Espectros de respuesta del ejemplo numérico. (a). Respuesta del sistema con los parámetros iniciales antes de la optimización. (b) Respuesta del sistema después de la optimización. La línea punteada representa el movimiento relativo del absorbedor.

**Ejemplo numérico**

Para un sistema definido de un grado de libertad se sabe que el coeficiente de amortiguamiento es  $\zeta_1=0.1$  (constante). Se desea utilizar un absorbedor de manera que la relación de masas sea  $\beta=0.05$ . Determinar los valores de los demás parámetros del absorbedor que minimizan el factor de amplificación del sistema. Suponga que la excitación se aplica en la masa del sistema principal.

Solución :

La búsqueda del óptimo se inicia con el punto inicial determinado por:

- $\alpha=0.00$  constante
- $\zeta_1=0.02$  constante
- $\beta=0.05$  constante
- $\delta = 0.7$  ( $0 \leq \delta \leq 1$ )
- $\zeta_2 = 0.05$  ( $0 \leq \zeta_2 \leq 2$ )

Estos valores se asignaron arbitrariamente, pero dentro de los rangos de variación.

El espectro de respuesta a la frecuencia, con los valores iniciales se muestra en la figura (2).

Los resultados de la ejecución de OPTIM, aparecen los cuadros 2 y 3.

Cuadro No. 2 Resultados de la ejecución del programa OPTIM

OPTIMACION DEL ABSORBEDOR DINAMICO				
Ejemplo numérico				
DATOS DE ENTRADA				
VARIABLES INDEPENDIENTES				
NOMBRE	LIM.INF.	LIM.SUP.	VALOR	UNIDADES
Delta	0.00	1.0	0.2	adim
Zeta2	0.01	2.5	0.05	adim
VARIABLES DEPENDIENTES				
NOMBRE	LIM.INF.	LIM.SUP.	VALOR	UNIDADES
max1	0	50	1.060993	adim.
max2	0	150	23.670840	adim.
gm1	0	1	0.192437	adim.

gm2	0	2	1.001603	adim.
PARAMETROS				
NOMBRE	VALOR	UNIDADES		
Alfa	0.00	adim.		
Zeta1	0.02	adim.		
Beta	0.1	adim		
FUNCION OBJETIVO				
NOMBRE	VALOR	DES.REL.	DES.ABS.	UNIDADES
F.obj.	571.549	.000001	.000001	adim

Cuadro No. 3 Resultados de la ejecución del programa OPTIM

EL PROCESO CONVERGE EN 196 ITERACIONES				
***SOLUCION***				
VARIABLES INDEPENDIENTES				
NOMBRE	LIM.INF.	LIM.SUP.	VALOR	UNIDADES
Delta	0.00	1	0.9008753	adim.
Zeta2	0.01	2.5	0.1888887	adim.
VARIABLES DEPENDIENTES				
NOMBRE	LIM.INF.	LIM.SUP.	VALOR	UNIDADES
Max1	0	50	3.991338	adim.
Max2	0	150	3.991338	adim.
Gm1	0	1	0.837703	adim.
Gm2	0	2	1.055646	adim.
PARAMETROS				
NOMBRE	VALOR	UNIDADES		
Alfa	0.0	adim.		
Zeta1	0.02	adim.		
Beta	0.1	adim		
FUNCION OBJETIVO				
NOMBRE	VALOR	DES.REL.	DES.ABS.	UNIDADES
F.obj.	3.991342	0.0000001	0.000001	adim

El espectro de respuesta optimizado se presenta en la figura 2(b).

**Movimiento relativo de la masa del absorbedor**

En la figura (3) se muestran, superpuestas, las trazas de las magnitudes de los desplazamientos de la masa principal, la masa del absorbedor, el desplazamiento relativo entre las dos y la magnitud del ángulo de fase para el rango de frecuencias considerado y con los valores de los parámetros de la curva optimizada del ejemplo anterior.

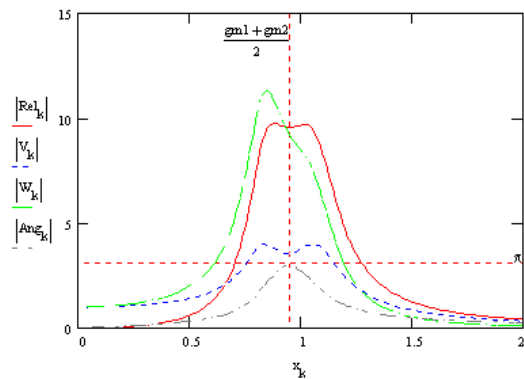


Figura 3. Trazas de los desplazamientos. Con línea continua el desplazamiento relativo; con guiones, el de la masa principal; con guiones largos, el de la masa del absorbedor y con guiones y

puntos, la variación del ángulo de fase entre los desplazamientos en función de la frecuencia normalizada de excitación.

Obsérvese que el máximo desplazamiento relativo ocurre en uno de los valores del parámetro  $\gamma$  (denominados  $gm1$  y  $gm2$ ), que producen valores pico en la respuesta del sistema. Se puede observar que para esos valores de  $\gamma$  los desplazamientos de las masas del sistema no están en oposición de fase. La oposición de fases ocurre, como era de esperarse, cuando la excitación tiene una frecuencia igual al promedio de dichos valores y produce el punto más bajo del valle que aparece entre los dos valores pico de la respuesta. El máximo desplazamiento relativo se puede calcular sustituyendo  $gm1$  en la ecuación (12) y calculando la magnitud del vector complejo que resulta. Para este ejemplo, dicho valor es:

Máximo Desplazamiento Relativo = 9.747

### Comparación con trabajos anteriores

Como parte de este trabajo, se reprodujeron la mayoría de los resultados encontrados en la literatura. Los resultados son tema de otra publicación [19]. El ejemplo numérico resuelto aquí se compara con lo reportado por Warburton y Ayorinde. Hsiang y Guan y Sadek et al. En el cuadro No. 2 se presentan las base del estudio comparativo.

Cuadro No. 2. Parámetros óptimos obtenidos por otros autores para un sistema similar al del ejemplo numérico.

Parámetro	Warburton Ayorinde (1981)	Hsiang Guan (♦) (1993)	Sadek, Mohraz Taylor y Riley (♦♦) (1997)	Vásquez, Vásquez y Urrutia(♣) (1998)
$\beta$ Relación entre la masa del absorbedor y la del sistema principal.	0.1	0.1	0.1	0.1
$\zeta_1$ Coeficiente de amortiguamiento del sistema principal	0.02	0.02	0.02	0.02
$\delta$ Relación entre la frecuencia natural del absorbedor y la del sistema principal	0.9009	0.9306	0.9036	0.9008753
$\zeta_2$ Coeficiente de amortiguamiento del absorbedor	0.1880	0.1880	0.3196	0.1888887
R Factor de amplificación del sistema completo optimizado	3.991	3.977	No publica este valor	3.991338
Gm1 Valor normalizado de la frecuencia para el primer valor pico	0.838	No publica este valor	No publica este valor	0.8377035
Gm2 Valor normalizado de la frecuencia para el segundo valor pico	1.058	No publica este valor	No publica este valor	1.055646

♦ Estos autores consideraron excitación aplicada en el apoyo  
 ♦♦ Estos autores consideraron excitación sísmica.  
 ♣ Los mismos valores resultan, independientemente del punto de aplicación de la excitación.

### Notas sobre los resultados numéricos

De acuerdo a los valores obtenidos con el modelo y la función objetivo propuestos, los mismos valores de los parámetros que optimizan la respuesta cuando la excitación se aplica en la masa  $m_0$ , lo hacen cuando la excitación se aplica en la masa  $m_1$ . Los resultados numéricos concuerdan aceptablemente con los publicados por Warburton en 1981. La diferencia notable que existe entre los resultados de la presente investigación y los publicados por Hsiang en 1993 para el caso de excitación por el apoyo se debe a que el método propuesto por Tsai se basa en ajuste de curvas y tiene un margen de error muy grande.

Es sorprendente, sin embargo, la diferencia notable entre los resultados de Sadek, publicados en 1997 para el caso de excitación sísmica y los de todos los demás. Esta sugiere que los parámetros que optimizan la respuesta para carga sísmica son diferentes que los que lo hacen para condiciones de carga armónica, sea de fuerza o aceleración, lo cual no nos parece muy lógico. Se sabe que para sistemas continuos como placas y cascarones, la respuesta varía de acuerdo a la frecuencia natural sobre la que la excitación tenga más influencia, pero en este caso, el sistema tiene sólo dos grados de libertad y dos frecuencias naturales. Esto define la necesidad de investigación a la que se dedicarán los autores.

## CONCLUSIONES Y PUNTOS A DESTACAR

Se ha presentado una función analítica representativa de la condición óptima de diseño de absorbedores de vibración. Dicha función objetivo, permite resolver el problema de síntesis aplicando el método de Box.

Se ha probado la efectividad de un procedimiento simple para sintetizar dichos dispositivos. El procedimiento permite varios enfoques alternos para el problema lo que lo hace versátil y adaptable a las particularidades de casos especiales de la práctica. Aunque lo usual es que se conozcan el amortiguamiento y la rigidez del sistema (principal) cuyas vibraciones se desea reducir con la instalación del absorbedor; por lo menos teóricamente es posible plantear y resolver un problema de optimización en el que el único dato de entrada sea el amortiguamiento del sistema principal.

Los parámetros óptimos que resultan de la aplicación del método son convergentes con los publicados por otros investigadores. En particular, es aparente que, si la excitación es armónica, el punto de aplicación de la misma no influye en los valores de los parámetros que optimizan el dispositivo.

Parece lógico pensar que la función de transferencia de un sistema masas-resortes-amortiguadores de dos grados de libertad no dependa de la fuente de excitación. Sin embargo, hay por lo menos un reporte donde los parámetros óptimos cambian. Se requiere más investigación sobre este punto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Box M. J. 1965. "A New Method of Constrained Optimization and a Comparison with Other Methods", *Computer Journal*, 8, 42-52.
- Brock, J.E., 1906. "A note on the damped vibration absorber", *ASME Journal of applied Mechanics*, 13, A-284.
- Den Hartog J.P., 1956. "Mechanical Vibrations", 4<sup>th</sup> Ed. Mc Graw Hill, New York.
- Evans, L. B., 1971. "Optimization Techniques for use in Analysis of Chemical Processes", A set of notes. Massachusetts Institute of Technology.
- Hsiang-Chuan Tsai and Guan-Chen Lin, 1993. "Optimum Tuned-Mass Dampers for Minimizing Steady State Response of Support Excited and Damped Systems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 957-973.
- Ioi, T. and Ikeda, K., 1978. "On the dynamic damped absorber of the vibration system" *Bulletin JSME* 2, 64-71.
- Meirovitch, L., 1975. "Elements of Vibration Analysis", 1<sup>st</sup> Edition, McGraw-Hill, Inc.
- Ormondroyd, J. and Den Hartog, J.P., 1928. "The theory of the dynamic vibration absorber", *Transactions of the ASME* 49-50, A9-A22.
- Randall, S. E., Halted III, D. M. and Taylor, D. L., 1978. "Optimum vibration absorbers for linear damped systems", ASME Paper no. 78-WA/DE-22.
- Sadek F., Mohraz B., Taylor A. W. and Chung R. M., 1997. "A Method of Estimating The Parameters Of Tuned Mass Dampers For Seismic Applications", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 26, 617-635.
- Thompson A.G., 1981. "Optimum Tuning and Damping of Dynamic Vibration Absorber Applied to a Force Excited and Damped Primary System". *Journal of Sound and Vibration* 77(3), 403-415.
- Timoshenko S., and Young, D. H., 1972. "Vibration Problems in Engineering". 4<sup>th</sup> ed. John Wiley, New York.
- Wang, B. P., Kitis, L., 1985. "Synthesis of dynamic vibration absorbers", *ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 107, 161-166.
- Villaverde R., 1985. "Reduction in Seismic Response with Heavily-Damped Vibration Absorbers", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13, 33-42.
- Villaverde R. and Koyama L. A., 1993. "Damped Resonant Appendages to Increase Inherent Damping in Buildings", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 491-507.
- Warburton G. B. and Ayorinde E. O., 1980. "Optimum Absorber Parameters for Simple Systems". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8, 197-217.
- Warburton G. B., 1982. "Optimum Absorber Parameters for Various Combinations of Response and Excitation Parameters". *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 10, 381-401.
- Yamaguchi, H. and Harnpornchai, N., 1993. "Fundamental characteristics of multiple tuned mass dampers for suppressing harmonically forced oscillations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22, 51-62.