Un laboratorio de… ¿Matemáticas?

A mathematics... lab?

Resumen:

Cuando hablamos de laboratorios comúnmente pensamos en ciencias como la física, química y biología, hablar de un laboratorio matemático puede ser difícil de entender para algunas personas.

Es común escuchar quejas sobre lo difícil y abstractas que son las matemáticas (aunque a veces no se tenga una idea clara de lo que significa abstracto). Sin embargo, algo que a veces olvidamos los profesores, es que algunas bases de las matemáticas tienen su origen en experiencias prácticas. Por ejemplo, la necesidad de contar surge por llevar el control de cuántas ovejas había en un rebaño, una vez que se domesticaron algunas especies. Posteriormente, se tuvieron que definir las dimensiones de terrenos para construir, al hacer un muro debemos asegurarnos de que las líneas de ladrillos sean horizontales y paralelas entre sí. Las matemáticas tienen mucho de práctico, por qué limitarnos a enseñarlas encerrados en un aula si podemos salir y hacer de los espacios abiertos un laboratorio matemático.

Abstract:

When we talk about laboratories, what usually comes to mind are science subjects, such as physics, chemistry and biology. Talking about a math laboratory might be hard to understand for some people.

It is common to hear complaints about how hard and abstract math is (although sometimes there is no clear idea of what abstract means). However, something we professors sometimes forget, is that some of the basis of mathematics originate from practical life experiences; the need to count emerges from having to keep track of the quantity of sheep in a flock once some species became domesticated. Subsequently, the measurements of lots of land had to be defined for buildings to get built, when building a wall we must ensure the lines between bricks are straight and parallel. Mathematics has a lot of practical uses, why limit ourselves to teaching them while caged inside a classroom, when we could make use of the great outdoors and transform it into a math lab.

1. **¿Cuánto mide? (Razón y proporción)**

Contexto:

En ocasiones, en algunas películas, documentales o reportajes, se habla de la altura de edificios, árboles o estructuras, como la torre Eiffel, por ejemplo. Una persona puede estimar a simple vista algunas dimensiones y la precisión de su estimación dependerá de la experiencia que tenga haciendo mediciones de estructuras u objetos haciendo uso de algunos instrumentos. Pero ¿Y si no tenemos ningún instrumento de medición a la mano o no tenemos experiencia en mediciones ¿Cómo podríamos saber cuál es la altura de un árbol o de un edificio?

Objetivo:

Estimar la altura de árboles o edificios aplicando un método práctico basado en la geometría.

Materiales:

- Espejo
- Varilla de madera
- Cinta métrica o flexómetro
- Papel
- Lápiz
- Calculadora

¿Qué vamos a hacer?

Para determinar la altura de un árbol o un edifico, aplicaremos dos métodos, uno mediante el reflejo en un espejo y otro a partir de la medición de sombras, se realizarán algunas mediciones y se analizarán los datos obtenidos.

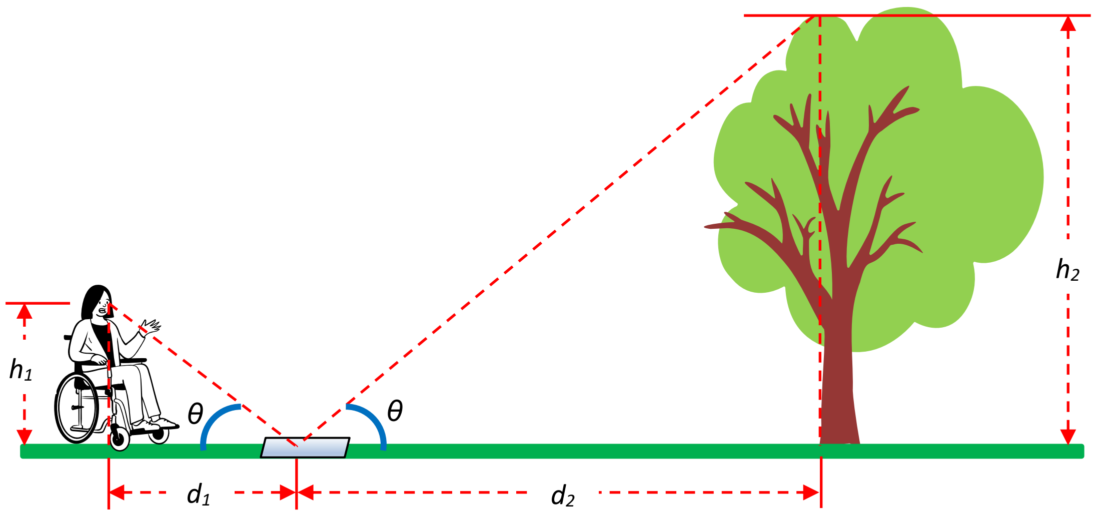
- Método del espejo

Para definir la altura del objeto a medir, se colocará un espejo entre el observador y el objeto. El espejo debe ser lo suficientemente pequeño para transportarlo fácilmente, pero lo suficientemente grande para ver la imagen del árbol o el edificio reflejada en él.

El espejo se colocará en el piso entre el observador y el objeto a medir, la persona permanecerá erguida y, observando al espejo, deberá ver la parte más alta del objeto reflejada.

Utilizando la cinta métrica se medirá la altura del piso a los ojos del observador (h_1) y la distancia, sobre el piso, del observador al espejo (d_1). También se medirá la distancia que hay entre la base del edificio o el pie del árbol al espejo (d_2). Cómo se muestra en la figura[1].

[1] Ilustración desarrollada con el banco de imágenes de archivo de Microsoft Word.



Registra los datos en la tabla (La altura del objeto se obtendrá después de analizar los datos de las tres primeras columnas), la unidad de medida será metros (*m*):

h_1 (*m*)	d_1 (*m*)	d_2 (*m*)	h_2 (*m*)

Para saber cuál es la altura del árbol debemos considerar que los ángulos (θ) que se forman entre el espejo y la persona que observa y el espejo y la parte más alta del objeto, son iguales. Por ello, los triángulos que forman la altura del observador y el árbol, las distancias del observador y pie del árbol al espejo y del espejo a los ojos del observador y el punto más alto del árbol, son semejantes.

Debido a lo anterior, el cociente de la altura del observador (h_1) y la altura del objeto (h_2) es igual al cociente de la distancia de separación entre el observador y el espejo (d_1) y la distancia entre el espejo y la base del árbol (d_2), es decir:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Si de la ecuación despejamos h_2, tenemos que:

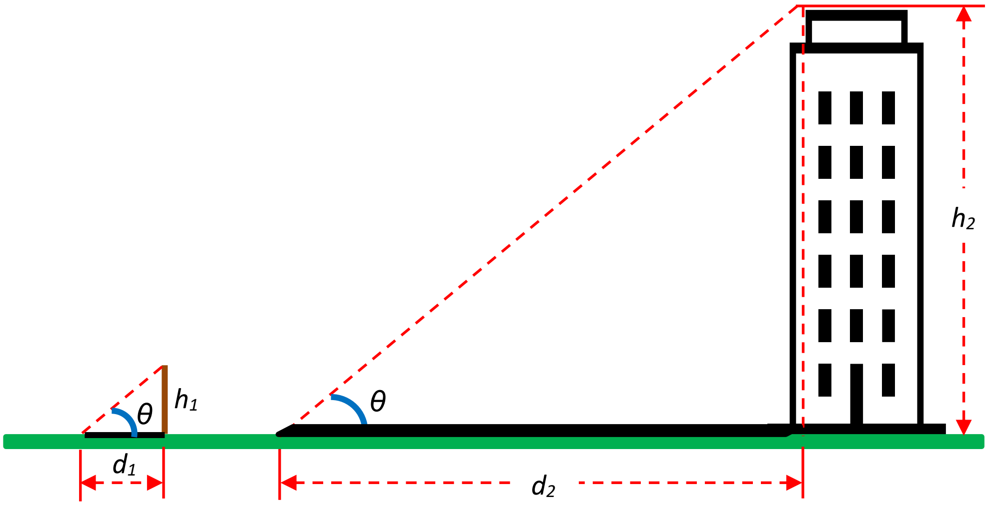
$$h_2 = \frac{h_1 \times d_2}{d_1}$$

Sustituyendo los datos que se obtuvieron al realizar las mediciones, será posible determinar la altura del árbol.

- Método de las sombras

En este caso, se sostendrá una varilla de madera a un ángulo de 90° respecto al piso en un espacio en dónde se proyecte claramente su sombra. Previamente, se medirá la altura de la varilla (h_1), después, la longitud de la sombra (d_1). Una vez definido el objeto del cual se desea conocer la altura, se medirá la longitud de su sombra (d_2). Como se muestra en la siguiente figura[2].

[2] Ilustración desarrollada con el banco de imágenes de archivo de Microsoft Word.



Registra los datos en la siguiente tabla.

h_1 (*m*)	d_1 (*m*)	d_2 (*m*)	h_2 (*m*)

El ángulo (θ) que proyectan las sombras será el mismo para la varilla y el edificio, los triángulos que forman las sombras, las alturas y la diagonal del punto más alto de la varilla y el edificio al extremo de las sombras, son semejantes. El cociente de la longitud de la varilla (h_1) y la altura del edificio (h_2) es igual al cociente de la longitud de la sombra que proyecta la varilla de madera (d_1) y la sombra del edificio (d_2), es decir:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{d_1}{d_2}$$

Despejando h_2, tenemos que:

$$h_2 = \frac{h_1 \times d_2}{d_1}$$

Sustituyendo los datos será posible determinar la altura del edificio.

Se sugiere realizar la medición de un objeto aplicando ambos métodos y comparar el resultado obtenido.

Método	Altura del objeto (m)
Espejo	
Sombras	

También se puede usar una aplicación para dispositivos móviles que permita medir la altura de objetos, existen varias opciones bastante intuitivas en su uso, con ello, se tiene una alternativa más para comparar el resultado obtenido.

2. Determinando el área de mi huella (Aproximación al cálculo integral)

Contexto:

Comúnmente, en los cursos de matemáticas aprendemos a medir y calcular áreas y volúmenes de figuras que casi siempre tienen formas geométricamente regulares o están compuestas de ellas. Pero, si observamos en la naturaleza, pocas cosas son geométricamente regulares, como una hoja o una roca, por ejemplo. ¿Cómo se podría obtener el área de una forma geométricamente irregular?

Objetivo:

Calcular el área de objetos irregulares, por aproximación, aplicando dos métodos.

Materiales:

- Balanza
- Regla de 30 cm
- Tres hojas de papel milimétrico
- Papel
- Lápiz
- Pintura lavable
- Tijeras
- Calculadora
- Escáner (opcional)

¿Qué vamos a hacer?

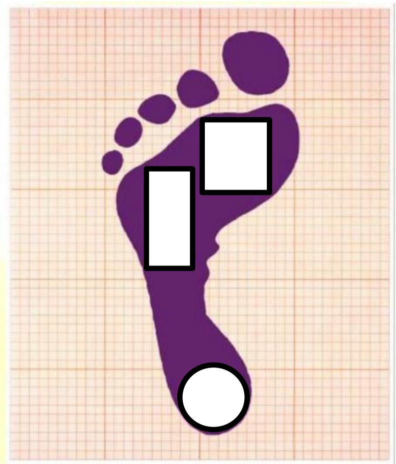
Aunque exteriormente nuestro cuerpo es simétrico, algunas partes de él no lo son, como nuestras manos y pies.

En este caso, el objetivo será determinar cuál es el área de una mano y un pie. Para ello, utilizaremos tres hojas de papel milimétrico, en una de ellas se marcará la huella del pie y en otra la de la mano, se puede trazar solo el contorno con un lápiz, aplicar pintura lavable para niños y marcar sobre las hojas milimétricas o utilizar un escáner para imprimir las huellas en una hoja de papel milimétrico, si se opta por este método se debe tener cuidado al apoyar el pie pues se puede romper el vidrio del escáner. ⚠

Una vez impresos la mano y el pie en las hojas, se determinará cuál es el área aproximada de cada figura, aplicando los siguientes métodos.

- Método de la suma de áreas geométricas regulares.

Para definir por aproximación el valor del área del pie y mano, se trazarán el mayor número posible de figuras geométricas regulares al interior de la huella y, utilizando la regla o los cuadros de la hoja milimétrica, se determinará el área de cada figura, las cuales serán sumadas para obtener el área aproximada, como se muestra en la figura[3].



El problema es que hay un límite en el número de figuras que se pueden trazar, pero, por estimación se pueden sumar las pequeñas áreas restantes completando figuras para tener una mejor aproximación.

[3] Ilustración creada por los autores.

- Método de la balanza

En este caso, se recortará por el contorno las partes que forman la huella de la mano y el pie, y se medirá la masa del conjunto de piezas, separando las de pie y mano. A la tercera hoja de papel milimétrico se le recortará el borde blanco del margen y se medirá la masa de la parte impresa milimétricamente.

En la hoja milimétrica sin bordes se puede medir el ancho y el largo utilizando las marcas impresas, con esta información se podrá determinar cuál es su área, con la ventaja de que la figura es un rectángulo. Así, se puede establecer una relación entre la masa de la hoja y su masa, un método poco convencional que nos permitirá obtener una estimación del área de las huellas.

Mediante una regla de tres será posible determinar cuál es el área de las huellas. Si no se cuenta con una balanza, en algunos cuadernillos se indica la densidad del papel, que puede ser, por ejemplo, papel bond de 60 g/m^2 (así lo indican los fabricantes). Si la hoja tiene 20 *cm* de ancho y 26 *cm* de largo, su área será:

$$A = 20\ cm\ \times 26\ cm = 520\ cm^2$$

Si la masa de la hoja de papel milimétrico con los bordes recortados fuera de 3.12 *g* y la masa de la huella recortada del pie fuera de 2.8 *g*, estableceríamos la siguiente regla de tres:

$$3.12\ g \quad \rightarrow \quad 520\ cm^2$$

$$2.8\ g \quad \rightarrow \quad x$$

Así:

$$x = \frac{(2.8\ g)(520\ cm^2)}{3.12\ g} = 466.67\ cm^2$$

El área de la huella del pie será de aproximadamente 466.67 cm^2, este resultado se podría comparar con el área obtenida mediante la suma de áreas de figuras geométricas regulares al interior de la huella.

En la siguiente tabla registra y compara los resultados obtenidos por cada método.

Huella	Área por el método de suma de áreas (m^2)	Área por el método de la balanza (m^2)
Mano		
Pie		

¿Cuál método da la mejor aproximación? Explica por qué.

Otra opción para tener una mejor medida del área de las huellas es usar una aplicación para dispositivos móviles o software, como Geogébra o Image J.

3. **¿¡Topolo… qué!? (Áreas y bases de topología)**

Contexto:

Una de las ramas más recientes de las matemáticas es la topología, que podríamos describirla más o menos como el estudio de la deformación continua de un objeto geométrico, lo cual, dicho de esta forma, no es fácil de entender a la primera, pero de manera práctica quizá sea posible por empezar a entender de qué va esta rama de las matemáticas.

La topología tiene mucho potencial de aplicación en la física, ingeniería, química e incluso en disciplinas que parecieran ajenas, como la economía y la computación.

Objetivo:

Comprobar que, al deformar la superficie de hojas de papel, manteniendo las mismas dimensiones observadas desde una vista superior, su área puede variar.

Materiales:

- Hojas de papel
- Regla de 30 *cm*
- Tijeras
- Dos cartulinas blancas

¿Qué vamos a hacer?

Iniciemos por recordar que el área de cualquier objeto es una superficie acotada por ciertas dimensiones, por ejemplo, para una superficie cuadrada de un metro por un metro, su área será de un metro cuadrado, es decir:

$$A = 1\,m \times 1\,m = 1\,m^2$$

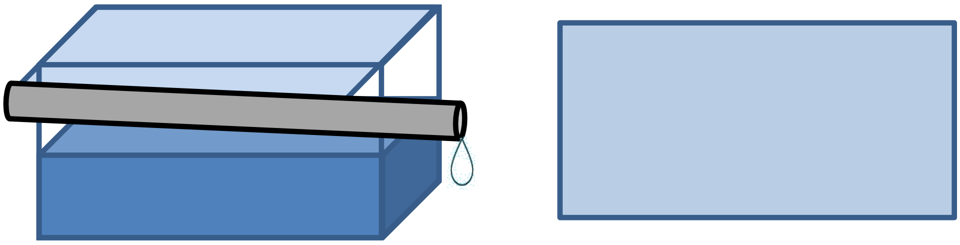
Para un rectángulo de 3 *m* de ancho por 5 *m* de largo, su área será:

$$A = 3\,m \times 5\,m = 15\,m^2$$

Y así para diferentes formas geométricas planas.

Pero, qué pasa si la superficie se deforma, obviamente podremos pasar de una superficie plana a una forma tridimensional, como cuando se hace un cucurucho[4] o cono de papel.

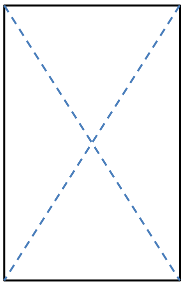
Analicemos un caso concreto, si quisiéramos diseñar un evaporador de agua que funcionara a base de la energía calorífica del Sol, podríamos pensar en una caja cuadrada que contuviera agua y una tapa sobre la cual se condensaría el agua. Inicialmente, podríamos pensar en una tapa plana con cierto grado de inclinación y en el extremo un canal cilíndrico para recuperar el agua condensada, como se muestra en la siguiente figura[5].



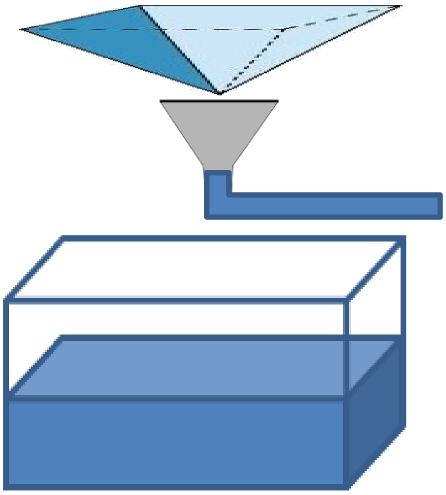
[4] En México era común el uso de cucuruchos para empaquetar mercancía, cuando se asistía al mercado se hacían conos de papel de periódico y en su interior se colocaban granos de maíz, por ejemplo.

[5] Ilustración desarrollada con las herramientas de imágenes de Microsoft Word.

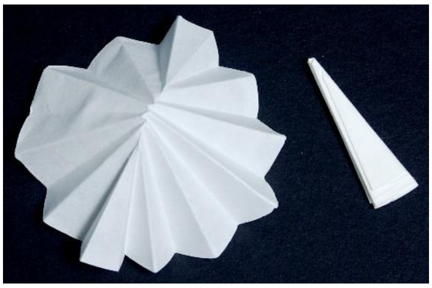
Vista desde arriba, la tapa es un rectángulo, y para determinar su área solo tendríamos que medir su ancho y largo para calcularla. Pero ¿qué pasaría si deformáramos el rectángulo manteniendo su ancho y largo?



Al doblar en diagonal por sus esquinas la superficie rectangular[6], como se muestra en la figura de la derecha, será posible construir una pirámide recta, que vista desde arriba podría mantener el mismo ancho y largo de la tapa plana del evaporador, pero cuya área sería mayor, lo cual permitiría condensar más vapor de agua sobre su superficie en menor tiempo. Mide los lados de una hoja de papel y calcula su área.



Con una de las cartulinas construye una pirámide recta que tenga el mismo largo y ancho de la hoja de papel y calcula su área total. Considera que tiene cuatro caras triangulares, para saber cuál es el área mide la base del triángulo y su altura, considera que hay dos triángulos diferentes. Con estos datos calcula el área sumando el área de los cuatro triángulos. Esta es el área sobre la cual se condensará el vapor de agua, si se coloca un embudo debajo de la punta de la pirámide invertida, sería posible recuperar el agua condensada y conducirla a través de un tubo hacia el exterior.



¿Qué pasaría si el número de caras de la tapa se multiplicara? Investiga cómo podrías construir una tapa rectangular de las dimensiones de la hoja de papel, pero similar a la de la imagen[7] de la derecha, que corresponde a los dobleces de un papel para filtrar soluciones en un laboratorio de química. Calcula la superficie de la cara exterior. Concentra los resultados obtenidos en la siguiente tabla.

Forma de la hoja	Área de condensación (cm^2)
Plana	
Pirámide	
Réplica de los pliegues de papel filtro	

¿Qué pasa con el valor del área de la superficie de condensación?
¿De qué otra forma podría incrementarse el área de la superficie de condensación?

[6] Ilustración desarrollada con la herramienta de imágenes de Microsoft Word.
[7] Imagen obtenida de https://es.wikipedia.org/wiki/Papel_de_filtro#/media/Archivo:Paper_filters-laboratory_1.jpg, con licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0). Las otras dos imágenes de esta página son creación de los autores.

4. ¿Cuánto mide la Tierra? (Geometría plana, máximo gráfico)

Contexto:

En la actualidad, hay un fuerte movimiento de personas que asumen que la Tierra es plana, quizá porque así se percibe a simple vista. Sin embargo, siempre hay que tener presente que los sentidos simples pueden engañarnos.

En el siglo III a. de C., Eratóstenes, matemático y astrónomo griego, realizó a primera medición reportada de las dimensiones del planeta. Siendo este una de las confirmaciones prácticas más sencillas y hermosas en la historia de la ciencia, debido a la sencillez del procedimiento y a la precisión del resultado.

Objetivo:

Calcular la circunferencia de la Tierra replicando la medición de Eratóstenes.

Materiales:

- Varilla de madera
- Cinta métrica o flexómetro
- Papel
- Calculadora
- Lápiz

¿Qué vamos a hacer?

Lo primero será determinar cuál es la hora del mediodía solar local (que puede diferir del mediodía en el reloj), para ello se sostendrá la varilla de madera en posición perpendicular a la superficie del piso, en un lugar abierto y soleado. Para ello, se medirá la longitud de la sombra que proyecta la varilla en intervalos de cinco minutos, 20 minutos antes y después del mediodía solar en la región donde vives (se puede obtener este dato a través de internet). Las mediciones se registran en la tabla siguiente:

Lectura (*min*)	Hora del reloj	L: Longitud de la sombra (*cm*)
0		
5		
10		
15		
20		
25		
30		
35		
40		

Con estos datos se elaborará una gráfica, en la cual se representará el tiempo (*min*) en el eje x y en el eje y, la longitud de la sombra (*cm*). A través esta representación se determinará por extrapolación a qué hora la longitud de la sombra es mínima. Eso permitirá determinas cuál es la hora del mediodía solar.

Considerando la altura de la varilla (h) y la longitud de la sombra (L) que proyecta al mediodía solar, se determinará el ángulo (α) que forma respecto de la superficie de la Tierra (Figura 1). Utilizando la función trigonométrica tangente, es decir:

$$\tan \alpha = \frac{L}{h}$$

Para calcular las dimensiones de la Tierra se repetirá el procedimiento anterior en otra localidad. Para esto, se tendrá que pedir la ayuda a un amigo o familiar que viva en otra ciudad y que haga las mediciones o hacerlas por sí mismo cuando se salga de viaje, con la información obtenida se calculará el ángulo del haz de luz incidente (β).

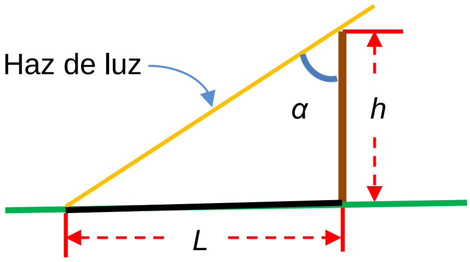


Figura 1.

Una vez obtenida la segunda medición, se determinará la distancia (d) entre los dos puntos geográficos utilizando software o una aplicación, como Google Maps, por ejemplo.

Conociendo la distancia entre los dos puntos de medición y suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta, y considerando los ángulos que forma la sombra (α y β), se determinará el ángulo de las rectas que se prolongan hasta el centro del planeta (θ) -Figura 2[8]-.

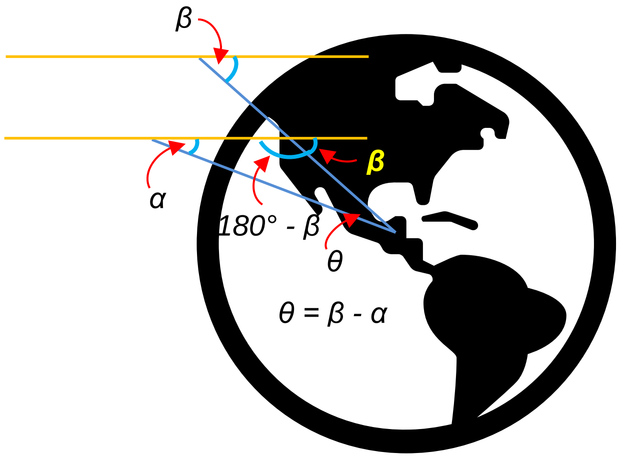


Figura 2.

Conociendo el valor de θ y la distancia de separación entre los puntos geográficos, mediante regla de tres se será posible determinar la magnitud de la circunferencia terrestre (C). Es decir:

$$C \quad \rightarrow \quad 360°$$

$$d \quad \rightarrow \quad \theta$$

$$C = \frac{360° \times d}{\theta}$$

La precisión en la medición realizada por Eratóstenes sigue siendo algo que sorprende, pues se basa en geometría elemental. Ptolomeo y Cristóbal Colón también realizaron una estimación de la circunferencia de la Tierra, pero sus cálculos quedaron muy lejos del resultado obtenido por Eratóstenes, de hecho, el resultado obtenido por Colón tenía un error de 16 000 km, el desafortunado error permitió el descubrimiento de América.

Si comparas el resultado de la medición realizada con el valor obtenido mediante satélites, ¿qué podrías decir con relación a la precisión de la circunferencia calculada?

[8] Ilustraciones desarrolladas con el banco y herramientas de imágenes de Microsoft Word.

5. Midiendo sin tocar y sin ver (Estadística)

Contexto:

A veces se tiene que recurrir a algo más que los sentidos simples para determinar la forma y el tamaño de algunos objetos, para conocer las dimensiones del átomo y las partículas que lo constituyen, los físicos hicieron chocar partículas contra el núcleo de los átomos, así, sin poder ver de forma directa los núcleos, pero analizando el efecto de los choques, pudieron estimar su tamaño.

Objetivo:

Determinar el diámetro de una canica analizando el número de choques al lanzar otra canica.

Materiales:

- 10 canicas del mismo tamaño y del mismo color
- una canica del mismo tamaño de las anteriores, pero de diferente color
- Una cinta métrica o flexómetro
- 3 tablas para formar un rectángulo de 60 cm de largo y 50 cm de ancho
- 1 vernier

¿Qué vamos a hacer?

Inicialmente, se deberá construir un rectángulo de tablas cuyo largo será de 60 *cm* (*L*). El rectángulo representará el espesor de la placa de oro que utilizó Niels Bor para estimar el tamaño del núcleo atómico (Figura 1[9]).

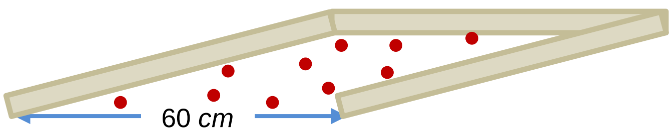


Figura 1.

Dentro del rectángulo distribuye aleatoriamente las 10 canicas, es decir, sin ningún orden en particular, pero distribuidas uniformemente, estas canicas representan núcleos de átomos y las identificaremos como *N*.

La canica de diferente color representará una partícula que se hará chocar con los núcleos, la representaremos con *A*. Esta canica será lanzada aleatoriamente apuntando al rectángulo que contiene las canicas que representan núcleos de átomos, la persona que haga los lanzamientos deberá ser vendada de los ojos para asegurar que no dirija los lanzamientos y deberá hacerlos en diferentes direcciones, pero apuntando siempre al rectángulo.

Se contará cuántas veces la canica *A* chocó (*C*) con alguna de las canicas *N*. En cada lanzamiento solo se contará el primer choque y no cuentan los choques por rebote en las tablas, ni los choques con otras canicas. Si la canica P no choca no ninguna de las 10 canica se registra como no choque (*Nc*).

Para que el resultado esperado sea el que se obtiene, se deberán realizar al menos 200 lanzamientos (*l*).

[9] Ilustración desarrollada con la herramienta de imágenes de Microsoft Word.

Registra el resultado obtenido en la siguiente tabla:

Número de intentos (*I*)	Choques (C)	No choques (Nc)

La probabilidad de que la canica *A* choque con una canina *N* dependerá del tamaño de estas, si la canica es muy grande, la probabilidad de choque se incrementa, pero esta probabilidad depende también del número de canicas dentro del rectángulo. En términos de una relación matemática podríamos expresar la probabilidad (*P*) de la siguiente manera:

$$P = \frac{Ancho\ de\ la\ trayectoria}{Ancho\ de\ la\ canica}$$

El ancho de la trayectoria es el doble del radio de la canica *N* más el radio de la canica *A* (Figura 2[10]). Debido a esto:

$$P = \frac{2R + 2r}{L} = \frac{2(R + r)}{L}$$

En donde: R = el radio de *N*; r = el radio de *A*; *R* + *r* = la distancia entre los centros de *N* y *A* que se tocan y L = anchura del área del blanco (60 *cm*).

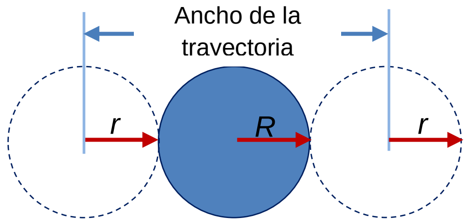


Figura 2.

Si el número de canicas *N* se incrementa a *n*, la probabilidad de choque aumentará. La probabilidad de que *A* golpee a una de la *n* canicas *N* es:

$$P = \frac{2n(R + r)}{L}$$

La probabilidad de acertar un choque puede determinarse experimentalmente, y es la razón entre el número de choques y el número de intentos.

$$P = \frac{C}{I}$$

Donde: *C* = número de choques e I = número de intentos

Considerando las dos primeras para calcular la probabilidad de un choque, estas se pueden igualar. Si los radios de *N* y *A* son iguales, entonces:

$$R + r = D$$

Donde *D* es el diámetro de las canicas. Así:

$$D = \frac{CL}{2nI}$$

Con esta ecuación podrás calcular el diámetro de las canicas *N*.

---

[10] Ilustración desarrollada con la herramienta de imágenes de Microsoft Word.

D = _______________ (Medición indirecta)

Utilizando el vernier mide el diámetro de las 10 canicas *N* y registra los datos obtenidos, obtén el valor promedio del diámetro medido directamente. Registra los datos en la siguiente tabla.

Canica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D (*cm*)										

D promedio = _______________ (medición directa)

Si se compara el resultado del diámetro estimado indirectamente y el medido directamente. ¿Qué diferencia porcentual hay entre estas dos formas de medir?

¿A qué podríamos atribuir una diferencia significativa entre ambos resultados?

¿Cómo se podría mejorar el resultado obtenido por la medición indirecta?