

# CONTROL DE VIBRACIONES EN VIGA EMPOTRADA SOMETIDA A EXCITACIONES ARMÓNICAS \*

Ricardo Yañez-Valdez<sup>†</sup>    Reyes López Esau<sup>‡</sup>    Hernández Pérez Victor<sup>§</sup>  
Arconada Rey Germán R.<sup>¶</sup>

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

## ABSTRACT

En el presente documento se describe el control de vibración de un motor con desbalance rotatorio anclado en una viga en voladizo con algunos métodos importantes de control. En particular aquí se utiliza el método de aislamiento y absorbedor de vibración. En el desarrollo se da a conocer los fundamentos teóricos matemáticos, utilizando un sistema de masa-resorte sin amortiguamiento, también se describe el comportamiento de una máquina rotatoria, la aplicación y la importancia que tiene en el área industrial. Mediante un prototipo se demuestra el control de vibración con los dos métodos mencionados y se presentan los resultados tanto experimental como teóricamente mediante las formulas descritas en este documento.

*Palabras Clave.- Absorbedor, Aislador, Control de la vibración, Desbalanceo.*

## I. INTRODUCCIÓN

Las vibraciones indeseables son aquellas que producen molestia o riesgo a las personas, causan daño o fallas en las estructuras, deterioran la ejecución o funcionamiento de maquinaria y procesos.

En un entorno industrial hay muchas fuentes de vibración; maquinaria rotatoria o reciprocante, compresores y motores eléctricos, vehículos de transporte como camiones, trenes, y aviones, el flujo de fluidos y muchas otras cosas. A veces la presencia de vibración provoca desgaste excesivo de rodamientos, formación de grietas, aflojamiento de sujetadores, fallas estructurales y mecánicas, mantenimiento frecuente y

---

\*Este es un documento que resume la experiencia adquirida por estudiantes de la Facultad de Ingeniería en el análisis de vibración. Esto como parte de un proyecto de la materia de vibraciones mecánicas impartida en el semestre 2018-1.

<sup>†</sup>Profesor de la Facultad de Ingeniería de la DIMEI-UNAM. (*ryv77@unam.mx*).

<sup>‡</sup>Estudiante de intercambio de la carrera de Ing. Mecánica. (*esau.reyes\_l@hotmail.com*)

<sup>§</sup>Estudiante de intercambio de la carrera de Ing. Mecánica. (*vichp.ab23@gmail.com*)

<sup>¶</sup>Estudiante de maestría en Ing. Mecánica de la FI-UNAM. (*arconadarey@outlook.com*)

costoso, fallas electrónicas por la ruptura de juntas soldadas y abrasión del aislamiento alrededor de conductores eléctricos. En ocasiones se puede eliminar la vibración con base en el análisis teórico. Sin embargo, los costos de manufactura implicados en la eliminación de la vibración pueden ser demasiado elevados. Además la exposición ocupacional de humanos a la vibración produce dolor, incomodidad e ineficiencia. De aquí surge el control de vibraciones, que se refiere a los métodos para eliminar o reducir las fuerzas dinámicas que provocan las vibraciones.

Los métodos de control más importantes son: 1) Control de las frecuencias naturales del sistema bajo excitaciones, para evitar la resonancia; 2) Introducción de un mecanismo disipador de energía o amortiguamiento, para impedir la respuesta excesiva del sistema; 3) Uso de aisladores de vibración, para reducir la transmisión de las fuerzas de excitación; y 4) Adición de absorbedor de vibraciones, para reducir al respuesta del sistema [2].

El absorbedor de vibración es un dispositivo mecánico compuesto de otra masa y rigidez anexadas a la masa principal que se debe proteger contra vibraciones, por lo que ambas masas ahora constituyen un sistema de dos grados de libertad. Los absorbedores de vibración se usan comúnmente en máquinas que operan a velocidad constante debido a que se sintonizan a una frecuencia particular. Se manejan dos tipos de absorbedores de vibración: no amortiguados y amortiguados. Los no amortiguados se conforman de una masa y un resorte que se conectan a la masa principal, mientras que a los amortiguados se les agrega un elemento disipador de energía [2].

## II. OBJETIVO

Analizar experimentalmente el diseño de un sistema vibratorio en donde, mediante un absorbedor de vibración, se mitiguen las vibraciones mecánicas en una viga empotrada sometida a excitaciones armónicas.

### III. ANTECEDENTES

Las vibraciones mecánicas son movimientos que se repiten en forma periódica después de un intervalo de tiempo [1]. Un sistema vibratorio es aquel que incluye un medio para almacenar energía potencial (resorte o elemento elástico), un medio para conservar energía cinética (masa o inercia) y un medio para disipar energía (amortiguador). La vibración de un sistema implica la transformación de su energía potencial en cinética y viceversa de manera alternada, sin embargo al incluir un amortiguador parte de su energía se pierde en cada ciclo [2]. La vibración puede ser libre, ninguna fuerza externa actúa en el sistema y se deja que éste vibre por sí mismo después de una perturbación inicial; o forzada, el sistema se somete a una fuerza externa o excitación periódica. Además, la vibración también se puede clasificar como no amortiguada, implica la carencia de un medio disipador de energía en el sistema; y amortiguada, relacionada con sistemas que pierden energía.

El estudio de un sistema vibratorio (Fig. 1) se enfoca en el desplazamiento del elemento de inercia o masa.

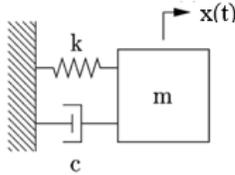


Figura 1. Sistema vibratorio masa-resorte-amortiguador.

A dicho desplazamiento se lo conoce como grado de libertad del sistema. Dependiendo del número de masas o inercias en el sistema será el número de grados de libertad que se tengan. El desplazamiento se puede relacionar con el movimiento oscilatorio más común, que es el movimiento armónico:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

donde  $x$  es el desplazamiento de la masa  $m$  (en el tiempo  $t$ ).  $A$  es la amplitud,  $\omega$  es la frecuencia angular a la que oscila la masa y  $\phi$  es el ángulo de fase [3].

Los primeros usos reportados de absorbedores de vibración se remontan a 1883 y 1909, destacando sus aplicaciones en la estabilización de buques y disminución de la vibración en motores de combustión interna [4]. Así mismo, desde hace décadas, se han utilizado absorbedores para minimizar oscilaciones de edificios altos [5]. En la actualidad, las aplicaciones de los absorbedores de vibración son variadas. Se ocupan en máquinas para operaciones de torneado en donde se coloca el absorbedor en contacto con la herramienta de corte [6]; también tienen presencia en mecanismos de péndulo invertido

(Fig. 2) [7], y en vigas sometidas a excitaciones armónicas [8, 9].

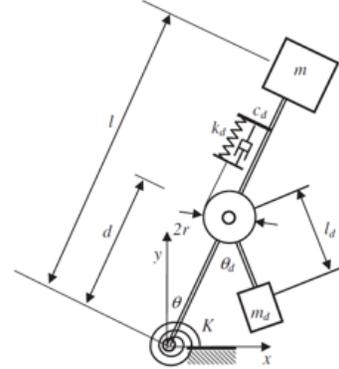


Figura 2. Estructura de péndulo invertido con absorbedor de vibración amortiguado [7].

Cuando se coloca un absorbedor de vibración a una estructura continua tal como una viga, la vibración sólo puede eliminarse en el punto de fijación de la viga que está vibrando, mientras que en otras partes de ella puede producirse una amplificación de la vibración, por lo que algunos estudios se centran en encontrar la región donde se controla la amplitud de la vibración con estos absorbedores [10].

La necesidad de reducir las vibraciones en vigas surge a raíz de construir edificios y estructuras capaces de resistir movimientos ocasionados por sismos, viento y otras perturbaciones (Fig. 3). El pionero en el estudio de los absorbedores de vibración en vigas fue Young en 1955 [11]. Algunos autores han estudiado absorbedores de vibración en vigas para diferentes casos, como vigas doblemente empotradas [12], viga sobre viga con empotramiento [13] y vigas en voladizo [14, 15], todos estos consideran el diseño y modelado de sistemas tales que reduzcan vibraciones debidas al fenómeno de resonancia inducida por excitaciones periódicas y exponenciales ubicando el absorbedor justo donde se aplica la carga o a una cierta distancia de ésta.

Resulta común encontrar máquinas que están apoyadas sobre una base que se puede modelar como una viga en voladizo. Algunos ejemplos son los ventiladores de hogar y los turbo-reactores en las alas de los aviones. En estos casos cualquier tipo de desbalance en los mecanismos rotatorios ocasiona una excitación del tipo armónica que hace vibrar a toda la estructura de soporte y una manera de controlar este fenómeno es anexando un absorbedor de vibración.



Figura 3. Absorbedor de vibración del edificio Taipei 101, Taiwan.

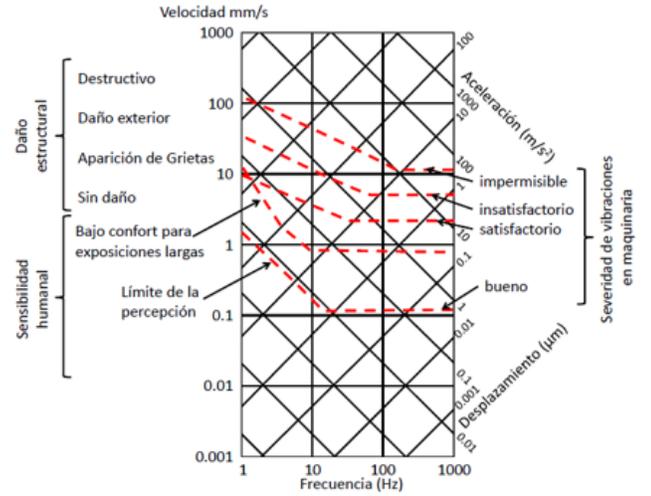


Figura 4. Nivel de vibración permisible (RMS).

## IV. MARCO TEÓRICO

### NIVELES ACEPTABLES DE VIBRACIÓN

Para diseñar un componente en términos de su respuesta vibracional, se debe establecer claramente cuál es la respuesta deseada. Se debe definir con claridad antes del diseño, si el criterio se establece en términos de desplazamiento, velocidad, o aceleración y exactamente como se deben medir estos. Estas opciones dependen en su mayoría de la aplicación específica. Por ejemplo, en la práctica es generalmente aceptado que la mejor indicación para posible daño estructural es la amplitud de la velocidad de la estructura, mientras que la aceleración es la más perceptible por los humanos. En la siguiente tabla se muestran algunos rangos usuales de frecuencias y desplazamientos para vibraciones.

	Frecuencia (Hz)	Amplitud (mm)
Vibración atómica	$10^{12}$	$10^{-7}$
Límite de percepción humana	1-8	$10^{-2}$
Vibración de maquinaria	10-100	$10^{-2}$ a 1
Vaivén de edificios altos	1-5	10 a 100

Se han propuesto diferentes métodos para medir y describir niveles aceptables de vibración. La ISO (International Organization for Standardization) entrega un estándar de niveles de vibraciones aceptables. Estos estándar están dados en términos del valor rms (root mean square) de la señal.

Una forma conveniente de describir los niveles de vibración aceptable es a través de gráficos como el de la figura siguiente.

Los niveles aceptables de vibración se suelen especificar en función de la respuesta de un sistema no amortiguado de un solo grado de libertad sujeto a vibración armónica. Los límites se muestran en la gráfica, llamada nomógrafo de vibración, la cual muestra las vibraciones de las amplitudes de desplazamiento, velocidad y aceleración con respecto a la frecuencia de vibración.

### DESBALANCE ROTATORIO

Una fuente usual de vibraciones son los equipos rotatorios. Pequeñas irregularidades en la distribución de la masa de un componente rotatorio puede causar altas vibraciones. Esto se conoce como desbalance rotatorio. En la figura se ilustra un esquema de sistema con un desbalance rotatorio de masa  $m_0$  y distancia desde el centro de rotación  $e$  (excentricidad).

Las fuerzas de entrada que excitan el movimiento vibratorio se originan a menudo por el desbalanceo en la rotación. Tal desbalanceo en la rotación existe si el centro de masa del cuerpo rígido rotatorio y el centro de rotación no coinciden. Supóngase que el rotor está girando a una velocidad constante  $\omega$  y que la masa desbalanceada  $m$  está localizada a una distancia  $r$  del centro de rotación. La masa desbalanceada producirá una fuerza centrífuga de magnitud  $m\omega r$ .

El desbalance o desequilibrio es la no coincidencia del centro de gravedad con el centro de giro, que al girar induce una fuerza centrífuga no compensada que rota a la velocidad de giro. Cuando el sistema rotativo es esbelto el desbalance puede ser de los siguientes tipos:

- Desbalance estático: los ejes son paralelos, de manera que el centro de gravedad no está en el eje de giro.
- Desbalance de par: el eje central principal intercepta

con el eje de giro en el centro de gravedad del rotor, se produce un efecto de par.

- Desbalance cuasi-estático: el eje central principal intercepta al eje de rotación pero no en el centro de gravedad del rotor.
- Desbalance dinámico: es el caso más común, combinación de los anteriores en que los ejes no se cruzan y están en cualquier posición en el espacio.

## DESBALANCE ROTATORIO

Se muestra el modelo de una máquina rotatoria de un grado de libertad, soportada por una base con elasticidad  $k$  y amortiguamiento  $c$ .

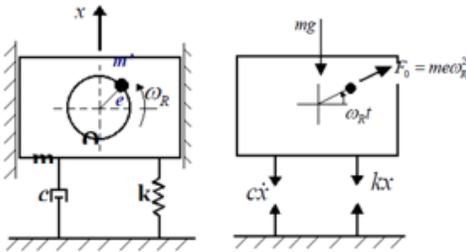


Figura 5. Máquina rotatoria.

La frecuencia de rotación del equipo se denomina por  $\omega$ . Por suma de fuerzas omitiendo el amortiguador se tiene la siguiente ecuación de movimiento;

$$M\ddot{x} + kx = -m_0\ddot{x}_r \quad (2)$$

Donde  $x_r$  es la coordenada en  $x$  del desbalance con respecto al centro de rotación y se calcula como  $x_r = e \sin(\omega t)$ . Reemplazando en la ecuación de movimiento;

$$M\ddot{x} + kx = m_0 e \omega^2 \sin(\omega t) \quad (3)$$

La solución particular es de la forma;

$$X_p = C \sin(\omega t) \quad (4)$$

Donde

$$C = \frac{F_0}{k - M\omega^2} = \frac{\delta_{est}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (5)$$

con  $F_0 = m_0 e \omega^2$ , y  $\delta_{est} = \frac{F_0}{k}$  indica la desviación de la masa bajo la fuerza  $F_0$  y en ocasiones se conoce como deflexión estática porque es una fuerza constante (estática).

La amplitud máxima  $C$  representa la relación de la amplitud de movimiento dinámico con la amplitud de movimiento estática y se conoce como factor de amplificación o relación

de amplitud. La variación de la amplitud con la relación de frecuencia  $r$  se muestra en la Fig. 6.

$$\frac{X}{\delta_{est}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (6)$$

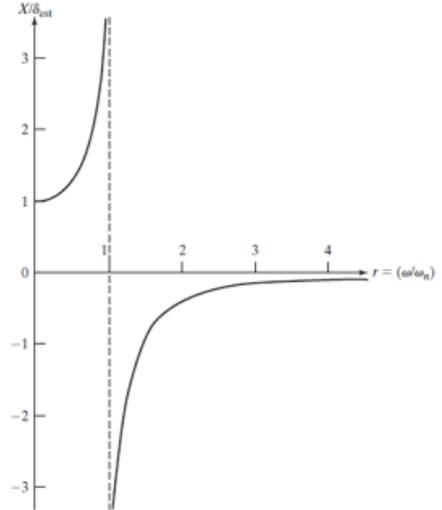


Figura 6. Factor de amplificación de un sistema no amortiguado.

El problema de desbalance rotatorio se puede ver también en el caso de un automóvil con una rueda desbalanceada. En donde, viene dado por la velocidad del auto y  $e$  por el diámetro de la rueda. La deflexión  $X_p$  se transmite por la dirección y se siente como una vibración del volante. Esto ocurre usualmente a una cierta velocidad (cerca a  $r = 1$ ). Si el conductor aumenta o reduce la velocidad, la vibración del volante se reduce.

## TRANSMISIBILIDAD O FUERZA TRANSMITIDA DE UN DESBALANCE ROTATORIO

La transmisibilidad es una medida de la reducción de la fuerza transmitida o del movimiento producido por un aislador. Si la fuente de vibración es una fuerza vibratoria debida al desbalanceo de la máquina (excitación por fuerza), la transmisibilidad es la relación de la amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación con respecto a la amplitud de la fuerza de excitación. Si la fuente de vibración es un movimiento vibratorio de la cimentación (excitación por movimiento), la transmisibilidad es la relación entre la amplitud de la vibración de la máquina y la amplitud de la vibración de la cimentación.

## TRANSMISIBILIDAD POR LA FUERZA DE EXCITACIÓN

En el sistema rotatorio mostrado anteriormente, la fuente de vibración es una fuerza vibratoria resultante del desbalanceo de la máquina. La transmisibilidad en este caso es la relación de amplitudes de las fuerzas y está dado por

$$\text{Transmisibilidad} = TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{\text{amplitud de la fuerza transmitida}}{\text{amplitud de la fuerza de excitación}}$$

La fuerza de excitación (en la dirección vertical) se origina por la masa desbalanceada de la máquina y es:

$$P(t) = m\omega^2 r \sin(\omega t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (7)$$

La ecuación de movimiento del sistema:

$$M\ddot{x} + kx = P(t) \quad (8)$$

La fuerza transmitida a la cimentación es la suma de las fuerzas del amortiguador y el resorte;

$$f(t) = c\dot{x} + kx = F_t \sin(\omega t) \quad (9)$$

Aplicando la transformada de Laplace de las ecuaciones para valores pequeños de la relación de amortiguamiento  $\zeta$  y la relación de frecuencia  $r > 1$ , la transmisibilidad de fuerza, para un sistema de vibración forzada no amortiguada se puede aproximar como:

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{1}{|1 - r^2|} \quad (10)$$

Como  $F_0 = m\omega^2 r$ , la amplitud de la fuerza transmitida a la cimentación es:

$$F_t = \frac{m\omega^2 r}{|1 - r^2|} \quad (11)$$

En la Fig. 7 se grafica la razón de transmisibilidad para distintos valores de la razón de amortiguamiento y razón de frecuencias  $r$ . Mientras mayor es el valor de  $TR$  mayor es el desplazamiento de la masa. Estas curvas son útiles en el diseño de aisladores de vibración. Se puede ver en la figura que el aislamiento ocurre solo cuando  $r$  es mayor a  $\sqrt{2}$ . En la zona de aislamiento, mientras menor sea el factor de amortiguación menor es  $TR$  y mejor es el aislamiento. Se debe notar también que en la zona de aislamiento, mientras mayor es  $r$  menor es  $TR$ , es equivalente a aumentar la masa o reducir la rigidez del aislamiento.

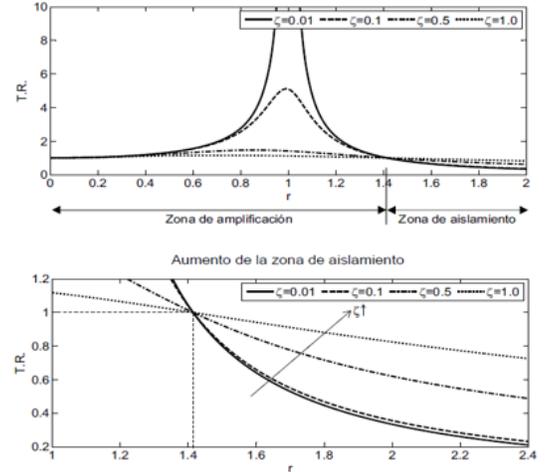


Figura 7. Indicadores de aislamiento.

## MÉTODOS DE CONTROL DE VIBRACIÓN

### AISLAMIENTOS DE VIBRACIONES

El aislamiento de la vibración es un proceso mediante el cual los efectos de la vibración se hacen mínimos o se eliminan. La función de un aislador de vibración consiste en reducir la magnitud de la fuerza transmitida de la máquina a su cimentación o reducir la magnitud del movimiento transmitido de una cimentación vibratoria a la máquina.

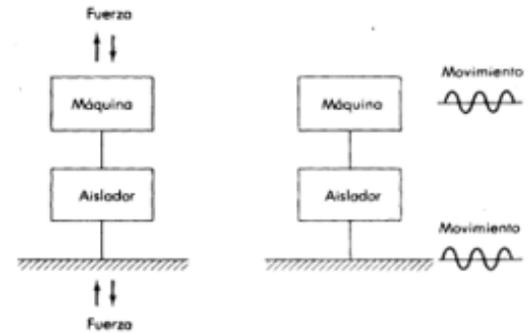


Figura 8. Aislador de vibración.

La forma más efectiva de reducir vibraciones no deseadas es detener o modificar la causa de las vibraciones. Si esto no se puede realizar, es a veces posible diseñar un sistema aislador de vibraciones para aislar la causa de las vibraciones del sistema o componente de interés. Esto se puede realizar mediante el uso de materiales con alto amortiguamiento, como la goma, para cambiar la rigidez y amortiguación entre la causa de las vibraciones y el componente que necesita ser protegido de las vibraciones.

La herramienta utilizada para diseñar aislador de vibración es el concepto de transmisibilidad de desplazamiento y fuerza.

El modelo de la base móvil de la izquierda se utiliza en el diseño de aislamiento para proteger al dispositivo del movimiento de la base. El modelo de la derecha se utiliza para proteger el punto de fijación (base) de la vibración de la masa.

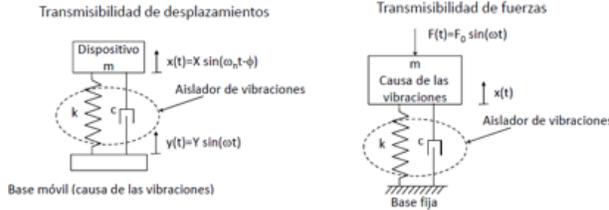


Figura 9. Causa de las vibraciones.

Para lograr el aislamiento, la fuerza transmitida al cimiento tiene que ser menor que la fuerza de excitación. En la figura que se muestra se ve que la frecuencia forzada tiene que ser mayor que  $\sqrt{2}$  veces la frecuencia natural del sistema para lograr el aislamiento de vibración.

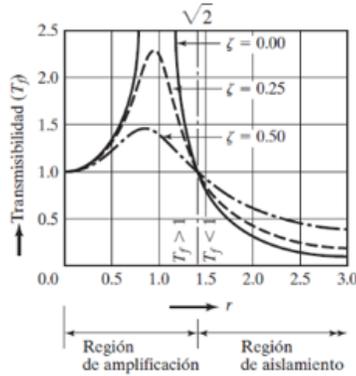


Figura 10. Variación de la relación de transmisión.

## ABSORBEDOR DE VIBRACIONES

Otra opción para proteger a un componente de vibraciones armónicas a una frecuencia constante es un absorbedor dinámico de vibraciones. A diferencia del aislador de la sección anterior, un absorbedor dinámico consiste en un segundo sistema masa-resorte que se añade al componente principal para evitar que vibre. El efecto mayor de añadir un segundo sistema masa-resorte es cambiar el sistema de un grado de libertad a un sistema de dos grados de libertad. El nuevo sistema tiene dos frecuencias naturales. El sistema masa-resorte añadido se denomina absorbedor. Los parámetros del absorbedor (masa y rigidez) se eligen de manera que el movimiento del componente original este en un mínimo. Esto

se acompaña con un movimiento sustancial del sistema absorbedor.

Los absorbedores son usualmente utilizados en máquinas que funcionan a una velocidad constante, porque el absorbedor de vibración se sintoniza a una frecuencia particular y es efectivo sólo dentro de una banda angosta de frecuencias algunos ejemplos son lijadoras, compresores, cortadoras eléctricas, sierras, compactadoras, así como grandes motores de combustión interna recíprocos los cuales funcionan a velocidad constante (para un consumo mínimo de combustible).

Sin un absorbedor de vibración, las fuerzas recíprocas desbalanceadas podrían hacer que el dispositivo fuera imposible de mantener o controlar. Los absorbedores de vibración también se utilizan en líneas de transmisión de alto voltaje. El absorbedor de vibración dinámico se diseña de modo que las frecuencias naturales del sistema resultantes se alejen de la frecuencia de excitación.

Las ecuaciones de movimiento de las masas  $m_1$  y  $m_2$  son:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F_0 \sin(\omega t) \quad (12)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \quad (13)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  es la excitación armónica aplicada sobre la masa principal. Se desea diseñar el absorbedor de manera que el desplazamiento de la masa principal sea el menor posible para el caso estacionario.

A diferencia de la técnica de análisis modal utilizada anteriormente, aquí se requiere determinar la solución en términos de los parámetros del sistema ( $m_1$ ,  $k_1$ ,  $m_2$  y  $k_2$ ). Para esto la solución estacionaria de la forma:

$$x_1(t) = X_1 \sin(\omega t) \quad (15)$$

$$x_2(t) = X_2 \sin(\omega t) \quad (16)$$

Sustituyendo estas soluciones estacionarias en la ecuación de movimientos

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sin(\omega t) = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\omega t) \quad (17)$$

Obtenemos las amplitudes de estado estable de las masas  $m_1$  y  $m_2$  como;

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2\omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \quad (18)$$

$$X_2 = \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} \quad (19)$$

Nos interesa sobre todo reducir la amplitud de la máquina  $X_1$ . Para reducir a cero la amplitud de  $m_1$ , el numerador de la ecuación 18 debe hacerse igual a cero. Esto entrega;

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (20)$$

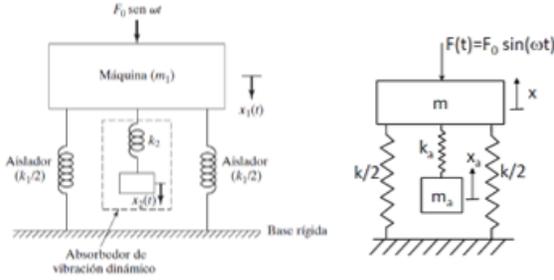


Figura 11. Absorbedor dinámico no amortiguado.

Si la máquina, antes de la adición del absorbedor dinámico, opera cerca de su resonancia,  $\omega^2 \approx \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}$ . Por lo tanto, el absorbedor se diseña de modo que

$$\omega^2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \quad (21)$$

La amplitud de vibración de la máquina, mientras opera a su frecuencia resonante original será cero. Definiendo;

$$\delta_{est} = \frac{F_0}{k_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad (22)$$

Como la frecuencia natural de la máquina o sistema principal, y

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (23)$$

Ya que la frecuencia natural del absorbedor o sistema auxiliar, las ecuaciones de  $X_1$  y  $X_2$  se pueden reescribir como;

$$\frac{X_1}{\delta_{est}} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (24)$$

$$\frac{X_2}{\delta_{est}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{k_2}{k_1} - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right] - \frac{k_2}{k_1}} \quad (25)$$

La figura 12 muestra la variación de la amplitud de vibración de la máquina  $\left(\frac{X_1}{\delta_{est}}\right)$  con su velocidad  $\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$ . Los dos picos corresponden a las dos frecuencias naturales del sistema compuesto. Como se vio antes,  $X_1 = 0$  en  $\omega = \omega_1$ , la ecuación 25 resulta;

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2} \delta_{est} = -\frac{F_0}{k_2} \quad (26)$$

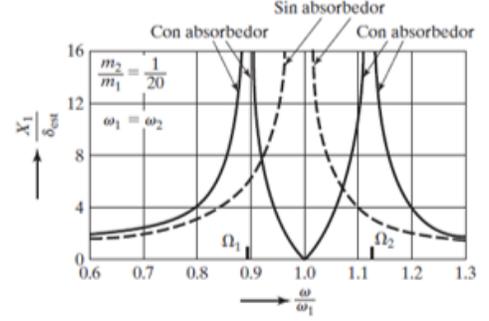


Figura 12. Efecto de un absorbedor de vibración.

Esto demuestra que la fuerza ejercida por el resorte auxiliar es opuesta a la fuerza impartida ( $k_2 X_2 = -F_0$ ) y la neutraliza, y por consiguiente  $X_1$  se reduce a cero. El tamaño del absorbedor de vibración dinámico se determina con las ecuaciones;

$$X_2 = -\frac{k_1}{k_2} \delta_{est} = -\frac{F_0}{k_2} \text{ y } \omega_2 = \frac{k_2}{m_2} = \frac{k_1}{m_1} \quad (27)$$

$$k_2 X_2 = m_2 \omega^2 X_2 = -F_0 \quad (28)$$

Por lo tanto, los valores de  $k_2$  y  $m_2$  dependen del valor permisible de  $X_2$ .

En la Fig. 12 se ve que el absorbedor de vibración dinámico, al mismo tiempo que elimina la vibración a la frecuencia conocida  $\omega$ , introduce dos frecuencias resonantes  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , a las cuales la amplitud de la máquina es infinita. En la práctica, la frecuencia de operación  $\omega$  debe mantenerse por consiguiente alejada de las frecuencias  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ .

## V. PRUEBAS Y RESULTADOS

### SIN CONTROL DE VIBRACIÓN

Considerando el sistema de la Fig. 13.

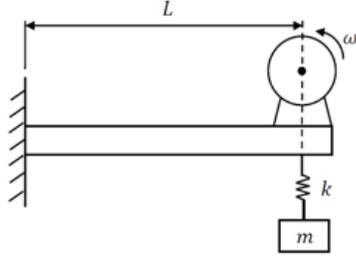


Figura 13. Sistema vibratorio a analizar.

Los datos del sistema "motor con desbalance rotatorio en viga en voladizo" son:

$$\begin{aligned} \text{Masa del motor} &= 45\text{g} = 0.045 \text{ kg} \\ \text{Masa de desbalance} &= 15\text{g} = 0.015 \text{ kg} \\ k_{\text{viga}} &= 196.2 \text{ N/m} \\ \omega &= 200 \text{ rad/s} \\ M &= 0.06 \text{ kg}; m_0 = 0.015 \text{ kg} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k_{\text{viga}}}{M}} = \sqrt{\frac{196.2}{0.06}} = 57.18 \text{ rad/s} \\ r &= 3.3 \text{ cm} = 0.033 \text{ m} \end{aligned}$$

Para obtener la amplitud de vibración forzada, Ec. 5 con  $F_0 = m_0 r \omega^2$

$$F_0 = 0.015 * 0.033 * (200)^2 = 19.8 \text{ N}$$

$$C_{\text{max}} = \frac{F_0}{k_{\text{viga}} - M\omega^2} = \frac{19.8 \text{ N}}{196.2 - 0.06 * 200^2} = 0.009 \text{ m} = 9 \text{ mm}$$

Como la solución transitoria desaparece después de un cierto tiempo, sólo la solución de estado estable permanecerá. Con la Ec. 4 se tiene:

$$X(t)_p = 0.009 \sin(200t)$$

Con la Ec. 10 se puede obtener la transmisibilidad de fuerza:

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{1}{|1-r^2|} = \frac{19.8 \text{ N}}{1 - \left(\frac{200}{57.18}\right)^2} = 1.76 \text{ N}$$

### CON AISLADOR DE VIBRACIÓN

Los datos son similares, se agrega otro elemento de rigidez, un resorte como aislador de vibración.

$$\begin{aligned} k_{\text{viga}} &= 196.2 \text{ N/m} \\ k_{\text{resorte}} &= 200.2 \text{ N/m} \\ \omega &= 200 \text{ rad/s} \\ M &= 0.06 \text{ kg}; m_0 = 0.015 \text{ kg} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k_{\text{viga}} + k_{\text{resorte}}}{M}} = \sqrt{\frac{99.089}{0.06}} = 40.64 \text{ rad/s} \\ r &= 3.3 \text{ cm} = 0.033 \text{ m} \end{aligned}$$

Para obtener la amplitud de vibración forzada Ec. 5 con  $F_0 = m_0 r \omega^2$

$$F_0 = 0.015 * 0.033 * (200)^2 = 19.8 \text{ N}$$

$$C_{\text{max}} = \frac{F_0}{k_{\text{viga}} + k_{\text{resorte}} - M\omega^2} = \frac{19.8 \text{ N}}{99.089 - 0.06 * 200^2} = 8.6 \text{ mm}$$

Como la solución transitoria desaparece después de un cierto tiempo, sólo la solución de estado estable permanecerá. Con la Ec. 4 se tiene:

$$X(t)_p = 0.0086 \sin(200t)$$

Con la Ec. 10 se puede obtener la transmisibilidad de fuerza:

$$TR = \frac{F_t}{F_0} = \frac{1}{|1-r^2|} = \frac{19.8 \text{ N}}{1 - \left(\frac{200}{40.64}\right)^2} = 0.85 \text{ N}$$

La fuerza transmitida con la Ec. 11 es;

$$F_t = \frac{F_0}{|1-r^2|} = \frac{19.8 \text{ N}}{1 - \left(\frac{200}{40.64}\right)^2} = 0.85 \text{ N}$$

### CON ABSORBEDOR DE VIBRACIÓN

Los datos son:

$$\begin{aligned} k_1 &= 196.2 \text{ N/m} \\ k_2 &= 78.48 \text{ N/m} \\ \omega &= 200 \text{ rad/s} \\ m_1 &= 0.06 \text{ kg}; m_2 = 0.008 \text{ kg} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{196.2}{0.06}} = 57.18 \text{ rad/s} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{78.48}{0.008}} = 99.04 \text{ rad/s} \\ X_1 &= \frac{(k_2 - m_2 \omega^2) F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} = 8 \text{ mm} \\ X_2 &= \frac{k_2 F_0}{(k_1 + k_2 - m_1 \omega^2)(k_2 - m_2 \omega^2) - k_2^2} = 3.06 \text{ mm} \end{aligned}$$

La respuesta de la masa principal es;

$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_1 \sin(\omega t) \\ x_p(t) &= 0.008 \sin(200t) \end{aligned}$$

La tabla siguiente resume los resultados.

	Amplitud [mm]	
	Teórico	Experimental
Sin control	9	10
Con aislador	8.6	8
Con absorbedor	8	7

Para ver un video demostrativo, el lector debe referirse a la siguiente liga: <https://youtu.be/-heA8BdXZmM>

## CONCLUSIONES

El control de las vibraciones en la industria y en casi todos los sistemas mecánicos es de gran importancia ya que influye directamente en los costos de operación y mantenimiento de equipos, además como ya se ha mencionado, también ocasiona daños a los recursos humanos y materiales que se encuentran expuestos por largos periodos de tiempo a condiciones de vibración. Es por esta razón que el control de las vibraciones debe tener un tratamiento especial y riguroso dentro de la industria. El proyecto realizado explica dos métodos de control, aunque no son los únicos permiten en condiciones adecuadas mitigar gran parte de las vibraciones indeseables. El desarrollo de este proyecto nos da una visión más amplia del área de aplicación de las vibraciones mecánicas y podemos ver claramente la importancia de controlarlas.

## REFERENCIAS

- [1] W. Seto, "Vibraciones mecánicas", McGraw-Hill.
- [2] S. Rao, "Vibraciones mecánicas", 5<sup>a</sup> ed., Pearson, 2011.
- [3] W. Thomson, "Theory of vibration with", 4th ed., 1996.
- [4] E. Pennestri, "An application of Chebyshev's min-max criterion to the optimal design of adamped dynamic vibration absorber", Journal of Sound and Vibtarion, vol. 217, n. 4, pp. 757-765, 1998.
- [5] J. R. Amyot, "Computer studies of vibration damper for wing-induced motion of a tall building", Laboratory Technical Report, LTR-LA-223, 1979.
- [6] E. C. Lee, C. Y. Niam, Y. S. Tarnng, "Design of a dynamic vibration absorber against vibrations in turning operations", Journal of Materials Procesing Technology, vol. 108, pp. 278-285, 2001.
- [7] N. D. Anh, H. Matshuisa, L. D. Viet, M. Yasuda, "Vibration control of an inverted pendulum type structure by passive mass-spring-pendulum dynamic vibration absorber", Journal of Sound and Vibration, vol. 307, pp. 187-201, 2007.
- [8] J. Dayou, "Fixed-points theory for global vibration control using vibration neutralizer", Journal of Sound and Vibration, vol. 292, pp 765-776, 2006.
- [9] C.P. Cha, "Enforcing nodes at required locations in a harmonically excited structure using simple oscillators", Journal of Sound and Vibration, vol. 279, pp 799-816, 2005.
- [10] W. O. Wong, S. L. Tang, Y. L. Cheung, L. Cheng, "Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading", Journal of Sound and Vibration, vol. 301, pp. 898-908, 2007.
- [11] D. Young, "Theory of dynamic vibration absorbers for beams", Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics, pp 91-96, 1952.
- [12] J. H. Bonsel, R. H. B. Fey, H. Nijmeijer, "Application of a Dynamic vibration absorber to a piecewise linear beam system", Nonlinear Dynamics, vol. 37, n. 3, pp. 227-243, 2004.
- [13] T. Aida, S. Toda, N. Ogawa, Y. Imada, "Vibration control of beams bye beam-type dynamic vibration absorbers", Journal of Engineering Mechanics, vol. 118, n. 2, pp 248-258, 1992.
- [14] R. G. Jacquot, "Optimal dynamic vibration absorbers for general beam systems", Journal of Sound and Vibration, vol. 60, n. 4, pp. 535-542, 1978.
- [15] J. N. Juang, "Optimal design of a passive vibration absorber for a truss beam", American Institue of Aeronautics and Astronautics, vol. 7, n. 6, pp. 733-739, 1984.