

PROBLEMA DE LA CURVA BRAQUISTÓCRONA*

Oscar Morales López[†]

Ricardo Yáñez-Valdez[‡]

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

ABSTRACT

En el siglo XVII Johann Bernoulli propuso un problema para el cual él mismo ya tenía una solución planteada, encontrar una curva que uniera dos puntos por la cual una partícula viajará en el menor tiempo. Si bien existen diferentes aproximaciones para la solución, se estudió el método de Conservación de energía. Para comprobar la eficiencia de la curva en cuestión se estudiaron dos trayectorias más de características peculiares, con el fin de abarcar las posibilidades de naturaleza intuitiva.

Palabras clave: Cicloide, Curva braquistócrona, Demostración experimental.

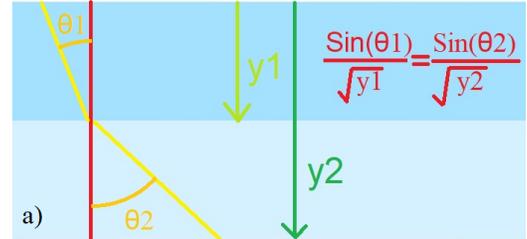
I. INTRODUCCIÓN

En 1696 Johann Bernoulli [1] presentó la solución a un problema para el cual Galileo entregó una solución aproximada pero no cierta del todo en 1638. El problema braquistócrono cuyo nombre proviene del griego Braquistos, que significa "el más corto" y chronos que significa "tiempo", busca una trayectoria que una a dos puntos por los cuales una partícula rueda o se desliza en el menor tiempo con solo la influencia de la gravedad. Bernoulli y Leibniz presentaron el problema a Newton quien lo resolvió en una noche llegando a la conclusión de que la curva era una cicloide. La solución de Galileo fue unir a los puntos con un segmento de circunferencia, aunque era una solución cercana, no era la mejor. Bernoulli comenzó su búsqueda por la curva usando principios de óptica, en específico usando la ley de Snell. Esta ley dice que existe una relación entre el seno del ángulo de refracción con respecto a la vertical y el cuadrado del grosor del material por el que pasa la luz (se muestra en la figura siguiente) y siempre dará un valor constante.

*Este es un resumen de la experiencia adquirida por estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM en la aplicación de las leyes de Newton, tema desarrollado en la materia de "Temas selectos de mecánica aplicada: Mecánica clásica", impartida en el semestre 2019-1 en el posgrado de Ingeniería Mecánica de la UNAM.

[†]Estudiante de posgrado en Ingeniería Mecánica FI-UNAM. (*ing.oscar.m194@gmail.com*)

[‡]Profesor del posgrado en Ingeniería Mecánica de la FI-UNAM (*ryv77@unam.mx*).



a) Ley de Snell. b) Aproximación a la curva con infinitas capas de distintos materiales.

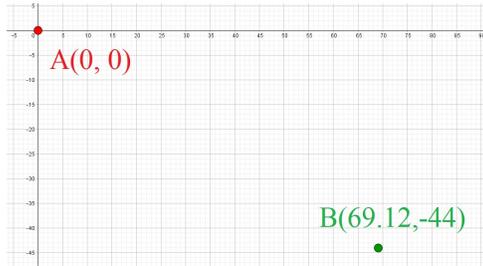
Bernoulli vio que si un rayo de luz pasa por dos materiales diferentes dicho rayo de luz tomará un ángulo diferente que en el material anterior. Planteó un ambiente en el cual hubiera infinitas capas de materiales, ordenados de manera que un rayo de luz viajara más rápido por el siguiente material que en el material anterior. El rayo de luz cambia su dirección en cada material y mientras más materiales hay, el rayo de luz describirá con más resolución una cicloide. De esta manera Bernoulli supo que la solución era una cicloide. A continuación, se muestra el procedimiento para encontrar la cicloide comenzando con conservación de energía, usando el método de las ecuaciones de Lagrange, para finalmente obtener una ecuación diferencial cuyas soluciones describan una cicloide.

II. CONSTRUCCIÓN DE LAS TRAYECTORIAS

LÍNEA RECTA

Una condición que deben cumplir los puntos por los cuales va a viajar un objeto es que el punto B (punto final) no

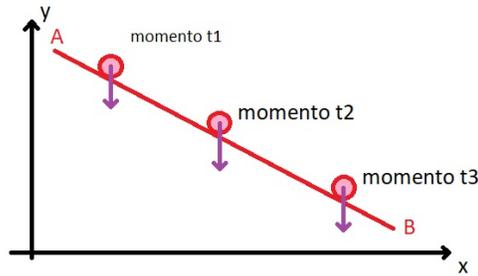
esté directamente debajo del punto A (punto inicial) como se observa en la figura siguiente.



Puntos A y B de la trayectoria.

Esto debido a que, si no se cumple esa condición, el problema se reduce a caída libre. Se compararon tres curvas del punto A al B con características considerablemente distintas, el tiempo que le tomará viajar a un cuerpo del punto A al punto B fue calculado también. Se proponen las coordenadas de los puntos A(0, 0) y B(69.12, -44).

La intuición sugeriría que la trayectoria que garantizaría el menor tiempo es una línea recta, uniendo el destino con el origen. Para calcular el tiempo de trayecto se comienza tomando en cuenta las fuerzas que son ejercidas sobre un cuerpo de masa m en cualquier punto de la trayectoria como se muestra en la figura siguiente.



Cuerpo viajando por la trayectoria recta en cualquier momento.

Por ser el caso recto se sabe que el movimiento del cuerpo tanto en el eje horizontal como en el vertical será movimiento uniformemente acelerado [2], lo cual significa que las ecuaciones de la proyección de la gravedad en cada eje pueden ser descritas de la siguiente manera:

$$a_x = g_x \quad (1)$$

$$a_y = -g_y \quad (2)$$

Al integrar las ecuaciones 1 y 2 con respecto al tiempo obtendremos la velocidad.

$$v_x = \int_{t_0}^t a_x dt = g_x(t - t_0) + v_{x0} \quad (3)$$

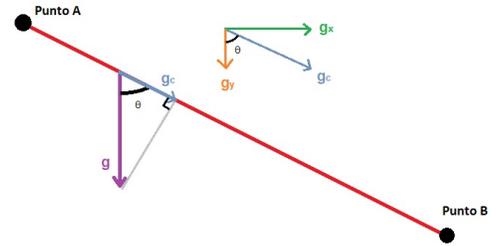
$$v_y = - \int_{t_0}^t a_y dt = g_y(t - t_0) + v_{y0} \quad (4)$$

Como el cuerpo comenzará el trayecto desde el reposo. En el tiempo inicial cero, tanto posición inicial y como velocidad inicial serán nulos. Se integra las ecuaciones 3 y 4 para obtener ecuaciones de posición.

$$S_x = \int_{t_0}^t v_x dt = \frac{g_x}{2} t^2 \quad (5)$$

$$S_y = - \int_{t_0}^t v_y dt = - \frac{g_y}{2} t^2 \quad (6)$$

Los valores de las proyecciones de la gravedad g_x y g_y sobre la recta se obtienen con el ángulo θ (ángulo entre la vertical y la pendiente de la recta) como se muestra en la figura siguiente:



Proyección del vector gravedad sobre la recta.

$$g_x = g_c \sin(\theta) = g \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (7)$$

$$g_y = g_c \sin(\theta) = g \cos(\theta) \sin(\theta) \quad (8)$$

El valor del ángulo θ es constante para toda la recta, esto es;

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{-44}{69.12}\right) = 1.004 \text{ [rad]} = 57.52 \text{ [}^\circ\text{]} \quad (9)$$

Las ecuaciones de posición de la recta dependen del parámetro tiempo "t", al sustituir los valores de las coordenadas del punto B(69.12, -44) [cm] y despejar t, el valor que toma será el tiempo en que tarde el cuerpo en recorrer el trayecto.

$$t = \sqrt{\frac{2S_x}{g_x}} = \sqrt{\frac{2(0.6912)}{4.44}} = 0.558 \text{ [s]}$$

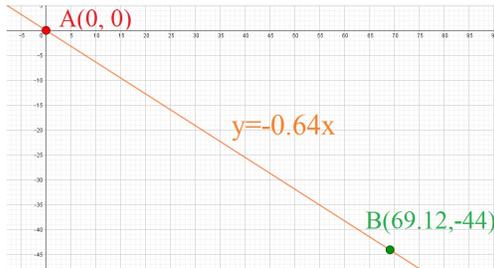
$$t = \sqrt{\frac{2S_y}{-g_y}} = \sqrt{\frac{2(-0.44)}{-2.83}} = 0.558 \text{ [s]}$$

El tiempo $t = 0.558$ [s] es el tiempo en el que tardará el cuerpo en llegar del punto A al punto B. El valor de t tanto de la ecuación de X como de Y es el mismo para cualquier punto de la recta AB por lo que al igualar las ecuaciones y despejar y obtendremos la ecuación de la trayectoria recta.

$$y = \frac{-g_y}{g_x} x = -\cot(\theta) x$$

$$y = -\cot(57.52^\circ)x = -0.637x \quad (10)$$

Con la ecuación de la trayectoria recta se construye la gráfica de la figura siguiente.



Gráfica de la recta $y = -0.637x$.

CURVA BRAQUISTÓCRONA

En el caso de la curva braquistócrona el cálculo comienza haciendo conservación de energías potencial y cinética.

$$U = T \quad (11)$$

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad (12)$$

Despejando la velocidad de 12:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Definiendo a la velocidad como:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (13)$$

Despejando dt e integrando ambos lados de la igualdad:

$$\int dt = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

El diferencial de superficie dS también puede ser expresado como:

$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} = dx\sqrt{(y')^2 + 1}$$

sustituyendo queda:

$$t = \int \frac{dx\sqrt{(y')^2 + 1}}{\sqrt{2gy}} = \int \sqrt{\frac{(y')^2 + 1}{2gy}} dx$$

La función que se busca integrar se renombra y se sustituye en la ecuación de Euler-Lagrange [3]:

$$f = \sqrt{\frac{(y')^2 + 1}{2gy}} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0 \quad (15)$$

Sin embargo, la ecuación f no depende de la variable x por lo que la derivada con respecto a esa variable es nula. Se puede utilizar la identidad de Beltrami [1].

$$f - y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = C \quad (16)$$

Se deriva la ecuación 14 y se multiplica por y' :

$$y' \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = \frac{2y^2}{2\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{2gy}} \quad (17)$$

Se sustituyen las ecuaciones 14 y 17 en 16:

$$\sqrt{\frac{(y')^2 + 1}{2gy}} - \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{2gy}} = C$$

Se realiza la suma y se elevan al cuadrado ambos términos de la igualdad.

$$\begin{aligned} \frac{(1 + y'^2) - y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}\sqrt{2gy}} &= C \\ \frac{1}{(1 + y'^2)(2gy)} &= C^2 \\ (1 + y'^2)(2gy) &= \frac{1}{2gC^2} \\ \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) &= \frac{1}{2gC^2} \end{aligned}$$

Se iguala el término de la derecha de la igualdad a una constante siempre positiva.

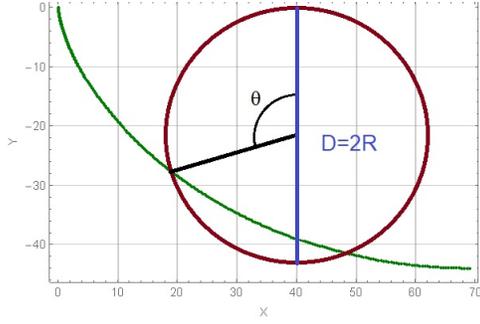
$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{1}{2gC^2} = k^2 \quad (18)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtienen dos ecuaciones paramétricas como solución:

$$x(\theta) = \frac{1}{2}k^2(\theta - \sin(\theta)) \quad (19)$$

$$y(\theta) = \frac{1}{2}k^2(1 - \cos(\theta)) \quad (20)$$

Las ecuaciones solución representan una cicloide, es decir, una curva que puede ser dibujada con un círculo de radio R rotando respecto a una línea y dibujando la trayectoria desde un punto en la circunferencia (figura siguiente). De las ecuaciones de una cicloide se obtiene la equivalencia $k^2 = D$ [4].



Circunferencia dibujando una curva cicloide.

Para que el parámetro de las ecuaciones sea el tiempo t se requiere derivar el diferencial dS con respecto a θ .

$$\frac{dS}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

Se derivan las ecuaciones solución 19 y 20 y se sustituyen en dS .

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= R^2 - 2R^2 \cos(\theta) + R^2 \cos^2(\theta) \\ \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= R^2 \sin^2(\theta) \\ \frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{R^2 - 2R^2 \cos(\theta) + R^2 \cos^2(\theta) + R^2 \sin^2(\theta)} \\ \frac{dS}{d\theta} &= \sqrt{2R^2(1 - \cos(\theta))} = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta)} \end{aligned}$$

De la ecuación obtenida de conservación de energía, ecuación 12, se obtuvo la velocidad v :

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))}$$

Volviendo a derivar dS , en esta ocasión con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{dS}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = R\sqrt{2 - 2\cos(\theta)} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{dS}{dt} &= v = \sqrt{2gR(1 - \cos(\theta))} \end{aligned}$$

Igualando las dos ecuaciones e integrando ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} R\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos(\theta)} \frac{d\theta}{dt} &= \sqrt{2gR}\sqrt{1 - \cos(\theta)} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\sqrt{2gR}\sqrt{1 - \cos(\theta)}}{\sqrt{2R^2}\sqrt{1 - \cos(\theta)}} \\ \int d\theta &= \int \sqrt{\frac{g}{R}} dt \\ \theta &= \sqrt{\frac{g}{R}} t \end{aligned} \quad (21)$$

Al sustituir esta relación ahora las ecuaciones paramétricas dependen del tiempo:

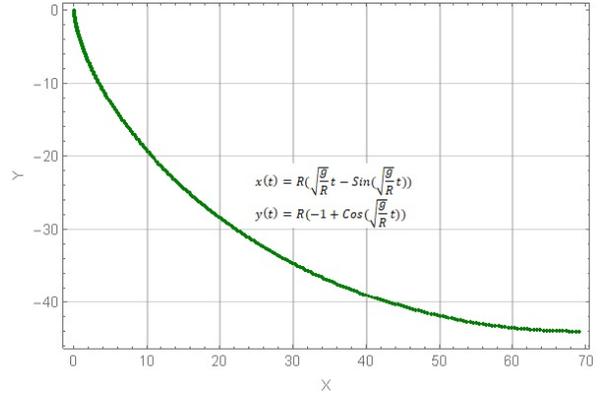
$$x(t) = R \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t - \sin \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \right) \quad (22)$$

$$y(t) = R \left(-1 + \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \right) \quad (23)$$

Al sustituir los valores de las coordenadas del punto B(69.12, -44), se obtiene el tiempo que tarda un cuerpo en caer por la trayectoria calculada:

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{R}{g}} \arctan \left(1 - \frac{y}{R} \right) = \sqrt{\frac{0.22}{9.81}} \arccos \left(1 + \frac{-44}{22} \right) \\ t &= 0.4705 \text{ [s]} \end{aligned}$$

La gráfica de las ecuaciones de la curva braquistócrona se muestra en la siguiente figura.



Gráfica de la curva braquistócrona en función del parámetro tiempo.

CURVA HIPERBÓLICA

La tercera curva que une a los puntos A y B tiene características de naturaleza extrema con respecto a las curvas anteriores. Se buscó que la partícula tuviera una súbita caída del punto A para después avanzar hacia el punto B, se decidió que la forma de esta trayectoria fuera descrita por una hipérbola de ecuación:

$$y + b = \frac{r^2}{x + a} \quad (24)$$

De la cual el valor de r es el radio que amortigua y redirecciona la caída del punto A al B, y el punto (a, b) representa las coordenadas del foco de la hipérbola que hace que coincida con los puntos de interés. El valor de $r = 10$ es propuesto. Los valores de a y b son calculados sustituyendo las coordenadas de los puntos A y B y resolviendo el sistema de ecuaciones como se muestra a continuación:

$$y + b = \frac{100}{x + a}$$

para el punto A(0, 0)

$$(0) + b = \frac{100}{(0) + a} \rightarrow b = \frac{100}{a} \quad (25)$$

Para el punto B(69.12, -44)

$$(-44) + b = \frac{100}{(69.12) + a} \rightarrow b = \frac{100}{69.12 + a} + 44 \quad (26)$$

Sustituyendo 25 en 26:

$$\begin{aligned} b &= \frac{100}{69.12+a} + 44 \\ (b - 44)(69.12 + a) &= 100 \\ (69.12b + ab - 3041.06 - 44a) &= 100 \\ (69.12 \left(\frac{100}{a}\right) - 3041.06 - 44a) &= 0 \\ 6912 - 3041.06a - 44a^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo con la ecuación general:

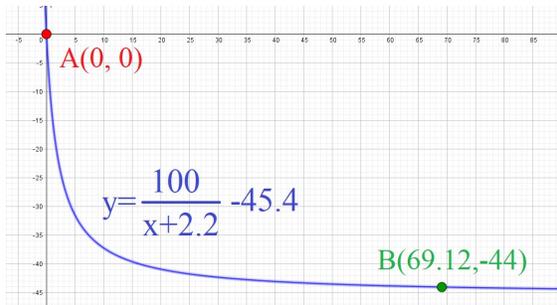
$$\begin{aligned} a &= \frac{-3041.06 \pm \sqrt{(3041.06)^2 - 4(-44)(6912)}}{2(-44)} \\ a1 &= 2.2025 \\ a2 &= -71.318 \end{aligned}$$

Lo que arroja los valores de b:

$$\begin{aligned} b1 &= 45.403 \\ b2 &= 1.402170 \end{aligned}$$

Como se observa en la figura siguiente, el par de coordenadas que generan la hipérbola son (a1, b1) con la siguiente ecuación:

$$y = \frac{100}{x + 2.2} - 45.4 \quad (27)$$



Gráfica de Hipérbola con las coordenadas adecuadas (curva azul).

Para conocer el tiempo que tardará una partícula en caer por la trayectoria hiperbólica hay que hacer que la ecuación 27 esté en función del parámetro tiempo t . Como ya se observó en el caso de la trayectoria recta, no importa que eje se estudie (sea el X o Y), el resultado de t será el mismo para las coordenadas del punto B sin importar cuál de las dos ecuaciones se use, por lo que se estudiará el caso en el eje X.

El cuerpo de masa m cae por la trayectoria en un momento t , el Diagrama de Cuerpo Libre (DCL) se observa en la siguiente figura.

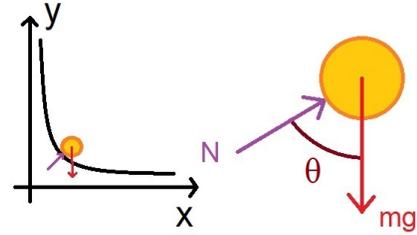


Diagrama de cuerpo libre.

El ángulo θ , a diferencia del caso recto, ya no es constante, se encuentra en función del tiempo, es decir $\theta = \theta(t)$.

Del DCL se lleva a cabo sumatoria de fuerzas en X:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$N_x = ma_x \quad (28)$$

donde:

$$N_x = N \sin(\theta) \quad (29)$$

$$N = mg \cos(\theta) \quad (30)$$

Sustituyendo 30 en 29 para después sustituir 29 en 28;

$$N_x = mg \sin(\theta) \cos(\theta) = ma_x \quad (31)$$

Sustituyendo la siguiente identidad trigonométrica [5] en 31:

$$\sin(\theta) \cos(\theta) = \frac{1}{2} \sin(2\theta) \quad (32)$$

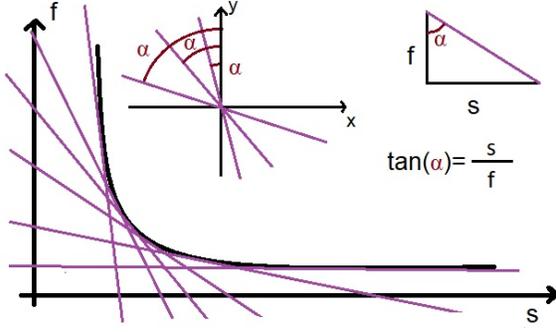
$$\left(\frac{g}{2}\right) \sin(2\theta) = a_x \quad (33)$$

La variable θ es una variable que cambia con respecto a la curva. La derivada de una función representa la pendiente de una recta tangente a la curva en un punto de interés [6]. La recta tangente f es dependiente del parámetro s con pendiente y' .

$$f = \frac{dy}{dx} S = y' s \quad (34)$$

El ángulo de dicha recta tangente con respecto a la vertical es α , como se muestra en la figura siguiente, de la cual se obtiene:

$$\tan(\alpha) = \frac{s}{f} \quad (35)$$



Cambio del ángulo α a lo largo de la curva.

Sustituyendo 34 en 35:

$$\tan(\alpha) = \frac{s}{y's} = \frac{1}{y'} \quad (36)$$

despejando α :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{y'}\right) \quad (37)$$

El ángulo α está relacionado con θ de la siguiente forma:

$$\theta = \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (38)$$

Sustituyendo 38 en 37:

$$\theta = \arctan\left(\frac{1}{y'}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (39)$$

Derivando la ecuación 27 y sustituyendo 28 en 39:

$$y' = \frac{-100}{(x+2.2)^2} \quad (40)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{(x+2.2)^2}{-100}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (41)$$

Sustituyendo 41 en 33:

$$a_x = \left(\frac{g}{2}\right) \sin\left(2 \arctan\left(\frac{(x+2.2)^2}{-100}\right) - \pi\right) \quad (42)$$

Se integra la ecuación 42 para obtener la velocidad en X:

$$v_x = \left(\frac{g}{2}\right) \sin\left(2 \arctan\left(\frac{(x+2.2)^2}{-100}\right) - \pi\right) t \quad (43)$$

Se integra 43 para obtener la ecuación de posición en X:

$$X = \left(\frac{g}{4}\right) \sin\left(2 \arctan\left(\frac{(x+2.2)^2}{-100}\right) - \pi\right) t^2 \quad (44)$$

Por último, se sustituye el valor de la coordenada X=69.12 [cm] en metros y se despeja t .

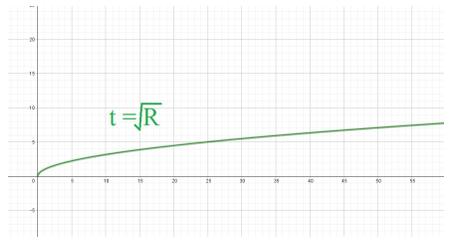
$$t = 0.536 \text{ [s]}$$

III. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Cuando las ecuaciones de la curva braquistócrona están expresadas en términos del parámetro θ (siendo el ángulo de giro de una circunferencia), dicho ángulo siempre toma el valor π al llegar al punto mínimo en la gráfica, es decir, el punto B. Debido a que siempre se cumple con $\theta(\text{punto B}) = \pi$, el tiempo puede ser expresado como:

$$t = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{\pi}{\sqrt{9.81}} \sqrt{R} \simeq \sqrt{R} \quad (45)$$

La gráfica de la función obtenida $t[s]$ (figura siguiente) muestra que mientras el radio $R[m]$ crece, el tiempo que tardará la partícula en caer no dejará de crecer. Sin embargo, crecerá a un ritmo mucho menor que el de R .



Gráfica de la función $t = \sqrt{R}$.

Al obtener las ecuaciones de las diferentes trayectorias trabajadas bajo el parámetro t representando el tiempo, se puede saber cuál es el tiempo que le tomará a una partícula viajar a un punto de interés. Al sustituir en las ecuaciones las coordenadas del punto final y despejar t se obtiene el tiempo para cada trayectoria, los resultados se muestran en la Tabla I.

Trayectoria	Tiempo [s]
Braquistócrona	0.475
Hipérbola	0.536
Recta	0.558

Esto significa que, entre las curvas que unen dos puntos, el caso de la menor distancia (la recta) y la curva con la caída pronunciada (la hipérbola) no provocan la caída de un cuerpo tan rápido como lo hace la curva braquistócrona.

IV. DEMOSTRACIÓN Y POSIBLES APLICACIONES

Para comprobar los resultados obtenidos y demostrar cualitativamente la eficiencia de la curva braquistócrona, se construyó un prototipo con MDF en corte laser siguiendo las tres curvas ya estudiadas. Se cortaron seis placas (dos para cada

curva) para crear rieles por los cuales pueda pasar una bola de vidrio. El resultado se muestra en las figuras siguientes.



Debido a la propiedad principal de la curva braquistócrona [4], esta puede ser ajustada a cualquier situación en la que se requiera que una partícula viaje de un punto a otro en el menor tiempo con sólo la influencia de la gravedad. Se propone llevar a cabo el estudio de la aplicación de esta curva en secciones de una montaña rusa, por ejemplo.

Al estudiar la curva en $\theta = \pi$ se encuentra que la pendiente de la recta tangente es nula, por lo que la llegada de un cuerpo es más suave que en otros casos (como la línea recta). Para esta característica se propone estudiar el manejo de paquetería ya sea en un almacén o en un aeropuerto en donde se manejan objetos frágiles.

Finalmente se propone estudiar la velocidad y aceleración de la curva braquistócrona en diferentes puntos y comparar con las demás curvas con el fin de encontrar peculiaridades. Hay deportes en los que se utilizan rampas, si la velocidad a lo largo de la curva braquistócrona es mayor que las demás entonces se puede aprovechar la geometría en una rampa para obtener mayor momentum lineal. Con fines de entretenimiento se propone la construcción de un prototipo a escala con el propósito de ser un juguete científico para difundir y aclarar el concepto.

CONCLUSIONES

Usando el método de conservación de energía y las ecuaciones de Lagrange, se encontró que la curva que logra que un cuerpo viaje de un punto a otro en el menor tiempo, es la curva braquistócrona. Se construyó un prototipo para demostrar este hecho.

El video de demostración está disponible en el siguiente enlace:

<https://youtu.be/RqzgunaFifA>

REFERENCIAS

- [1] Bijan Kumar Bagchi. (2017). Advanced Classical Mechanics. India. CRC Press. pp. 180-182.
- [2] Beer, Johnston, Cornwell. (2010). Mecánica Vectorial para Ingenieros: Dinámica. USA. McGraw Hill. Segunda Edición.
- [3] Vernon Barger & Martin Olsson. (1995). Classical Mechanics: A modern Perspective. University of Wisconsin Madison. McGraw Hill.
- [4] Mar Levi. (2009). The Mathematical Mechanic. Pennsylvania State University.
- [5] Ana Irene Ramírez. (1999). Trigonometría. Segunda edición. México. Trillas. p. 79.
- [6] Purcell, Varberg, Rigdon. (2007). Calculo diferencial e integral. México, Prentice Hall.