

EL PÉNDULO DOBLE COMO EJEMPLO DE SISTEMA CAÓTICO*

Oscar Morales López[†]

Ricardo Yáñez-Valdez[‡]

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

ABSTRACT

En este resumen se estudian las características más importantes de la teoría del caos. Estas se ejemplifican mediante un sistema mecánico relativamente fácil de reproducir, el péndulo doble. Las características dinámicas de un péndulo doble son afines con los conceptos que definen a un sistema caótico tales como la **sensibilidad a los cambios en las condiciones iniciales**, la **impredecibilidad** y la **no linealidad** en las ecuaciones que lo modelan. Importantes contribuyentes a la mecánica clásica estudiaron previamente el péndulo simple, no solo como un sistema mecánico dinámico, sino como un sistema con propiedades muy versátiles y poco intuitivas a primera vista. este es el punto de partida. Para llevar a cabo el estudio del péndulo doble se abordó su modelado utilizando las ecuaciones de Lagrange. Con este método se obtuvieron ecuaciones diferenciales, las cuales (debido a su naturaleza relativamente complicada con respecto a los sistemas mecánicos comúnmente estudiados en mecánica clásica básica) se resolvieron con métodos numéricos y sistemas computacionales con la paquetería Wolfram Matemática 11.3.

Palabras clave: Caos, Ecuaciones de Lagrange, Péndulo doble, Sistema mecánico.

I. INTRODUCCIÓN

Personajes importantes en la historia de la mecánica clásica como Newton, Galileo y Foucault han estudiado previamente el péndulo simple con la intención de demostrar importantes características en la mecánica. El péndulo de Newton consiste en diferentes masas unidas a una sola tierra por medio de diferentes cuerdas (Fig. 1), cuando una de las masas en el extremo del arreglo se suelta, ésta transmitirá casi toda la cantidad de movimiento a la siguiente masa. De esta forma la cantidad de movimiento se irá transmitiendo por todas las masas hasta llegar al otro extremo.

*Este es un trabajo realizado por estudiantes de posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Es el resultado del desarrollo de un proyecto en la materia "Temas selectos de mecánica aplicada: Mecánica clásica", tema "mecánica no lineal y caos", impartida en el semestre 2019-1 en el posgrado de Ingeniería Mecánica de la UNAM.

[†]Estudiante de posgrado en Ingeniería Mecánica FI-UNAM. (*ing.oscar.m194@gmail.com*)

[‡]Profesor del posgrado en Ingeniería Mecánica de la FI-UNAM (*ryv77@unam.mx*).



Figura 1. Péndulo de Newton.

En 1857 Foucault utilizó el péndulo simple para demostrar la existencia de la rotación de la tierra. Una masa de 28 [kg] suspendida con una cuerda de 67 [m] en la cúpula del panteón de París se balanceo en un plano que, después de 24 horas, giró 240° en sentido de las manecillas del reloj. Esto es más apreciable con un péndulo sujeto a una base giratoria, al girar la base, un espectador que esté en tierra fija verá que el péndulo oscila en el mismo plano todo el tiempo, pero un observador situado en la base giratoria verá al plano de oscilación del péndulo girar, (Fig. 2).

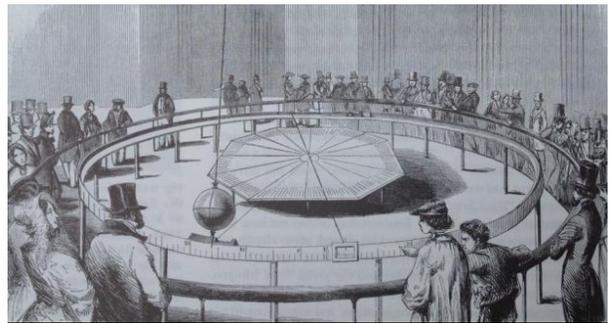


Figura 2. El péndulo de Foucault.

Por último, Galileo estudió el péndulo con el fin de demostrar que, sin importar que un péndulo se balancee hasta que la fricción en sus uniones y la resistencia del aire hagan

que se detenga, el periodo con el cual oscila se mantiene constante, abordando conceptos como frecuencia natural en el campo de las vibraciones mecánicas, (Fig. 3).



Figura 3. El péndulo de Galileo.

Esto significa que a lo largo de la historia se ha utilizado el péndulo simple como un excelente ejemplo al querer demostrar características físicas que no siempre son apreciables a simple vista. En este trabajo se utiliza al péndulo doble para facilitar la demostración de las propiedades que caracterizan al caos. Sin embargo, antes de abordar el caos es importante conocer conceptos como el **determinismo**, la **predecibilidad** y las propiedades que hacen a un **sistema dinámico y caótico**.

II. SISTEMA DINÁMICO CAÓTICO

Al llevar a cabo el modelado de un sistema (para este estudio, un sistema mecánico) y obtener las ecuaciones que describen su movimiento, sin importar la linealidad o no linealidad de éstas, es posible describir casi en su totalidad el estado de dicho sistema en un momento t deseado. A esta propiedad de un sistema se le llama *determinismo* [1], ya que se puede determinar el valor de las coordenadas generalizadas para un momento (o intervalo de tiempo) en específico. Esta característica es propia del sistema, no es relativa con respecto al observador o a la herramienta con la que se resuelven las ecuaciones del sistema, es decir, se refiere a lo que las cosas son en sí mismas.

Por otro lado, existe una propiedad del sistema llamada predecibilidad que, a diferencia del *determinismo*, es relativa con respecto observador y las herramientas que posee para dar solución al sistema, es decir, se refiere a lo que las cosas son para “nosotros”. Es la capacidad de anticipación del

movimiento y los cambios de un sistema conocidas sus condiciones iniciales. El determinismo aborda la existencia de una solución mientras que la predecibilidad tiene que ver con la calculabilidad (o computabilidad numérica) de la obtención explícita de la solución [1].

Un sistema dinámico es aquel que evolucionará con respecto al tiempo, es decir, que tiene una o más propiedades que cambian con el tiempo. Las variables a estudiar en el sistema pueden tener valores diferentes a cero en el momento en que el tiempo t empieza a contarse. A los valores de estas variables se les llama condiciones iniciales y para el sistema en estudio el tiempo $t = t_0$ cuando $t = 0$.

Un sistema dinámico puede ser modelado con ecuaciones de carácter lineal, es decir que no dependen de funciones trascendentales (tales como funciones trigonométricas) que a menudo contarán con soluciones analíticas que darán resultados exactos. Este tipo de soluciones para dichos sistemas tienden a no reaccionar de manera brusca (relativamente hablando) a los cambios en las condiciones iniciales. Esto se explica mejor pensando en un sistema sencillo como un péndulo simple linealizado como se muestra en la Fig. 4.

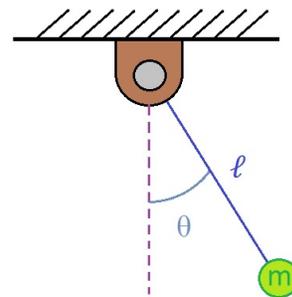


Figura 4. Péndulo simple.

Las condiciones iniciales del péndulo son:

Posición	$\theta(0) = 0.08$ [rad]
Velocidad	$\omega(0) = 0.10$ [rad/s]
Tiempo	t_0

La grafica del movimiento del sistema se muestra en la Fig. 5a . Ahora, al estudiar el mismo sistema con las siguientes condiciones iniciales:

Posición	$\theta(0) = 0.08$ [rad]
Velocidad	$\omega(0) = 0.80$ [rad/s]
Tiempo	t_0

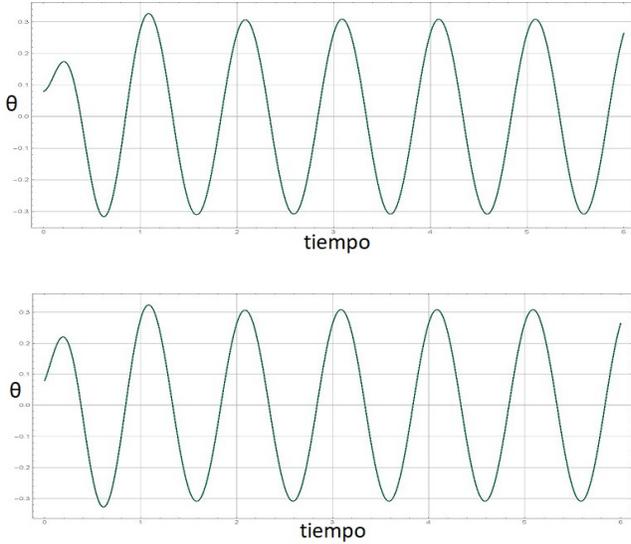


Figura 5. Oscilación del péndulo simple. Condiciones iniciales: (arriba) $\theta(0) = 0.08$ [rad] y $\omega(0) = 0.1$ [rad/s], (abajo) $\theta(0) = 0.08$ [rad] y $\omega(0) = 0.8$ [rad/s].

La gráfica de la Fig. 5b no sufrirá un cambio significativo cualitativamente hablando, de hecho será casi imperceptible. En un sistema modelado por ecuaciones lineales pequeñas causas producen pequeños cambios, mientras que en un sistema no lineal las pequeñas causas producen grandes cambios [2].

El caos es un concepto que popularmente se ha ligado al “desorden”. Sin embargo, la principal característica del caos es la falta de predecibilidad. La tendencia de un sistema dinámico a ser caótico está ligado a dos características especialmente; la no linealidad y la alta sensibilidad a los cambios de las condiciones iniciales [3]. Por lo tanto, el resultado de un sistema caótico al variar las condiciones en el tiempo inicial no es predecible, siendo característico por su impredecibilidad. Uno de los ejemplos más conocidos para introducir el concepto de caos es el péndulo doble. No existe una ecuación analítica que proporcione una solución a las ecuaciones diferenciales no lineales que modelan a un péndulo doble, por lo que se hacen aproximaciones con métodos numéricos tomando valores discretos de la variable tiempo t e interpolando para obtener curvas que tiendan a ser suaves.

Un péndulo simple consiste en una masa acoplada a tierra con la posibilidad de oscilar. Para muchos estudios, el acoplador (representado por una cuerda o un eslabón) es de masa despreciable siendo su longitud la característica que se toma en cuenta en el estudio. El péndulo doble consiste en dos masas unidas por una varilla rígida inextensible y suspendidas por una varilla análoga sujeta a una de las partículas (Fig. 6).

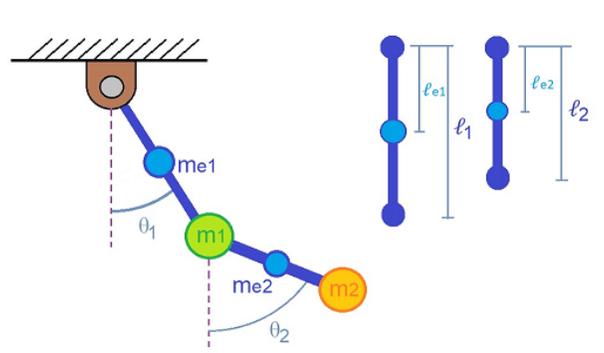


Figura 6. Péndulo doble con eslabones de masa apreciable.

Para este estudio se toman en cuenta las masas de las varillas rígidas que unen las masas entre sí y con tierra, además de las masas oscilantes y la pérdida por fricción en las juntas debida a los rodamientos. Teniendo el modelo analítico de la propuesta de diseño del péndulo doble se hizo una simulación utilizando Wolfram Mathematica 11.3. Se construyó un prototipo con el fin de comparar cualitativamente los resultados de la simulación con lo del prototipo y realizar diferentes eventos con condiciones iniciales “similares” (tan similares como un ser humano sea capaz de repetir) para demostrar que la más ligera variación en éstas generara una trayectoria completamente distinta al evento anterior.

MODELADO

En la Fig. 7 se observa el primer bosquejo del péndulo doble para obtener los parámetros variables y parámetros constantes.

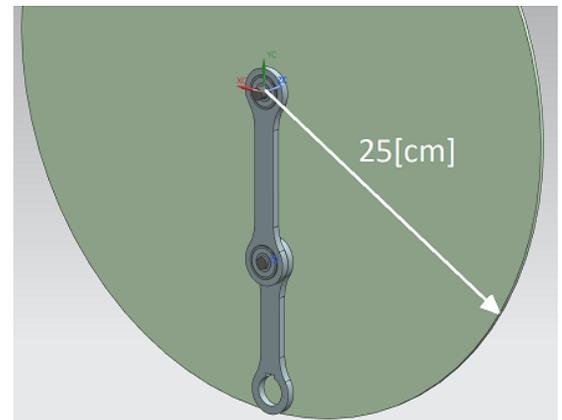


Figura 7. Modelo generado en Siemens NX 10.

Refiriendonos a la Fig. 6 La masa m_1 consiste en la masa de un rodamiento, cuatro rondanas, cuatro tuercas y un eje de acero. La masa m_2 consiste en un porta-pilas, dos pilas de

botón de 3[V], un LED de luz ultravioleta, una resistencia de 110 $[\Omega]$ y un interruptor. Las masas m_{e1} y m_{e2} son las masas de cada eslabón respectivamente, las constantes l_1 y l_2 son las longitudes de los eslabones largo y corto, respectivamente. Las constantes l_{e1} y l_{e2} son las distancias de la tierra hasta el centro de masa del eslabón largo y de la masa 1 al centro de gravedad del eslabón corto, respectivamente.

A. COORDENADAS GENERALIZADAS

Las coordenadas generalizadas para este análisis serán:

$$q_i = \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\dot{q}_i = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{array} \right\} \quad (2)$$

El sistema también puede estar expresado con respecto a las coordenadas cartesianas “ x ” y “ y ” que a su vez pueden estar expresadas con respecto a las coordenadas generalizadas.

Las coordenadas cartesianas que caracterizan el movimiento de las masas m_1 y m_2 son las siguientes:

$$x_1 = l_1 \sin \theta_1 \quad (3)$$

$$y_1 = -l_1 \cos \theta_1 \quad (4)$$

$$x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \quad (5)$$

$$y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \quad (6)$$

Las coordenadas cartesianas para las masas m_{e1} y m_{e2} son:

$$x_{l1} = l_{e1} \sin \theta_1 \quad (7)$$

$$y_{l1} = -l_{e1} \cos \theta_1 \quad (8)$$

$$x_{l2} = l_1 \sin \theta_1 + l_{e2} \sin \theta_2 \quad (9)$$

$$y_{l2} = -l_1 \cos \theta_1 - l_{e2} \cos \theta_2 \quad (10)$$

Se derivan las ec. 3 a 10 con respecto al tiempo para obtener las velocidades de las masas. Esto es:

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (11)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (12)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (13)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (14)$$

$$\dot{x}_{l1} = l_{e1} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (15)$$

$$\dot{y}_{l1} = l_{e1} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (16)$$

$$\dot{x}_{l2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_{e2} \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (17)$$

$$\dot{y}_{l2} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_{e2} \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (18)$$

B. ENERGÍA CINÉTICA, ENERGÍA POTENCIAL Y ENERGÍA PÉRDIDA

La energía cinética del arreglo es la siguiente:

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_{e1} v_{e1}^2 + \frac{1}{2} m_{e2} v_{e1}^2 \quad (19)$$

Donde las velocidades se pueden expresar de la siguiente manera:

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 \quad (20)$$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 \quad (21)$$

$$v_{e1}^2 = \dot{x}_{e1}^2 + \dot{y}_{e1}^2 \quad (22)$$

$$v_{e2}^2 = \dot{x}_{e2}^2 + \dot{y}_{e2}^2 \quad (23)$$

La energía potencial que almacena el sistema será igual a la suma de la energía de cada una de las masas:

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_{e1} g y_{e1} + m_{e2} g y_{e1} \quad (24)$$

Donde g es la aceleración de la gravedad igual a 9.78 $[\text{m/s}^2]$ ¹.

La energía pérdida debido a la fricción de los rodamientos se calcula de la siguiente manera:

$$D = \frac{1}{2} c \theta_1^2 + \frac{1}{2} c (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 \quad (25)$$

Donde el escalar c es el coeficiente de fricción viscosa en los rodamientos, al usar el mismo tipo de rodamientos en ambas juntas el valor es el mismo de 0.0002 $[\text{Ns/m}]$ [4].

¹Valor de la gravedad en Ciudad Universitaria (UNAM).

C. LAGRANGIANO

Las ecuaciones de Lagrange se construyen a partir de las derivadas parciales del lagrangiano con respecto al tiempo y a las coordenadas generalizadas del sistema. El péndulo doble es un sistema de dos grados de libertad (θ_1 y θ_2) por lo que existirán dos ecuaciones de Lagrange (una para cada coordenada generalizada) que deberán satisfacerse al mismo tiempo para modelar el sistema. La ecuación de Lagrange considerando la fricción de los rodamientos en términos de una coordenada generalizada se escribe:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} - \frac{\delta L}{\delta q_i} + \frac{\delta D}{\delta \dot{q}_i} = 0 \quad (26)$$

Así se generan las ecuaciones para cada una de las coordenadas θ_1 y θ_2 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_1} - \frac{\delta L}{\delta \theta_1} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\theta}_1} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}_2} - \frac{\delta L}{\delta \theta_2} + \frac{\delta D}{\delta \dot{\theta}_2} = 0 \quad (28)$$

E. SIMULACIÓN

Las ecuaciones diferenciales fueron escritas en un programa de computo diseñado para resolverlas numéricamente. Los valores constantes se pueden observar en la Tabla 1.

Tabla 1. Valores constantes en el sistema.

Propiedad	Valor
g	9.78 [m/s ²]
m_1	0.0674 [kg]
m_2	0.00804 [kg]
m_{e1}	0.012385 [kg]
m_{e2}	0.0132 [kg]
l_1	0.13 [m]
l_2	0.1 [m]
l_{e1}	0.065 [m]
l_{e2}	0.05 [m]
c	0.0002 [Ns/m]

Para representar a las coordenadas generalizadas como funciones a resolverse con respecto al tiempo se usó la sintaxis $\theta_i[t]$ y para representar la derivada de las coordenadas características se utilizó $\theta'_i[t]$ que por estándares en Wolfram Mathematica 11.3 significa que una variable x' es la variación de x con respecto al tiempo. Las derivadas parciales se llevaron a cabo con la función “ $D[f, x]$ ”. Una vez construidas las ecuaciones de Lagrange se igualaron a cero y se resolvieron con las condiciones iniciales:

$$\theta_1(0) = \pi \quad (29)$$

$$\dot{\theta}_1(0) = 0 \quad (30)$$

$$\theta_2(0) = \pi \quad (31)$$

$$\dot{\theta}_2(0) = 0.10 \quad (32)$$

Estos valores representan sujetar la punta del péndulo hacia arriba, dejándolo caer ligeramente hacia la izquierda. Si las velocidades iniciales fueran nulas entonces el péndulo estaría en equilibrio y no se movería debido a la falta de perturbaciones. La función para la solución fue NDSolve cuya sintaxis requiere el conjunto de ecuaciones diferenciales a resolver, también requiere el conjunto de variables independientes del sistema (en este caso dependientes del tiempo θ_1 y θ_2) y el rango de tiempo en el cual se quiere resolver. Para esta simulación se eligieron 12 segundos.

La Fig. 8 muestra la variación de θ_1 y θ_2 con respecto al tiempo mientras que la Fig. 9 muestra el trayecto de la punta del péndulo (masa 2) con las coordenadas (x_2, y_2) .

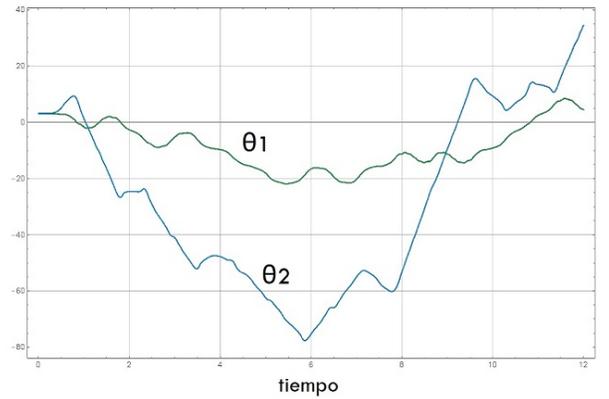


Figura 8. Ángulos θ_1 y θ_2 con respecto al tiempo del evento 1.

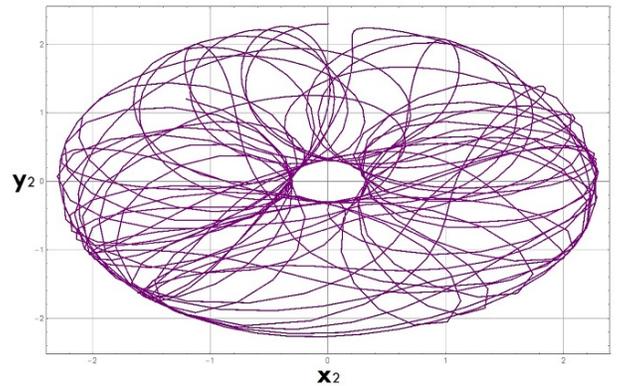


Figura 9. Trayectoria de masa m_2 en evento 1 (coordenadas (x_2, y_2)).

Para el segundo evento, las condiciones iniciales varían un poco, el valor de la velocidad angular del eslabón dos tiene una ligera diferencia de 0.01 [rad/s] con respecto al primer evento (ec 32):

$$\dot{\theta}_2(0) = 0.11 \quad (33)$$

La Fig. 10 muestra la variación de θ_1 y θ_2 con respecto al tiempo del segundo evento y la Fig. 11 muestra el trayecto de la punta del péndulo con las coordenadas (x_2, y_2) .

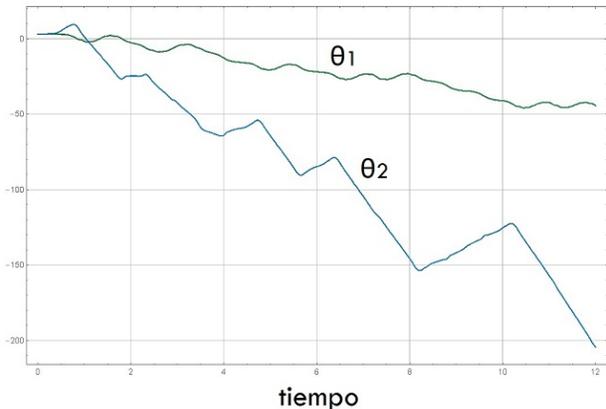


Figura 10. Ángulos θ_1 y θ_2 con respecto al tiempo del evento 2.

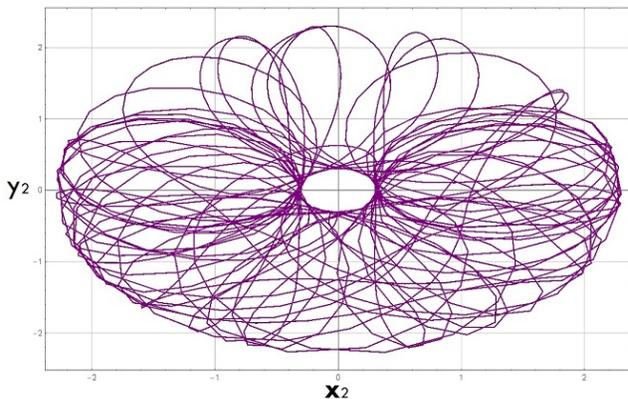


Figura 11. Trayectoria de masa m_2 en evento 2 (coordenadas (x_2, y_2)).

De manera cualitativa se puede observar que las gráficas del segundo evento son diferentes a las del primero. La variación entre las condiciones iniciales de ambos eventos fue relativamente pequeña y los cambios son claramente apreciables.

F. EXPERIMENTO Y RESULTADOS

Para que la trayectoria del prototipo pudiera ser perceptible en todo momento se montó sobre una base blanca de MDF

cubierta con pintura luminiscente. En la punta del péndulo se colocó un circuito que alimenta a un LED ultravioleta de 405 [nm] (Fig. 12).



Figura 12. Circuito.

De esta manera en ambientes con poca iluminación la base se iluminará dejando marcada la trayectoria del LED. La Fig. 13 muestra el prototipo construido.

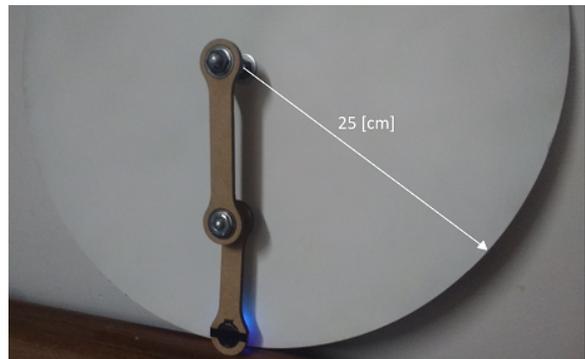


Figura 13. Prototipo del péndulo doble.

Se liberó el péndulo doble con las condiciones iniciales establecidas en ec. 29 a 32. Aunque la posición inicial π [rad] para ambos eslabones es aparentemente fácil de replicar con la mano humana, la realidad es que es muy improbable tener exactamente π [rad] y se vuelve aún más improbable generar una velocidad inicial de 0.1 [rad/s] sin instrumentación adecuada. Estos inconvenientes realmente ayudan al experimento, ya que significa que en los dos eventos que se realizarán existirán condiciones iniciales aparentemente iguales, pero en realidad mantendrán ligeras variaciones (variaciones de error humano). Esta pequeña causa genera un gran cambio.

El resultado de la comparación de los dos eventos (simulación y físico) puede consultarse en un video disponible en el siguiente enlace:

<https://youtu.be/L5yZHnF9HL8>

CONCLUSIONES

El movimiento del péndulo doble se describe al solucionar las ecuaciones diferenciales no lineales que lo modelan, esta solución muestra sensibilidad a los pequeños cambios en las condiciones iniciales dando una trayectoria descrita anteriormente para el primer caso y una trayectoria distinta para el segundo caso. En la simulación, las condiciones con las que comienzan los eventos tienen ligeras variaciones y esto es suficiente para presentar grandes cambios en sus trayectorias. En la experimentación, las condiciones son prácticamente similares en ambos eventos y también es suficiente para que sus trayectorias difieran. Esto quiere decir que el péndulo doble es un sistema dinámico caótico. Al existir una ligera variación en las condiciones iniciales de éste, producirá un cambio significativo en su comportamiento.

REFERENCIAS

- [1] C. M. Madrid Casado, "La equivalencia matemática entre mecánicas cuánticas y la impredecibilidad en la teoría del caos", Universidad Complutense de Madrid, pp. 106-118, 2009.
- [2] C. J. Restrepo Saavedra, "Teoría del caos: Sistemas dinámicos y series de tiempo", Alemania, Editorial Academia Española, pp. 117-120, 2011.
- [3] Ranjit Kumar Upadhyay & Satteruli R. K. Iyengar, "Introduction to Mathematical Modeling and Chaotic Dynamics", CRC Press, pp. 189-192, 2014.
- [4] J. Albarrán Castro, "Diseño, fabricación y control de un péndulo doble", Tesis de licenciatura. Facultad de Ingeniería, pp. 84, 2009.