

# RESONANCIA TORSIONAL: PROBANDO EL FENÓMENO\*

Ricardo Yáñez-Valdez<sup>†</sup>

Oscar Morales López<sup>‡</sup>

Facultad de Ingeniería, DIMEI-UNAM.

## ABSTRACT

En un sistema rotacional es de gran importancia que el centro de masa de un cuerpo coincida con el eje de rotación, si esto no ocurre entonces se dice que el cuerpo está desbalanceado. Cuando un cuerpo desbalanceado gira en un eje elástico se produce vibración que dependerá de la velocidad a la que gire el sistema. Al igualar la velocidad angular de la masa a la velocidad angular natural del sistema, este puede entrar en un efecto conocido como resonancia.

*Palabras clave: Frecuencia natural, Resonancia, Sistema torsional, Vibraciones mecánicas.*

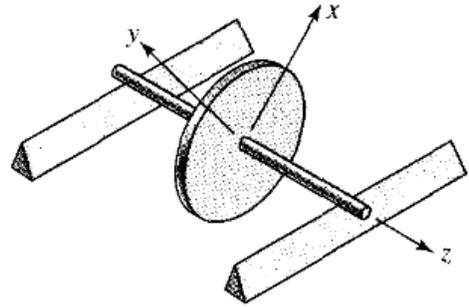


Figura 1.

## I. INTRODUCCIÓN

Un elemento desbalanceado provoca fuerzas o momentos de inercia indeseables. Estas fuerzas pueden provocar vibraciones que a veces pueden alcanzar amplitudes peligrosas. Incluso aunque no lo fueran, las vibraciones incrementan los esfuerzos y someten a los elementos de soporte y sujeción (rodamientos) a cargas repetidas que provocan la falla prematura por fatiga de las piezas. Por tanto, en el diseño de maquinaria no basta con evitar la operación más cercana a las velocidades críticas, también es preciso eliminar, o reducir, las fuerzas inerciales que producen estas vibraciones.

## II. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

La configuración mostrada en la figura 1 se compone de una combinación de disco y eje descansando sobre rieles rígidos, de forma que el eje, que se supone es perfectamente recto, pueda rodar sin fricción.

Si se fija un sistema de referencia  $xyz$  en el disco que se mueve con él, se puede conducir un experimento muy sencillo para determinar si el disco está estáticamente desbalanceado. Basta con rodar el disco suavemente impulsándolo con la mano, dejándolo rodar libremente hasta que vuelva al reposo. Se marca con un gis el punto más bajo de la periferia del disco. Se repite la operación cinco veces. Si las marcas quedan dispersas en lugares diferentes alrededor de la periferia, el disco se encuentra desbalanceado estáticamente. Por otro lado, si las marcas coinciden<sup>1</sup>, el disco se encuentra estáticamente balanceado, lo que significa que el eje del árbol y el centro de masa del disco no coinciden.

El desbalanceo estático puede corregirse eliminando material mediante una perforación en las marcas señaladas, o agregando masa a la periferia a  $180^\circ$  de la marca. Muy seguramente se tendrá que hacer por tanteos, porque se desconoce, en realidad, la magnitud del desequilibrio. Por consiguiente, el problema principal en el estudio del balanceo es la determinación del desbalanceo y la aplicación de correcciones.

Aquí nos interesa la fuerza que se produce al montar un disco y un eje desalineados sobre extremos fijos. Como se ilustra en la figura 2, existe fuerza centrífuga ( $mr_G\omega^2$ ) y esta fuerza que actúa sobre el eje produce reacciones giratorias en los extremos fijos.

\*Este es un resumen de la experiencia adquirida por estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM en la aplicación de la teoría de vibraciones mecánicas, tópico desarrollado en la materia de "Temas selectos de diseño mecánico: Vibraciones mecánicas", impartida en el semestre 2019-2 en el posgrado de Ingeniería Mecánica de la UNAM.

<sup>†</sup>Profesor de carrera del posgrado en Ingeniería Mecánica de la FI-UNAM (*ryv77@unam.mx*).

<sup>‡</sup>Estudiante de posgrado en Ingeniería Mecánica FI-UNAM. (*ing.oscar.m194@gmail.com*)

<sup>1</sup>La posición de las marcas con respecto al sistema  $xy$  indica la ubicación angular del desbalanceo, pero no su magnitud.

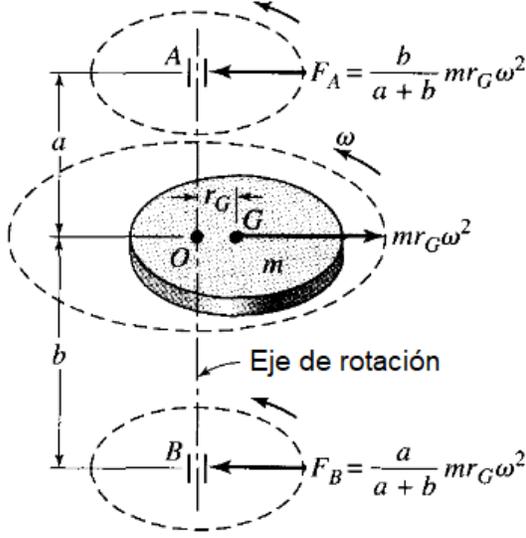


Figura 2.

Para determinar la ecuación del movimiento del disco se especifica primero la variable  $m$  como la masa total y  $m_{nb}$  como la masa no balanceada,  $r_G$  es la excentricidad. Asimismo, sea  $k$  la rigidez del eje, un valor que describe la magnitud de una fuerza necesaria para doblar al eje una distancia unitaria cuando se aplica en  $O$ . Sea  $c$  el coeficiente de amortiguamiento viscoso, definido así por mantener una relación lineal con la velocidad. Si se selecciona cualquier coordenada  $x$  normal al eje del árbol, se puede escribir

$$\sum F_0 = -kx - c\dot{x} - m\ddot{x} + m_{nb}r_G\omega^2 \cos \omega t = 0 \quad (1)$$

La solución de esta ecuación diferencial se escribe

$$x = \frac{m_{nb}r_G\omega^2 \cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \quad (2)$$

en donde  $\phi$  es el ángulo comprendido entre la fuerza  $m_{nb}r_G\omega^2$  y la amplitud  $X$  de la vibración de árbol o eje (ángulo de fase) y su valor es

$$\phi = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad (3)$$

De la ecuación 2, si consideramos el término  $k - m\omega^2$  del denominador y lo hacemos cero, la amplitud de  $x$  sería muy grande debido a que solo estaría limitada por la constante de amortiguamiento  $c$ , que por lo general es muy pequeña. El valor que hace que ese término sea cero es la velocidad angular natural del sistema y se escribe como

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

En el estudio de las vibraciones libres o no forzadas, se encuentra que cierto valor del factor viscoso  $c$  no conducirá a

vibración alguna en absoluto, el coeficiente crítico del amortiguamiento viscoso y se expresa como

$$c_c = 2m\omega_n \quad (5)$$

Ahora, introducimos un valor que existe entre el amortiguamiento real y el denominador crítico, y es

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} \quad (6)$$

que para la mayoría de los sistemas de máquinas en los que no se introduce deliberadamente amortiguamiento,  $\zeta$  estará en el intervalo aproximado de  $0.015 \leq \zeta \leq 0.120$ .

Si se divide el numerador y el denominador de la amplitud  $X$  de la ecuación 2 entre  $k$ , y se sustituyen las ecuaciones 4 y 5, se obtiene la razón de amplitudes de la vibración de una combinación giratoria de disco y eje

$$\frac{mX}{m_{nb}r_G} = \frac{(\omega/\omega_n)^2}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \quad (7)$$

Haciendo caso omiso del amortiguamiento, se hace  $m = m_{nb}$ , se obtiene

$$X = r_G \frac{(\omega/\omega_n)^2}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (8)$$

$X$  aquí es la amplitud de la vibración correspondiente a cualquier razón de frecuencias  $\omega/\omega_n$ . Al hacer la gráfica de la ecuación 8, designando a  $O$  como el centro del árbol en el disco y a  $G$  como el centro de masa del disco (ver figura 2), el resultado se vería como aparece en la figura 3.

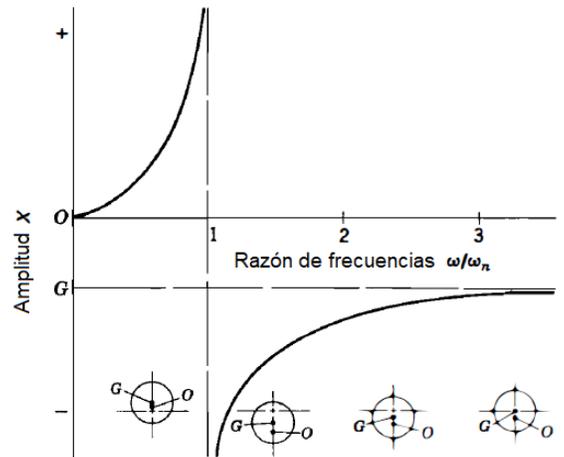


Figura 3.

En esta gráfica la amplitud se representa sobre el eje vertical y la razón de frecuencias a lo largo de la abscisa. La frecuencia natural que corresponde a la frecuencia crítica es

$\omega_n$ , en tanto que  $\omega$  a secas es la velocidad del árbol. Cuando apenas inicia la rotación,  $\omega$  es mucho menor que  $\omega_n$  y la gráfica indica que la amplitud de la vibración es muy pequeña. Conforme aumenta la velocidad del árbol, también se incrementa la amplitud y se hace infinita en la velocidad crítica. Conforme el eje pasa por la velocidad crítica, la amplitud cambia hacia un valor negativo y disminuye conforme aumenta la velocidad. La gráfica revela que la amplitud nunca regresa a cero, no importa cuánto se aumente la velocidad del árbol, pero si alcanza un valor límite de  $-r_G$ . En este intervalo, el disco está girando en torno a su propio centro de gravedad, que entonces coincide con la línea central del rodamiento. Esto demuestra que los sistemas giratorios desbalanceados producen vibraciones indeseables y reacciones giratorias en los rodamientos. Es por ello que cuando la frecuencia de operación es mayor que la frecuencia natural, las máquinas se debe diseñar de tal modo que pase por la frecuencia natural tan rápidamente como sea posible, con el fin de evitar que se desarrollen vibraciones peligrosas.

### III. PROBANDO LA TEORÍA

Para probar que se presenta resonancia torsional en un disco desbalanceado, se ha diseñado un sistema que facilitará percibir este fenómeno. Básicamente dicho sistema consiste en un disco de masa conocida cuyo eje de giro está apoyado de sus extremos por elementos que le permiten girar libremente (Figura 4). Un motor con la posibilidad de girar a 5000 rpm se conecta por la parte superior del eje. Mientras que un variador de velocidades posibilita la opción de subir o bajar la velocidad de giro del motor.

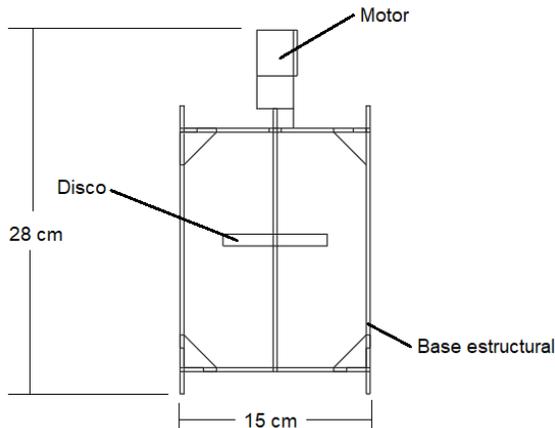


Figura 4. Sistema torsional. Vista Frontal.

El diseño del disco permite agregar masa en su periferia mediante barrenos dispuestos en su cuerpo. Esto permitirá desbalancear el sistema colocando, por ejemplo, una tuerca y un tornillo como se aprecia en la figura 5.

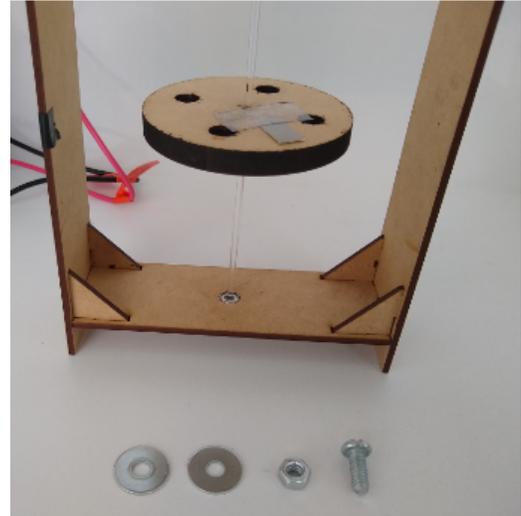


Figura 5.

El eje es rígido construido con barra de acrílico de 1/8". Para alimentar el motor se ha usado una fuente regulable de un canal a 11 V. Se usó un controlador de velocidad para motor usando un pulso-ancho-modulada tensión DC. El set up se muestra en la figura siguiente.

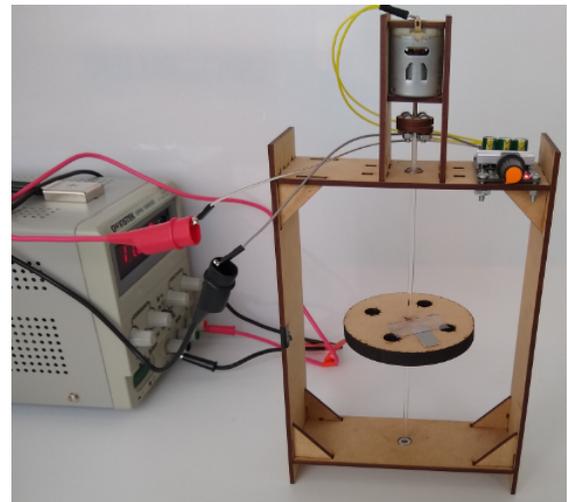


Figura 6.

Se realizaron algunas pruebas y se registraron las velocidades con un tacómetro testo (1.00 a 99999 rpm) a bajas rpms en las que se presenta resonancia torsional. El resumen se muestra en la tabla siguiente.

	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Prueba 4
	[rpm]	[rpm]	[rpm]	[rpm]
Lectura 1	389.8	455.5	529	622.4
Lectura 2	411.1	464	513.7	592.4
Lectura 3	425.8	457.1	530.7	638.3
Lectura 4	393.9	465.8	529.2	599.0
Lectura 5	405.1	460.6	525.65	613.0

## IV. DEMOSTRACIÓN

Para ver una demostración del fenómeno, refierace a la siguiente liga:  
<https://youtu.be/WwtYZDvxaSo>

## REFERENCIAS

[1] J. Uicker, G. Pennock, J. Shigley. Theory of machines and mechanisms. 4<sup>th</sup> ed. Oxford. 2011.