Programación Avanzada

Interpolación Numérica

Semestre 2019-1

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Ingeniero Petrolero

Facultad de Ingeniería UNAM


4G
5:15
777-777-7777
CALLING

Interpolación Numérica

- **Introducción.**
- Interpolación es la construcción de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos. En ingeniería y otras ciencias es frecuente disponer de un cierto número de datos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretender construir una función que los ajuste.
- Otro problema estrechamente ligado con el de la interpolación es la aproximación de una función complicada por una más simple. Si se tiene una función cuyo cálculo resulta costoso, entonces, a partir de un cierto número de valores de dicha función se pueden interpolar dichos datos construyendo una función más simple.
- En general no se obtienen los mismos valores evaluando la función obtenida que si se evaluara la función original, sin embargo dependiendo de las características del problema y del método de interpolación usado, la eficiencia en la obtención de dicha información aumenta compensando el error cometido.

Interpolación Numérica

- **Lineal y doble interpolación.**
- ***Interpolación lineal para un conjunto de datos conocidos.***
- Como se mencionó anteriormente, en ocasiones se conocen un cierto número de datos obtenidos experimentalmente, estos pueden llegar a tener un comportamiento lineal, si se desea conocer otro valor no contenido dentro de los datos existentes, este se puede obtener realizando una interpolación.

Interpolación Numérica

- **Lineal y doble interpolación.**
- ***Interpolación lineal para un conjunto de datos conocidos.***
- Una tabla de valores cuyo comportamiento es lineal:

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3

- Y se desea conocer un valor que esta entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

X	Y
x_1	y_1
x	$Y_?$
x_2	y_2

- Se puede interpolar haciendo uso de una ecuación de la forma:

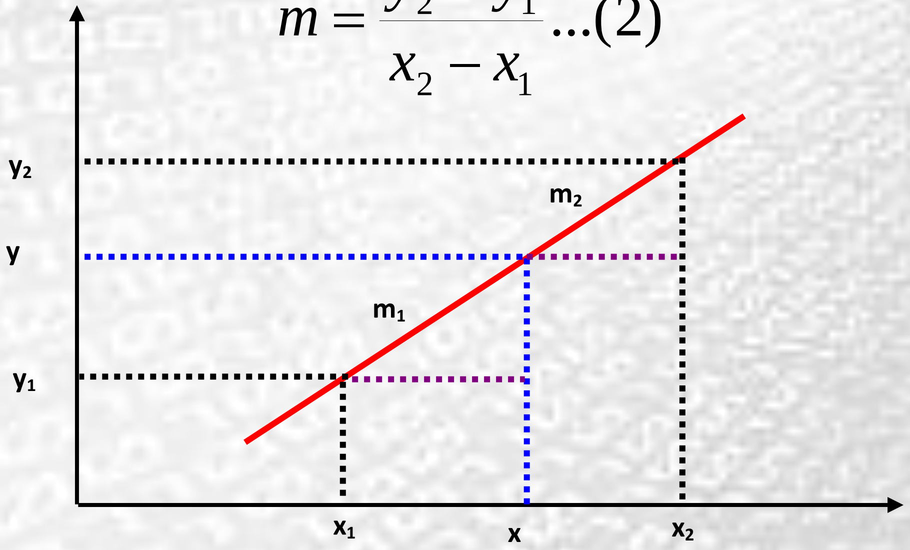
$$y = mx + b \ldots (1)$$

- Que es la ecuación ordenada al origen de una recta.

Interpolación Numérica

- **Lineal y doble interpolación.**
- ***Interpolación lineal para un conjunto de datos conocidos.***
- ***Algoritmo:*** La pendiente m de la ecuación (1) conocidos dos puntos se define como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ldots(2)$$



- A partir de la figura se obtienen m_1 y m_2 definidas por los puntos (x_1, y_1), (x, y) y (x_2, y_2)

Interpolación Numérica

- **Lineal y doble interpolación.**
- ***Interpolación lineal para un conjunto de datos conocidos.***
- ***Algoritmo:***

$$m_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} \ldots(3) \qquad\qquad m_2 = \frac{y - y_2}{x - x_2} \ldots(4)$$

- Igualando estas ecuaciones, pues representan la misma pendiente m de la recta definida por los puntos conocidos:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} \ldots(5)$$

- y haciendo el desarrollo algebraico para despeja y se obtiene:

$$y = \frac{y_1(x - x_2) + y_2(x_1 - x)}{(x_1 - x_2)} \ldots(6)$$

Interpolación Numérica

- **Lineal y doble interpolación.**
- ***Interpolación lineal para un conjunto de datos conocidos.***
- ***Ejemplo:*** Con los datos de la siguiente tabla obtener el valor de y para x=3.4 .

X	Y
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

$$y = \frac{y_1(x - x_2) + y_2(x_1 - x)}{(x_1 - x_2)} \ldots(6)$$

- Para x=3.4 se toman los valores dados por los puntos (x_3, y_3) y (x_4, y_4) , se sustituyen en la ecuación (6)

$$y = \frac{4(3.4 - 4) + 3(3 - 3.4)}{(3 - 4)}$$

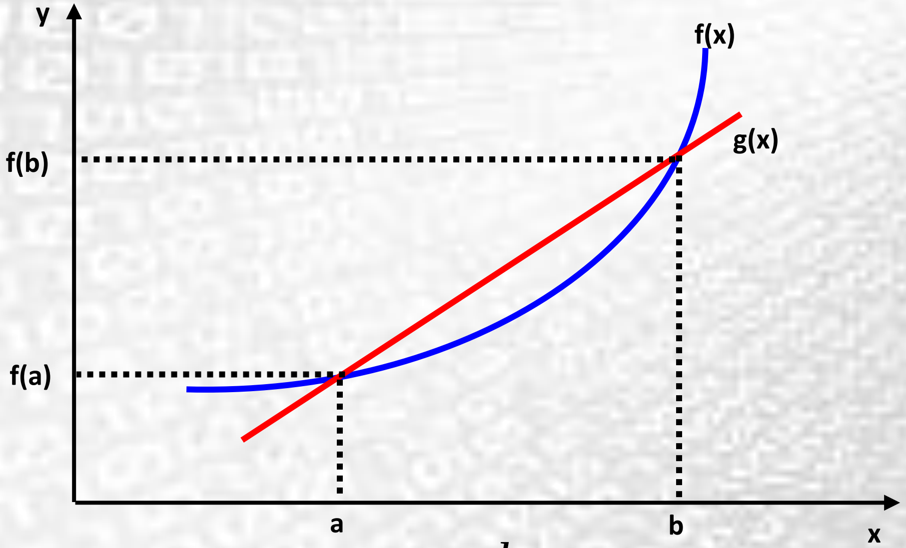
$$y = 3.6$$

Interpolación Numérica

- ***Interpolación lineal para una función dada.***
- La interpolación lineal aplicada a una función es la base para varios modelos numéricos, por ejemplo, al integrar la interpolación lineal se obtiene el método de integración conocido como regla del trapecio.
- En este caso la interpolación lineal para una función da como resultado una recta que se ajusta a dos puntos dados.

Interpolación Numérica

- ***Interpolación lineal para una función dada.***
- ***Algoritmo:*** Este tipo de interpolación se muestra en la figura:

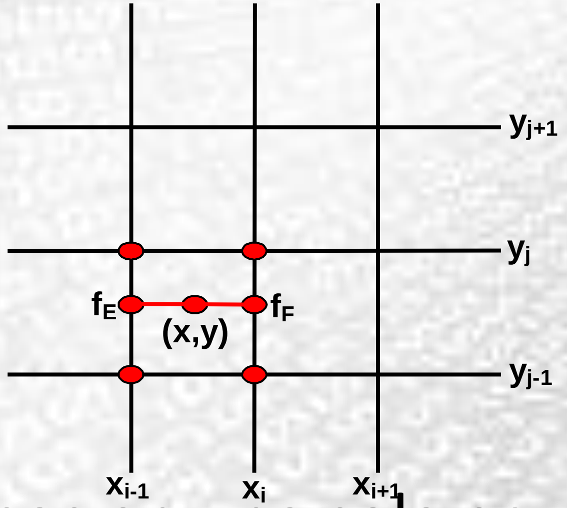


- Y esta dado por la ecuación: $g(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$
- Donde ***f(a)*** y ***f(b)*** son valores conocidos de ***f(x)*** en ***x=a*** y ***x=b*** respectivamente.

Interpolación Numérica

- ***Doble interpolación.***
- Este tipo de interpolación se utiliza cuando se tienen datos que dependen de dos variables, es decir de una función $f(x, y)$.
- ***Algoritmo.***
- Se conocen los valores de la función $f(x, y)$ en una malla rectangular de (x_i, y_k). Se denota el valor en el punto (x_i, y_j) como $f_{i,j} = (x_i, y_j)$. La doble interpolación se lleva a cabo en dos etapas, en las que se utiliza una interpolación en dimensión uno.

Interpolación Numérica

- ***Doble interpolación.***
- ***Algoritmo.*** Suponiendo que es necesario estimar la función en un punto localizado en el rectángulo definido por $x_{i-1} \le x \le x_i$ y $y_{j-1} \le y \le y_j$ como se muestra en la figura.
- 

- Combinando estos dos pasos en una sola ecuación se tiene:

$$g(x,y) = \frac{\left[(x_i - x)(y_j - y)f_{i-1,j-1} + (x_i - x)(y - y_{j-1})f_{i-1,j} + (x - x_{i-1})(y_j - y)f_{i,j-1} + (x - x_{i-1})(y - y_{j-1})f_{i,j}\right]}{\left[(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\right]}$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- Otro método utilizado para ajustar datos a una curva para así poder interpolar datos no conocidos es el de mínimos cuadrados.
- Este se puede utilizar haciendo el ajuste de una línea recta a una serie de datos, este procedimiento es comúnmente conocido como regresión lineal, cuando los datos no se ajustan a una línea recta se puede utilizar una curva no lineal.

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Se desea encontrar una función lineal que se ajuste a una serie de datos con una desviación mínima, esta función lineal se conoce como recta de regresión.
- ***Algoritmo.***
- La función lineal se expresa como:

$$g(x) = bx + a \ldots (1)$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Donde a y b son constantes por determinar. La desviación de la recta con respecto a cada dato se define como:

$$r_i = y_i - g(x_i) = y_i - (bx_i + a) \quad i = 1,2,\ldots,n \ldots(2)$$

- Donde n es el número total de datos a y b son las constantes a determinar. Así, el cuadrado total de las desviaciones está dado por:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (r_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \ldots(3)$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Debido a que a y b son parámetros arbitrarios, se determinan de forma que minimicen a R. El mínimo de R se obtiene si las derivadas parciales de R con respecto de a y b se anulan:

$$\frac{\partial R}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - bx_i - a\right) \ldots (4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - bx_i - a\right) \ldots (4)$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \ldots(5)$$

- En donde:

$$A_{1,1} = n$$

$$A_{1,2} = \sum x_i$$

$$Z_1 = \sum y_i$$

$$A_{2,1} = \sum x_i$$

$$A_{2,2} = \sum (x_i)^2$$

$$Z_2 = \sum x_i y_i$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Este sistema se puede resolver utilizando alguno de los métodos vistos en SEL, o directamente a partir de las siguientes ecuaciones:

$$a = \frac{A_{2,2}Z_1 - A_{1,2}Z_2}{d} \quad ...(6)$$

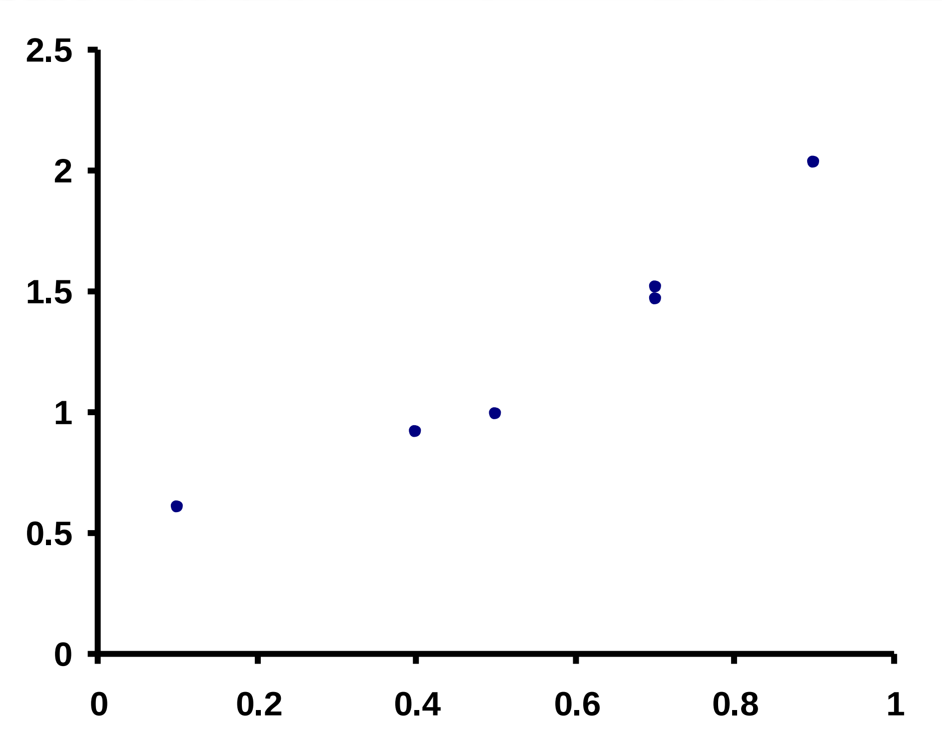
$$b = \frac{A_{1,1}Z_2 - A_{2,1}Z_1}{d} \quad ...(7)$$

$$d = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Calcular la línea de regresión para los datos de la siguiente tabla:

i	x	y
1	0.1	0.61
2	0.4	0.92
3	0.5	0.99
4	0.7	1.52
5	0.7	1.47
6	0.9	2.03



Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Calculando los valores de ***A*** para la matriz de coeficientes y de ***Z*** del vector independiente se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \ldots(5)$$

$$A_{1,1} = n$$

$$A_{1,2} = \sum x_i$$

$$Z_1 = \sum y_i$$

$$A_{2,1} = \sum x_i$$

$$A_{2,2} = \sum (x_i)^2$$

$$Z_2 = \sum x_i y_i$$

$Dato$	$A_{1,2}, A_{2,1}$	Z_1	$A_{2,2}$	Z_2
i	x	y	x_i^2	$x_i y_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.061
2	0.4	0.92	0.16	0.368
3	0.5	0.99	0.25	0.495
4	0.7	1.52	0.49	1.064
5	0.7	1.47	0.49	1.029
n=6	0.9	2.03	0.81	1.827
$Suma:$	3.3	7.54	2.21	4.844

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Resolviendo este sistema se tienen los valores de ***a*** y ***b*** con los que se puede escribir la función que representa la recta que se ajusta a estos puntos:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3.3 \\ 3.3 & 2.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.54 \\ 4.844 \end{bmatrix}$$

$$g(x) = \underbrace{1.7645}_{b} x + \underbrace{0.2862}_{a}$$

$$a = \frac{A_{2,2} Z_1 - A_{1,2} Z_2}{d} \quad ...(6)$$

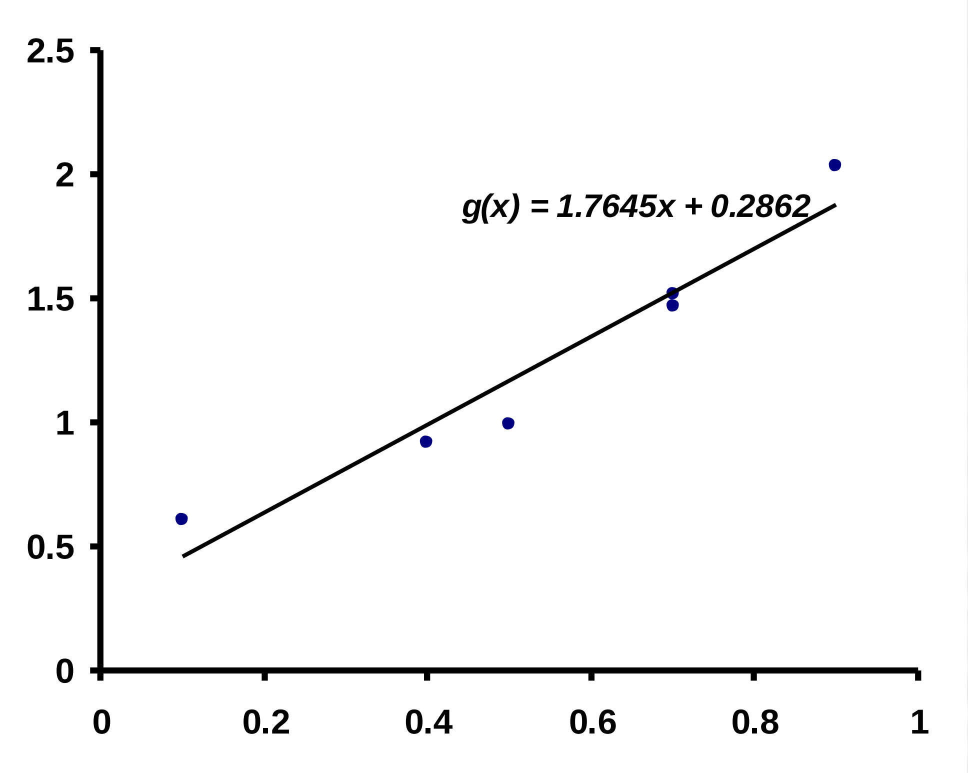
$$b = \frac{A_{1,1} Z_2 - A_{2,1} Z_1}{d} \quad ...(7)$$

$$d = A_{1,1} A_{2,2} - A_{1,2} A_{2,1}$$

Interpolación Numérica

- **Mínimos Cuadrados.**
- ***Regresión lineal.***
- Haciendo uso de esta ecuación se grafica la recta de ajuste junto con los puntos de la tabla:

$$g(x) = \underbrace{1.7645}_{b}x + \underbrace{0.2862}_{a}$$



Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- En muchos casos los datos con los que se cuenta no se ajustan de manera correcta a una función lineal, es por esto que se vuelve necesario ajustar alguna otra función no lineal a dichos datos.
- Para esto, el método de mínimos cuadrados se puede extender para ajustar un polinomio de cualquier orden a los datos.

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- **Algoritmo.**
- Considerando un polinomio ***g(x)*** de orden ***N*** :

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_N x^N$$

- La desviación de la curva de los puntos dados es:

$$r_i = y_i - g(x_i) \; i = 1,2,\ldots,L$$

- Donde ***L*** es el número de datos, el total de los cuadrados de la desviación es el siguiente:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (r_i)^2$$

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- **Algoritmo.**
- Entonces, igualando a cero las derivadas parciales de ***R*** con respecto a los coeficientes del polinomio buscando minimizar a ***R***:

$$\frac{\partial R}{\partial a_n} = 0 \quad n = 0,1,2,\ldots,N$$

- Esto equivale a:

$$\sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{i=1}^{L} x_i^{n+k}\right]a_n = \sum_{i=1}^{L} x_i^k y_i \quad k = 0,1,2,\ldots,N$$

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- **Algoritmo.**
- Que en forma matricial se escribe:

$$\begin{bmatrix} L & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^N \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{N+1} & \sum x_i^{N+2} & \cdots & \sum x_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

- Este sistema se puede resolver utilizando alguno de los métodos vistos en SEL.

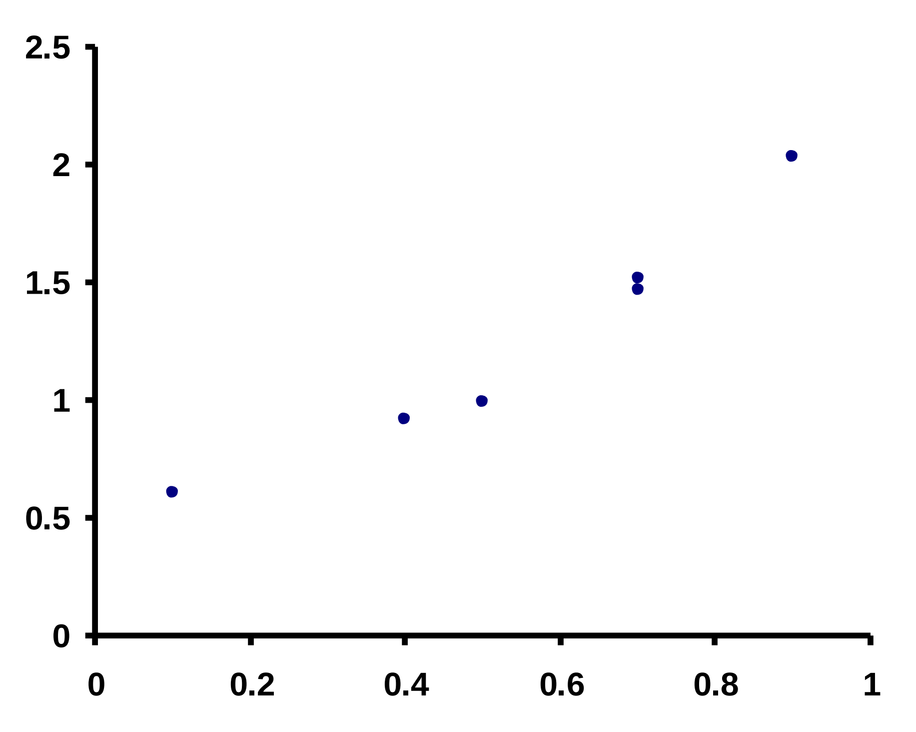
Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- **Algoritmo.**
- El grado ***N*** del polinomio no es fijo, indistintamente se puede utilizar un polinomio de grado dos o uno de grado seis, sin embargo, de esto dependerá el correcto ajuste y una buena interpolación de los datos deseados.
- Para esto cabe señalar que desde el punto de vista experimental rara vez se necesitan polinomios más complejos que uno de cuarto grado, y cuando se necesitan, el problema con frecuencia es manejado ajustando una serie de polinomios a un subconjunto de datos.

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- ***Ejemplo.***
- Ajustar un polinomio cuadrático para los datos de la siguiente tabla:

i	X	y
1	0.1	0.61
2	0.4	0.92
3	0.5	0.99
4	0.7	1.52
5	0.7	1.47
6	0.9	2.03



Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- ***Ejemplo:*** Calculando los elementos de la matriz de coeficientes así como los del vector independiente:

$Dato$ / i	x	y	x^2	x^3	x^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.001	0.0001	0.061	0.0061
2	0.4	0.92	0.16	0.064	0.0256	0.368	0.1472
3	0.5	0.99	0.25	0.125	0.0625	0.495	0.2475
4	0.7	1.52	0.49	0.343	0.2401	1.064	0.7448
5	0.7	1.47	0.49	0.343	0.2401	1.029	0.7203
6	0.9	2.03	0.81	0.729	0.6561	1.827	1.6443
$Suma:$	3.3	7.54	2.21	1.605	1.2245	4.844	3.5102

$$\begin{bmatrix} L & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^N \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{N+1} & \sum x_i^{N+2} & \cdots & \sum x_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- ***Ejemplo:*** Entonces el sistema es:

Dato i	x	y	x^2	x^3	x^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	0.1	0.61	0.01	0.001	0.0001	0.061	0.0061
2	0.4	0.92	0.16	0.064	0.0256	0.368	0.1472
3	0.5	0.99	0.25	0.125	0.0625	0.495	0.2475
4	0.7	1.52	0.49	0.343	0.2401	1.064	0.7448
5	0.7	1.47	0.49	0.343	0.2401	1.029	0.7203
6	0.9	2.03	0.81	0.729	0.6561	1.827	1.6443
Suma :	3.3	7.54	2.21	1.605	1.2245	4.844	3.5102

$$\begin{bmatrix} 6.0000 & 3.3000 & 2.2100 \\ 3.3000 & 2.2100 & 1.6050 \\ 2.2100 & 1.6050 & 1.2245 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5400 \\ 4.8440 \\ 3.5102 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^N \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \cdots & \sum x_i^{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum x_i^n & \sum x_i^{N+1} & \sum x_i^{N+2} & \cdots & \sum x_i^{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^N y_i \end{bmatrix}$$

Interpolación Numérica

- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- ***Ejemplo:*** Resolviendo este sistema se encuentran los coeficientes de las potencias y se construye el polinomio:

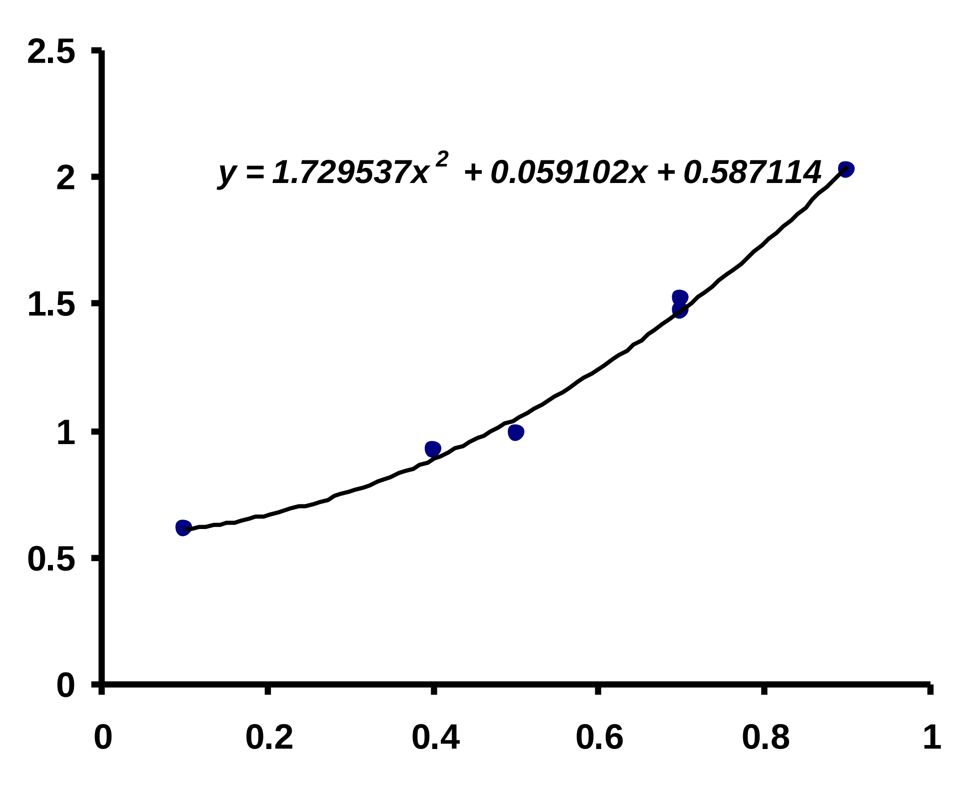
Potencia n	*Coeficiente* a_n
0	0.587114
1	0.059102
2	1.729537

$$g(x) = 0.587114 + 0.059102\,x + 1.729537\,x^2$$

Interpolación Numérica

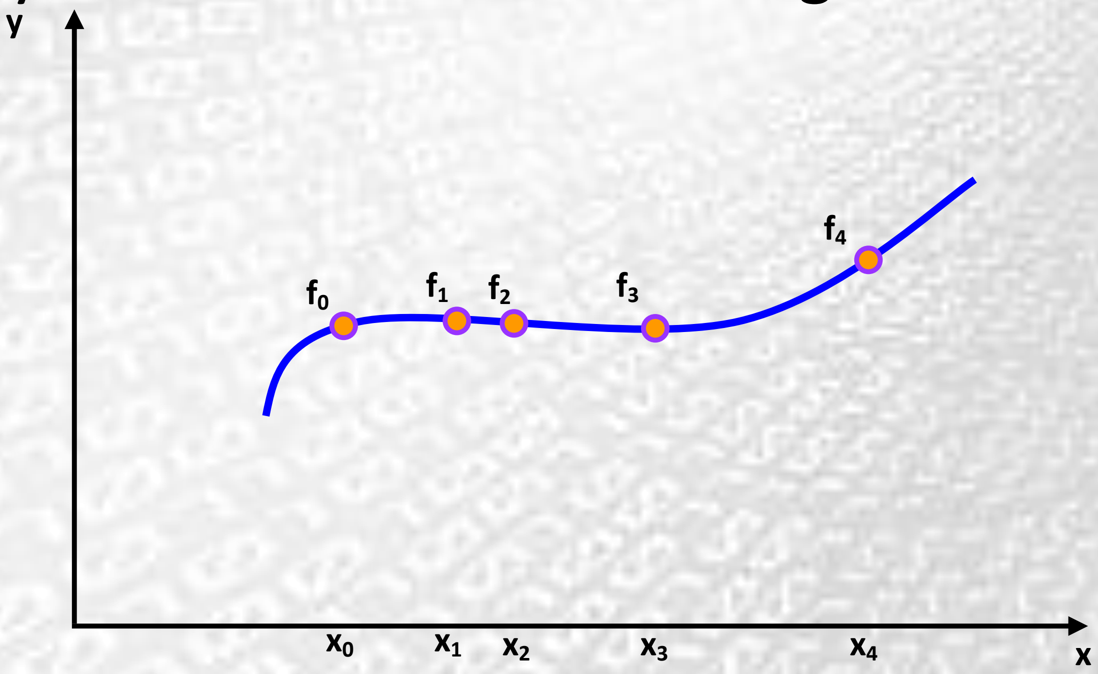
- **Ajuste de curvas no lineales por mínimos cuadrados.**
- ***Ejemplo:*** Haciendo uso de esta ecuación se grafica el polinomio de ajuste junto con los puntos de la tabla:

$$g(x) = 0.587114 + 0.059102\,x + 1.729537\,x^2$$



Interpolación Numérica

- **Método de Lagrange.**
- Uno de los métodos más importantes para encontrar una función que pase a través de un número N de datos consiste en ajustar un polinomio, tal y como se muestra en la figura:



Interpolación Numérica

- **Método de Lagrange.**
- ***Algoritmo.*** El producto de factores dados por:

$$V_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_N)\ldots(1)$$

- Que se refiera a los ***N+1*** puntos dados.
- La función V_0 es un polinomio de orden ***N*** de ***X***, y se anula en $x = x_1, x_2, \ldots, x_N$, dividiendo V_0 entre $V_0(x_0)$ se tiene:
-
$$V_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_N)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_N)}\ldots(2)$$

- La función (2) toma para $x = x_0$ el valor de uno, y para $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_N$ el valor de cero. Reescribiendo la ecuación (2) para i – ésimo elemento:

$$V_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_N)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_N)}\ldots(3)$$

Interpolación Numérica

- **Método de Lagrange.**
- ***Algoritmo.*** La función $V_i(x)$ es un polinomio de orden ***N*** y toma el valor de uno en $x = x_i$ y de cero en $x = x_j$ para $j \neq i$. Entonces, multiplicando $V_0(x), V_1(x), \ldots, V_N(x)$
- por $f_0, f_1, \cdots, f_N$, respectivamente, y sumando estos resultados se tiene un polinomio cuyo orden es igual a ***N*** como máximo e igual a f_i para $i = 0,1,2,\ldots,N$.
- Según lo anterior la fórmula de interpolación de Lagrange de orden ***N*** es:
-

$$g(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_N)} f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_N)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_N)} f_1 \ldots (4)$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{N-1})}{(x_N-x_0)(x_N-x_1)\cdots(x_N-x_{N-1})} f_N$$

Interpolación Numérica

- **Método de Lagrange.**
- ***Algoritmo.***
- Es importante señalar que si se repite algún par de valores de la función el método no funciona adecuadamente, por lo que se debe verificar que estos no se presente o de ser necesario omitirlos en los cálculos.

Interpolación Numérica

- **Método de Lagrange.**
- ***Ejemplo.***

i	$T_i\left[{}^oC\right]$	$\rho_i\left[kg/m^3\right]$
0	94	929
1	205	902
2	371	860

$$T = 251\left[{}^oC\right]$$

- Como el número de datos es tres el orden de la formula de Lagrange es N=2, entonces:

$$g(T)=\frac{(T-205)(T-371)}{(94-205)(94-371)}(929)+\frac{(T-94)(T-371)}{(205-94)(205-371)}(902)+\frac{(T-94)(T-205)}{(371-94)(371-205)}(860)$$

- Sustituyendo $T = 251\left[{}^oC\right]$ se obtiene:

$$\rho = 890.5\left[kg/m^3\right]$$

GRACIAS

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Ingeniero Petrolero

Facultad de Ingeniería UNAM