Método del spline cúbico.

Cuando un número grande de datos tiene que ajustarse a una curva suave, la interpolación de Lagrange no es adecuada.

Para esto se emplea el método del spline cúbico, este ajusta un polinomio cúbico en cada intervalo entre dos puntos consecutivos.

El spline cúbico es una técnica que ha cobrado mucha importancia, inicialmente se conocía como ajuste de datos con *curvígrafo cúbico*, este nombre se tomó de las plantillas de dibujo. Un curvígrafo es una plantilla flexible que se puede sostener por pesos, de manera que pase a través de cada uno de los puntos dados, pero conservando la lisura en cada intervalo de acuerdo con las leyes de la flexión del material. El procedimiento real matemático es una adaptación de esta idea.

Algoritmo.

Las condiciones para un ajuste con spline cúbico, son que se pase un conjunto de polinomios cúbicos a través de los puntos, utilizando un nuevo polinomio cúbico en cada intervalo. Para corresponder con la idea del curvígrafo, se requiere que tanto la pendiente como la curvatura, sean las mismas para el par de polinomios cúbicos que se unen en cada punto. El polinomio cúbico para el *i*-ésimo intervalo, el cual cae entre los puntos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) en la forma:

$$y = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \ldots 1$$

Puesto que esta se ajusta en los dos puntos extremos del intervalo:

$$y = a_i(x_i - x_i)^3 + b_i(x_i - x_i)^2 + c_i(x_i - x_i) + d_i = d_i \ldots 2$$

$$\begin{aligned} y &= a_i(x_{i+1} - x_i)^3 + b_i(x_{i+1} - x_i)^2 + c_i(x_{i+1} - x_i) + d_i \\ &= a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i \ldots 3 \end{aligned}$$

En donde h_i es el Δx en el *i*-ésimo intervalo. Se necesitan las primeras y segundas derivadas para relacionar las pendientes y curvaturas de los polinomios que se unen, de manera que se deriva la ecuación 1:

$$\begin{aligned} y' &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \ldots 4 \\ y'' &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i \ldots 5 \end{aligned}$$

El procedimiento matemático se simplifica si se escriben las ecuaciones en términos de las segundas derivadas de los polinomios cúbicos interpolantes. Sea S_i la representación de la segunda derivada en el punto (x_i, y_i) y S_{i+1} en el punto (x_{i+1}, y_{i+1}). De la ecuación 5 se tiene:

$$S_i = 6a_i\left(x_i - x_i\right) + 2b_i = 2b_i$$
$$S_{i+1} = 6a_i\left(x_{i+1} - x_i\right) + 2b_i = 6a_i h_i + 2b_i$$

Reescribiendo:

$$b_i = \frac{S_i}{2} \ldots 6$$
$$a_i = \frac{\left(S_{i+1} - S_i\right)}{6h_i} \ldots 7$$

Ahora sustituyendo a_i, b_i y d_i dadas por las ecuaciones 2, 6 y 7 en la ecuación 5:

$$y_{i+1} = \left(\frac{S_{i+1} - S_i}{6h_i}\right)h_i^3 + \frac{S_i}{2}h_i^2 + c_i h_i + y_i$$

Resolviendo para c_i:

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6} \ldots 8$$

Ahora es necesario definir la condición de que las pendientes de los dos polinomios cúbicos, que se unen en $\left(x_i, y_i\right)$, sean las mismas. Para la ecuación en el *i*-ésimo intervalo, la ecuación 4 se hace, con $x = x_i$:

$$y' = 3a_i\left(x_i - x_i\right)^2 + 2b_i\left(x_i - x_i\right) + c_i = c_i$$

En el intervalo anterior, de x_{i-1} a x_i, la pendiente en su extremo derecho será:

$$y' = 3a_{i-1}\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + 2b_{i-1}\left(x_i - x_{i-1}\right) + c_{i-1}$$
$$y' = 3a_{i-1}h_{i-1}{}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1}$$

Igualando a estas y sustituyendo a, b, c, d en términos de S e y, se obtiene:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{2h_i S_i + h_i S_{i+1}}{6}$$
$$y_i' = 3\left(\frac{S_i - S_{i-1}}{6h_{i-1}}\right)h_{i-1}^2 + 2\left(\frac{S_{i-1}}{2}\right)h_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} - 2\frac{h_{i-1}S_{i-1} + h_{i-1}S_i}{6}$$

Simplificando:

$$h_{i-1}S_{i-1} + \left(2h_{i-1} + 2h_i\right)S_i + h_i S_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right) \ldots 9$$

La ecuación 9 se aplica a cada punto interno, de $i = 2$ hasta $i = n - 1$; siendo n el número total de puntos. Esto da $n - 2$ ecuaciones que relacionan a los n valores de S_i. Se obtienen dos ecuaciones adicionales involucrando a S_1 y S_n cuando se especifican las condiciones pertenecientes a los intervalos extremos de la curva.

Hasta cierto punto estas condiciones en los extremos son arbitrarias. Las tres elecciones alternativas que se suelen utilizar son:

1. $S_1 = 0, S_n = 0$. Esto equivale a suponer que los extremos de los polinomios cúbicos se tornan lineales.

2. $S_1 = S_2, S_n = S_{n-1}$. Esto equivale a suponer que los extremos de los polinomios cúbicos se aproximan a parábolas.

3. S_1 como una extrapolación lineal de S_2 y S_3, y S_n como una extrapolación lineal de S_{n-1} y S_{n-2}. Con esta suposición para un conjunto de datos que se ajustan a una sola ecuación todos los curvígrafos cúbicos serán la misma cúbica. Las otras condiciones no tienen esta propiedad.

Las relaciones para la condición 3 en los extremos son:

- Extremo izquierdo:

$$\frac{S_2 - S_1}{h_1} = \frac{S_3 - S_2}{h_2}, \quad S_1 = \frac{\left(h_1 + h_2\right)S_2 - h_1 S_3}{h_2} \ldots 10a$$

- Extremo derecho:

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_{n-2}}{h_{n-2}}, \quad S_n = \frac{\left(h_{n-2} + h_{n-1}\right)S_{n-1} - h_{n-1}S_{n-2}}{h_{n-2}} \ldots 10b$$

Escribiendo las ecuaciones para $S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$ de la ecuación 9 en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & & \\ h_1 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & & \\ & h_2 & 2(h_3+h_4) & h_4 & & \\ & & h_3 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{Y_3-Y_2}{h_2} - \frac{Y_2-Y_1}{h_1} \\ \frac{Y_4-Y_3}{h_3} - \frac{Y_3-Y_2}{h_2} \\ \frac{Y_5-Y_4}{h_4} - \frac{Y_4-Y_3}{h_3} \\ \vdots \\ \frac{Y_n-Y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{Y_{n-1}-Y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \quad \ldots 11$$

En el arreglo dado por 10 solo hay $n-2$ ecuaciones, pero se tienen n incógnitas. Se pueden eliminar dos incógnitas $(S_1 y S_n)$ utilizando las relaciones que correspondan a las condiciones en los extremos.

En cada caso se reduce el vector S a $n-2$ elementos, y la matriz de coeficientes se hace cuadrada, de tamaño $(n-2)*(n-2)$.

Además, la matriz se vuelve tridiagonal y, por tanto, se puede almacenar y resolver con rapidez.

Para cada condición en el extremo, la matriz de coeficientes se convierte en:

- Condición 1 $S_1 = 0, S_n = 0$:

$$\begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & 2(h_3+h_4) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \ldots 12$$

- Condición 2 $S_1 = S_2, S_n = S_{n-1}$:

$$\begin{bmatrix} (3h_1+2h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & 2(h_3+h_4) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \quad \ldots 13$$

- Condición 3 S_1 y S_n son extrapolaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \frac{(h_1+h_2)(h_1+2h_2)}{h_2} & \frac{h_2^2-h_1^2}{h_2} & & & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & 2(h_3+h_4) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-1} \\ & & & \frac{h_{n-2}^2-h_{n-1}^2}{h_{n-2}} & \frac{(h_{n-1}+h_{n-2})(h_{n-1}+2h_{n-2})}{h_{n-2}} \end{bmatrix} \quad \ldots 14$$

Con la condición 3 después de resolver el conjunto de ecuaciones, se calcula S_1 y S_n utilizando las ecuaciones 10 a y b. Para cada caso el vector de los términos independientes es el mismo y está dado por 11. Una vez que se han calculado los S_i valores, se obtienen los valores de a_i, b_i, c_i y d_i para cada intervalo si se desea interpolar para nuevos valores:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{S_{i+1}-S_i}{6h_i} \\ b_i &= \frac{S_i}{2} \\ c_i &= \frac{Y_{i+1}-Y_i}{h_i} - \frac{2h_iS_i + h_iS_{i+1}}{6} \\ d_i &= Y_i \end{aligned} \quad \ldots 15$$

IV.IV.II Ejemplo.[12]

Ajustar los datos de la siguiente tabla por medio del spline cúbico, haciendo uso de las tres condiciones de los extremos. La función que proporciona los valores de dicha tabla es $y = x^3 - 8$.

X	Y
0	-8
1	-7
2	0
3	19
4	56

Ejemplo Spline Cúbico.

Para la condición 1 en el extremo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 72 \\ 108 \end{bmatrix}$$

Resolviendo:

$$S_1 = 0.00, S_2 = 6.4285, S_3 = 10.2857, S_4 = 24.4285, S_5 = 0.00$$

Tarea: Realizar para la condición 2 y 3 en el extremo.