Programación Avanzada

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales-

Semestre 2019-1

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Ingeniero Petrolero

Facultad de Ingeniería UNAM


4G
5:15
777-777-7777
CALLING

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Muchos problemas relacionados con la ingeniería en todas sus ramas, se pueden expresar en términos de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Comúnmente se conocen dos métodos para resolver estos sistemas, la eliminación de las incógnitas mediante la combinación de ecuaciones, y el uso de determinantes que es lo que se conoce como Regla de Cramer. Aquí se abordarán otro tipo de métodos para resolver estos sistemas y que pueden ser implementados en programas de computadora.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Conceptos básicos.**
- Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones de la forma:
-

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + \ldots + a_{3,n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots + a_{n,n}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

- Que tiene la siguiente representación matricial:
-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Conceptos básicos.**
- Y que a su vez se puede representar como: $A\bar{x}=\bar{b}$. La solución de este sistema de ecuaciones es un conjunto de ***n*** valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que satisfacen simultáneamente a todas las ecuaciones.
- La matriz 2 es una matriz de coeficientes, es decir, los elementos que la conforman son los coeficientes de las incógnitas que forman el sistema de ecuaciones, si las constantes ***b*** del sistema se agregan a la matriz se tendrá la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Método de Cramer.***
- La expresión general de la solución de un SEL por el método de Cramer es:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}}{A} \qquad i = 1, \ldots, n$$

- Para aplicar este método en primer lugar hay que evaluar n+1 determinantes y luego realizar n divisiones.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Método de Cramer.***

- Ejemplo: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \quad\quad 2y - z = 1 \\ -x + y \quad\quad = 1 \end{cases}$

- $\Delta = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$ $\quad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{6}{3} = 2;$ $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \dfrac{9}{3} = 3$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Método de Cramer.***
- Para el cálculo de los determinantes, una de las posibles técnicas necesita de ***n!n*** multiplicaciones y ***n!-1*** sumas. Por consiguiente, el método de Cramer necesita de:
- $(n+1)(n!-1)$ sumas
- $(n+1)(n!n)$ productos
- n divisiones
- Cada operación requiere de una cantidad de recursos de la computadora para poder efectuarla, por lo que mientras más operaciones se realicen más complejo será para esta realizar dichas operaciones.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Método de Cramer.***
- El número de operaciones que tendría que realizar una computadora para resolver un SEL de orden n utilizando el método de Cramer esta dado por la siguiente expresión:

$$T_c = (n+1)^2 n!$$

- Los datos reportados en la siguiente tabla muestran el número de operaciones necesarias para resolver un SEL de 5, 10 y 100 incógnitas.

N	*Tc*
5	4319
10	$4*10^8$
100	10^{158}

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Método de Cramer.***
- Si se dispone de una computadora capaz de realizar 100 millones de operaciones en punto flotante por segundo, el sistema de n=100 necesitaría aproximadamente de 3 x 10^{142} años para ser resuelto, por lo que es evidente que el método de Cramer resulta inadecuado para resolver cualquier SEL.

$$T_c = (n+1)^2 n!$$

N	*Tc*
5	4319
10	$4*10^{8}$
100	10^{158}

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de norma, número de condición y estabilidad.***
- **Norma de una matriz.**
- Cuando se manejan matrices o vectores es necesario explicar de alguna manera su magnitud en términos cuantitativos. Una medida de esa magnitud es la norma. Esta expresa la exactitud de la solución de un SEL en términos cuantitativos determinando la norma del vector error (la solución verdadera menos la solución aproximada). Las normas son también usadas para estudiar cuantitativamente la convergencia de un método iterativo para resolver SEL. Para esto existen varias maneras de calcular la norma de una matriz, estas pueden ser:

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de norma, número de condición y estabilidad.***
- **Norma de una matriz.**
- Norma de Frobenius.

$$A_f = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

- Norma de Magnitud Máxima.

$$A_1 = \underbrace{\max}_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \text{Máximo de Suma de Columna}$$

$$A_1 = \underbrace{\max}_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \text{Máximo de Suma de Renglones}$$

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de norma, número de condición y estabilidad.***
- **Número de condición y error en la solución.**
- El número de condición de una matriz es una medida de confiabilidad de la matriz en el momento de realizar los cálculos. El número de condición esta dado por:

$$C(A) = A \cdot A^{-1}$$

- El número de condición para la matriz identidad es:

$$C(I) = 1.0$$

- Por lo tanto la matriz identidad tiene el número de condición más bajo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de norma, número de condición y estabilidad.***
- **Número de condición y error en la solución.**
- Un problema esta bien condicionado si cambios pequeños en la información de entrada ocasionan cambios pequeños en la salida. De otro modo se dice que está pobremente condicionado.
- Un número de condición grande indica que la solución es sensible a pequeños cambios en el vector independiente. En los cálculos prolongados es probable que se realicen muchos redondeos y cada uno de ellos desempeñe el papel de un error de entrada para el resto del cálculo y cada uno tiene un efecto sobre la siguiente salida.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de norma, número de condición y estabilidad.***
- **Estabilidad.**
- Por esto se deben realizar algoritmos estables en que el efecto acumulativo de tales errores sea limitado, de modo que se generen buenos resultados, útiles para la solución del problema. Cuando el error acumulativo es grande el algoritmo es inestable.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Solución numérica.***
- La eficacia de los algoritmos para la resolución de SEL se evalúa a partir de tres criterios fundamentales.
- **Número de operaciones fundamentales:** Ligado al tiempo invertido en la realización de los cálculos por la computadora. Se deben tener en cuenta las operaciones elementales entre números de punto flotante. El número de operaciones es obviamente un excelente indicador del número de recursos invertido por la computadora.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Solución numérica.***
- **Necesidades de almacenamiento:** Inciden directamente en las limitaciones de la memoria de las diversas computadoras; los diferentes métodos que aquí se estudiarán requieren almacenar las matrices de diferentes maneras y esto varía considerablemente los requerimientos de memoria.
- **Rango de aplicabilidad:** No todos los métodos sirven para cualquier matriz no singular (matriz singular: no tiene inversa); además, en función del método y de las propiedades de la matriz, la precisión de los resultados puede verse afectada, como ya se mencionó antes, pequeños errores de redondeo pueden producir errores desproporcionados en la solución numérica.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Métodos directos y métodos indirectos (Iterativos).***
- **Métodos directos.**
- Son aquellos que permiten obtener la solución después de un número finito de operaciones aritméticas. Este número de operaciones es función del tamaño de la matriz. Algunos de estos métodos directos son:

Métodos Directos
Eliminación Gaussiana Descomposición LU

- **Métodos indirectos.**
- Un método iterativo es el desarrollo de una solución aproximada para el sistema de ecuaciones. La aproximación es remplazada sistemáticamente hasta que converge a la respuesta correcta. Algunos de estos métodos indirectos son:

Métodos Iterativos
Método de Jacobi **Método de Gauss – Seidel** **Método de Relajación Sucesiva (SOR)**

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Tipos de matrices utilizadas en ingeniería.***
- Las matrices que son utilizadas en problemas de Ingeniería y en las Ciencias Aplicadas se clasifican en dos grandes categorías:
- Matrices “llenas” con dimensiones pequeñas. Se entiende por “llenas” que tienen muy pocos elementos iguales a cero y de dimensiones pequeñas se considera aquellas asociadas con SEL que tienen un número de ecuaciones de algunos miles como máximo. Aparecen en problemas estadísticos, matemáticos, físicos e ingenieriles.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Tipos de matrices utilizadas en ingeniería.***
- Matrices "vacías" con dimensiones grandes. Se entiende por "vacías" que tienen muy pocos elementos diferentes de cero y están situados con cierta regularidad. En la mayoría de los casos el número de ecuaciones del SEL alcanza por lo menos las decenas de miles y pueden llegar en ocasiones a los millones. Estas matrices son comunes en la resolución de ecuaciones diferenciales de problemas de Ingeniería.
- En general para el primer grupo se aplican métodos directos para su solución mientras que para el segundo grupo se hace uso de métodos indirectos (iterativos).

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- **Matriz diagonal:** Es una matriz que solo tiene elementos diferentes de cero en su diagonal principal
- $$A = D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{bmatrix}$$
- Y la solución se obtiene directamente:

$$x_i = \frac{b_i}{d_{ii}} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- Existe solución si todos los elementos de la diagonal son no nulos, existen algunos casos particulares de la matriz diagonal en los que no solo se tienen elementos diferentes de cero en la diagonal principal, si no que también se presentan diagonales con elementos no nulos en otras partes de la matriz, por ejemplo:
- Matriz Tridiagonal.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & \ddots & & & 0 \\ 0 & a_{32} & b_{33} & c_{34} & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & a_{43} & b_{44} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{n,m-1} & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- Matriz Pentagonal.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & 0 & e_{14} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & 0 & e_{25} & & 0 \\ 0 & a_{32} & b_{33} & c_{34} & 0 & \ddots & \vdots \\ d_{41} & 0 & a_{43} & b_{44} & \ddots & 0 & d_{n-4,m} \\ \vdots & d_{52} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1,m} \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n,m-4} & 0 & a_{n,m-1} & b_{nm} \end{bmatrix}$$

- Matriz Heptagonal.

$$\begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & 0 & e_{14} & 0 & g_{16} & 0 \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} & 0 & e_{25} & 0 & g_{n-5,m} \\ 0 & a_{32} & b_{33} & c_{34} & 0 & \ddots & 0 \\ d_{41} & 0 & a_{43} & b_{44} & \ddots & 0 & d_{n-4,m} \\ \vdots & d_{52} & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ f_{61} & & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1,m} \\ 0 & f_{n,m-5} & \cdots & d_{n,m-4} & 0 & a_{n,m-1} & b_{nm} \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- **Matriz triangular superior:** Es una matriz que tiene elementos por arriba de la diagonal principal diferentes a cero, y todos los que están por debajo iguales a cero. Suele denominarse a esta matriz como U.
- $$A = U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- **Matriz triangular superior:** En este caso la solución de la última ecuación es trivial $x_n = b_n / u_{nn}$ Una vez conocido x_n, la penúltima ecuación (la *n-1*) sólo tiene una incógnita que se deduce de forma sencilla. Conocidos ahora x_n y x_{n-1}, se pasa a la ecuación anterior (la n-2) y se resuelve para su única incógnita x_{n-2}. Retrocediendo progresivamente se obtiene el algoritmo de sustitución hacia atrás que se escribe de la siguiente forma:
- $$x_n = b_n / u_{nn}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)}{u_{ii}} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \ldots. (1)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Conceptos de matriz diagonal, triangular superior y triangular inferior.***
- **Matriz triangular inferior:** Es una matriz que tiene elementos por abajo de la diagonal principal diferentes a cero, y todos los que están por arriba iguales a cero. Suele denominarse a esta matriz como L.

$$A = L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & l_{n-1,n-1} & 0 \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

- De manera similar al anterior, existe un algoritmo, este se conoce como sustitución hacia delante:

$$x_1 = b_1 / l_{11}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right)}{l_{ii}} \quad i = 2, \ldots, n \ldots (2)$$

- Los algoritmos de sustitución hacia delante y hacia atrás son de gran importancia para los métodos de Eliminación.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- Este método consiste en transformar la matriz de coeficientes A del SEL a una matriz U del tipo Triangular Superior haciendo uso de transformaciones elementales que permitan realizar esto.
- Dichas transformaciones incluyen:
  - Intercambio de un renglón por otro.
  - Suma o resta entre dos renglones elemento a elemento.
  - Multiplicación de los elementos de un renglón por un escalar, este escalar debe ser necesariamente diferente a cero.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- Durante la transformación del sistema original A al sistema equivalente U las operaciones se realizan sobre la matriz A y al mismo tiempo sobre él termino independiente b, quedando un sistema equivalente a:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{'} & a_{23}^{'} & \cdots & a_{2n}^{'} \\ \vdots & \ddots & a_{33}^{''} & \cdots & a_{3n}^{''} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{'} \\ b_3^{'} \\ \vdots \\ b_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- ***Algoritmo.***
- El primer renglón se multiplica por a_{21}/a_{11} y se resta al segundo renglón para eliminar el primer elemento de este, del mismo modo se hace con el primer elemento de los demás renglones, restando el primer renglón multiplicado por a_{i1}/a_{11} , es importante recordar que también se debe afectar al vector $\bar{b}$, donde:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \left(m_{ik}\right) a_{kj}^{k} \qquad i = k+1, 3, 4, \ldots, n \quad j = k+1, 2, 3, \ldots, n+1$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- ***Algoritmo.***

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \left(m_{ik}\right) a_{kj}^{k} \qquad i = k+1, 3, 4, \ldots, n \quad j = k+1, 2, 3, \ldots, n+1$$

- Esto reduciría el sistema a una matriz diagonal superior U, por lo que se utiliza la sustitución hacia atrás dada por la ecuación 1:

$$x_n = {}^{b_n}\!/_{u_{nn}}$$

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j\right)}{u_{ii}} \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1 \ldots (1)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- ***Algoritmo.***
- Este algoritmo resulta confuso al realizar la prueba de escritorio, ya que se puede observar fácilmente que en realidad no se obtiene una matriz diagonal U, la razón es que el algoritmo no convierte en ceros los elementos por debajo de la diagonal principal, simplemente se ignoran dichos elementos para obtener los valores de las incógnitas del SEL, sin embargo su efectividad está comprobada pero no es el mejor método para utilizar en SEL robustos.

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \left(m_{ik}\right) a_{kj}^{k} \qquad i = k+1, 3, 4, \ldots, n \quad j = k+1, 2, 3, \ldots, n+1$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de eliminación Gaussiana.**
- ***Tarea.***
- Resolver el siguiente SEL realizando la prueba de escritorio del algoritmo de eliminación Gaussiana:
- $$\begin{cases} 2X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 8 \\ X_2 + X_3 - X_4 = 4 \\ 2X_2 + X_3 - X_4 = 2 \\ X_1 - X_2 + 2X_4 = -2 \end{cases}$$

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^{k} - \left(m_{ik}\right) a_{kj}^{k} \quad i = k+1, 3, 4, \ldots, n \quad j = k+1, 2, 3, \ldots, n+1$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de descomposición LU.**
- Una matriz A puede factorizarse como el producto de una matriz triangular inferior L y otra triangular superior U:

$$A = L * U$$

- La descomposición de A seria en función de L y U de la siguiente manera:

$$L \equiv \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U \equiv \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de descomposición LU.**
- Para realizar esta factorización existen tres esquemas:
  - Esquema ***Doolittle*** (mostrado en el ejemplo) Este esquema considera $l_{i,i} = 1$
  - Esquema ***Crout.*** Este esquema considera $u_{i,i} = 1$
  - Esquema ***Choleski.*** Este esquema considera $l_{i,i} = u_{i,i}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{a2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

- De lo visto con eliminación Gaussiana podemos fácilmente concluir que LU no es un método sencillo y que su utilización puede demandar muchos recursos de la computadora para funcionar.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi.**
- El método de Jacobi es un método iterativo, y cuando converge se aproxima a la solución en cada iteración partiendo de un valor inicial, considerando la ecuación:

$$A\bar{x} = \bar{b} \ldots(1)$$

- Se sustituye la matriz *A* por $A = U + R$ donde *U* es una matriz diagonal superior y *R* es otra matriz que contiene ceros en la diagonal principal y los restantes elementos de A, en sus demás elementos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{a2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \ddots & u_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & 0 & \ddots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{a2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$ en donde $a_{i,j} = r_{i,j}$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi.**
- Sustituyendo en (1) se tiene:

$$(D+R)\bar{x}=\bar{b}$$
$$D\bar{x}+R\bar{x}=\bar{b}$$
$$D\bar{x}=\bar{b}-R\bar{x}$$

- Premultiplicando por D^{-1}

$$\bar{x}=D^{-1}\bar{b}-D^{-1}R\bar{x}$$

- Ecuación que se maneja como fórmula de recurrencia:

$$\bar{x}^{(k+1)}=D^{-1}\bar{b}-D^{-1}R\bar{x}^{(k)} \quad k=0,1,2,\ldots$$

- Esto quiere decir que del sistema (1) se despeje x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda, y así sucesivamente.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Algoritmo.***
- Despejar cada una de las incógnitas siguiendo el patrón mencionado anteriormente se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{2,2}}\left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k)} - a_{2,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{3,3}}\left(b_3 - a_{3,1}x_1^{(k)} - a_{3,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{3,n}x_n^{(k)}\right) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n,n}}\left(b_n - a_{n,1}x_1^{(k)} - a_{n,2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,(n-1)}x_{n-1}^{(k)}\right) \\
k = 0,1,2,\ldots
\end{array}\right\} \ldots(2)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Algoritmo.***
- Partiendo de una primera aproximación se tiene:

$$\bar{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right]^T \ldots(3)$$

- Estos valores se sustituirán en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (2) para obtener la siguiente aproximación:

$$\bar{x}^{(1)} = \left[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\right]^T \ldots(4)$$

- Así la siguiente aproximación se obtiene sustituyendo $\bar{x}^{(1)}$:

$$\bar{x}^{(2)} = \left[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}\right]^T \ldots(5)$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Algoritmo.***
- Como ya se mencionó, este método al ser iterativo necesita de un valor inicial, este se obtiene de sustituir el vector $\bar{x}^{(0)} = [0,0,0,\ldots,0]^T$ en los segundos miembros de las ecuaciones del sistema (2), obteniendo:

$$\bar{x} = \left\{ \frac{b_1}{a_{1,1}}, \frac{b_2}{a_{2,2}}, \frac{b_3}{a_{3,3}}, \ldots, \frac{b_n}{a_{n,n}} \right\}^T$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Ejemplo.***
- Resolver el siguiente SEL por medio del método de Jacobi.

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 22 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 = 23 \end{array}\right\}$$

- Despejando x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera, se obtiene:

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2 - x_3\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{8}\left(30 + x_1 - 2x_3\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(23 - x_1 + x_2\right)$$

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Ejemplo.***

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2 - x_3\right)$$

$$x_2 = \frac{1}{8}\left(30 + x_1 - 2x_3\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{6}\left(23 - x_1 + x_2\right)$$

- Escribiendo este sistema en la forma (2):

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(30 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(23 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)$$

$$k = 0,1,2,\ldots$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Ejemplo.***

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{8}\left(30 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{6}\left(23 - x_1^{(k)} - x_2^{(k)}\right)$$
$$k = 0,1,2,\ldots$$

- Entonces el vector inicial es $\bar{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{22}{6} & \frac{30}{8} & \frac{23}{6} \end{bmatrix}^T$, sustituyendo este primer vector inicial en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{6}\left(22 - 2\left(\frac{30}{8}\right) - \frac{23}{6}\right) = 1.778$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{8}\left(30 + x_1^{(0)} - 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{8}\left(30 + \frac{22}{6} - 2\left(\frac{23}{6}\right)\right) = 3.250$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{6}\left(23 - x_1^{(0)} + x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{6}\left(23 - \frac{22}{6} + \frac{30}{8}\right) = 3.847$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi: *Ejemplo.***
- Entonces para $k=0$; $\bar{x}^{(1)} = [1.778 \quad 3.250 \quad 3.847]^T$, continuando con el mismo procedimiento:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{6}\left(22 - 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{6}\left(22 - 2(3.250) - 3.847\right) = 1.942$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{8}\left(30 + x_1^{(1)} - 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{8}\left(30 + 1.778 - 2(3.847)\right) = 3.011$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{6}\left(23 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{6}\left(23 - 1.778 + 3.250\right) = 4.079$$

- Entonces para $k=1$; $\bar{x}^{(2)} = [1.942 \quad 3.011 \quad 3.4079]^T$, continuando con el mismo procedimiento se obtienen los siguientes vectores:

$$k=2\,;\ \bar{x}^{(3)} = [1.989 \quad 2.973 \quad 4.012]^T$$

$$k=3\,;\ \bar{x}^{(4)} = [2.007 \quad 2.995 \quad 3.998]^T$$

$$k=4\,;\ \bar{x}^{(5)} = [2.002 \quad 3.001 \quad 3.998]^T$$

$$k=5\,;\ \bar{x}^{(6)} = [2.000 \quad 3.001 \quad 4.000]^T$$

$$k=6\,;\ \bar{x}^{(7)} = [2.000 \quad 3.000 \quad 4.000]^T$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Jacobi:** ***Ejemplo.***
- Por lo que la solución del sistema es:

$$x_1 = 2.000$$
$$x_2 = 3.000$$
$$x_3 = 4.000$$

- El número de iteraciones aumentara o disminuirá dependiendo de la tolerancia fijada.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Gauss – Seidel.**
- El método de Gauss – Seidel es prácticamente el mismo que el de Jacobi, la diferencia radica en que este cuando converge se aproxima más rápido a la solución.
- ***Algoritmo.*** La rápida convergencia se debe a que la componente $x_i^{(k+1)}$ una vez que fue calculada se utiliza inmediatamente dentro de la misma iteración, es decir:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{1,1}}\left(b_1 - a_{1,2}x_2^{(k)} - a_{1,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1,n}x_n^{(k)}\right) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{2,2}}\left(b_2 - a_{2,1}x_1^{(k+1)} - a_{2,3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2,n}x_n^{(k)}\right) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{3,3}}\left(b_3 - a_{3,1}x_1^{(k+1)} - a_{3,2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{3,n}x_n^{(k)}\right) \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{n,n}}\left(b_n - a_{n,1}x_1^{(k+1)} - a_{n,2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}\right) \\
k = 0,1,2,\ldots
\end{array}\right\}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Gauss – Seidel.**
- Tarea #. Resolver el siguiente SEL por medio del método de Gauss – Seidel realizando la prueba de escritorio del algoritmo.

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + x_3 &= 22 \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 30 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 &= 23 \end{aligned}\right\}$$

- Tarea #. Leer el artículo “How to Build Reliable Code” y hacer un breve comentario del mismo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- ***Convergencia del Método de Jacobi y Gauss - Seidel.***
- Ambos métodos tienen como principal desventaja de no siempre converger a la solución del sistema, o en algunas ocasiones lo hacen pero de manera muy lenta.
- Para poder aplicar estos métodos los elementos de la diagonal principal de la matriz *A* de coeficientes deben ser diferentes de cero.
- Existe una condición necesaria para que estos converjan y consiste en que dichos elementos de la diagonal principal además de ser diferentes de cero sean mayores en valor absoluto que la suma de los demás elementos del renglón correspondiente.
- Cuando esta condición se cumple garantiza la convergencia, pero de no cumplirse no se puede afirmar la no convergencia.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Thomas.**
- El método de Thomas es un algoritmo utilizado para dar solución a sistemas de ecuaciones lineales que tienen la forma tridiagonal:

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\
 & a_3 & b_3 & c_3 & & & & \\
 & & a_4 & b_4 & c_4 & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
 & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\
 & & & & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}
$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Thomas.**
- Este tipo de sistemas se tiene cuando se aproxima la ecuación de difusividad por medio de diferencias finitas, para un solo fluido y en una dirección.
- La ventaja es que no es necesario almacenar toda la matriz, solo los elementos que se encuentran en las tres diagonales, es decir, , en forma de vectores, esto permite el ahorro de recursos computacionales además de tiempo en el cálculo.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Thomas.**
- **Algoritmo.**
- Para i=1 se tiene:

$$w_1 = \frac{c_1}{b_1} \quad \text{y} \quad g_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

- Para i=2,3,…,n-1

$$w_i = \frac{c_i}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

- Para i=2,3,…,n

$$g_i = \frac{d_i - a_i g_{i-1}}{b_i - a_i w_{i-1}}$$

- Realizando sustitución hacia atrás, para i=n

$$x_n = g_n$$

- Para n-1,n-2,n-3,…,2,1

$$x_i = g_i - w_i x_{i+1}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & & \\ & & a_4 & b_4 & c_4 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Thomas.**
- **Tarea.** Resolver los siguientes SEL tridiagonales:
-

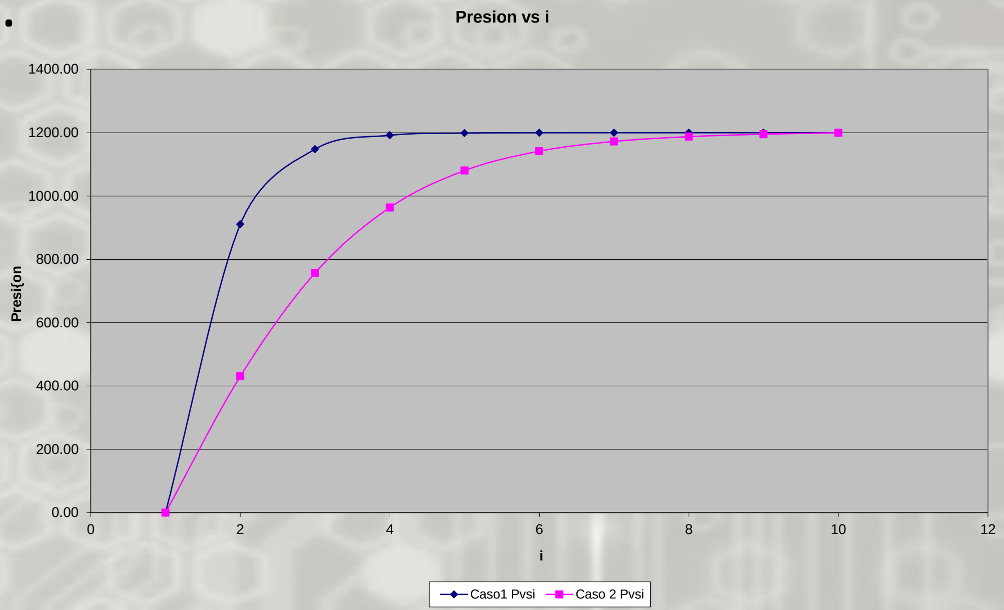
i	a(i)	b(i)	c(i)	d(i)
1	0.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
2	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-1.839327347E+08
3	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.106029904E+08
4	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.133265227E+08
5	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.135683922E+08
6	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.135885091E+08
7	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.135901281E+08
8	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.135902562E+08
9	4.708315231E+00	-3.523217251E+01	4.708315231E+00	-2.135902662E+08
10	0.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00	8.273708400E+06

i	a(i)	b(i)	c(i)	d(i)
1	0.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00	0.000000000E+00
2	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-1.036264083E+08
3	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-1.658814244E+08
4	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-1.949159631E+08
5	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-2.067261576E+08
6	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-2.111646327E+08
7	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-2.127551461E+08
8	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-2.133100921E+08
9	3.766652185E+01	-1.011485857E+02	3.766652185E+01	-2.135055896E+08
10	0.000000000E+00	1.000000000E+00	0.000000000E+00	8.273708400E+06

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **Método de Thomas.**
- **Tarea.** Realizar los cálculos en Excel haciendo uso del algoritmo de Thomas, los resultados obtenidos representan la caída de presión en un intervalo de tiempo en un yacimiento, considerando una sola dimensión y propiedades homogéneas dentro del mismo, además de un solo tipo de fluido, a lo largo de diez bloques. Graficar los resultados P vs i y hacer un breve análisis de lo que puede estar pasando.
-



GRACIAS

Ing. Juan Carlos Sabido Alcántara

Ingeniero Petrolero

Facultad de Ingeniería UNAM