OPERADORES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

En esta sección se estudia algunos tipos especiales de operadores que actúan en espacios vectoriales donde se tiene definido un producto interno. En particular aquellos para los cuales existe una base ortonormal del espacio formada por vectores característicos del operador. Para estos operadores se tiene una representación matricial diagonal y una descomposición en términos de proyecciones ortogonales sobre sus espacios característicos.

ADJUNTO DE UN OPERADOR LINEAL

Los tipos especiales de operadores pueden quedar definidos y clasificados convenientemente a partir del concepto de operador adjunto, cuya definición y propiedad se ven a continuación.

DEFINICION

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ operador lineal. Un operador $T^* : V \rightarrow V$ se dice que es adjunto de T si

$$(T(\bar{u}) | \bar{v}) = (\bar{u} | T^*(\bar{v})) \quad , \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V$$

TEOREMA

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y con producto interno, entonces para cada operador lineal $T : V \rightarrow V$ existe un único adjunto T^* , que también es lineal.

Cabe comentar que el anterior teorema no se cumple para espacios de dimensión infinita, debido a que en este caso no es posible garantizar la existencia del adjunto. Aunque la unicidad y linealidad de T^* si se verifican cuando éste existe.

Muchas propiedades que involucran el concepto de adjunto son independientes de la dimensión del espacio, por lo que en lo sucesivo sólo se indica que la dimensión es finita cuando tal restricción se requiera por otra razón diferente a la existencia de T^* , la cual se presupondrá siempre que se hable de éste.

Regresando al caso de dimensión finita, hay una relación entre las representaciones matriciales de los operadores T y T^* cuando éstas se encuentran referidas a una base ortonormal.

Dicha relación, que puede emplearse para obtener el adjunto de un operador dado, es la siguiente: si A es la representación matricial de T en una base ortonormal, entonces A^* (la conjugada transpuesta de A) es la representación matricial de T^* en dicha base. De lo anterior se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y sea B una base ortonormal de V . Si $T^*: V \rightarrow V$ es un operador lineal, entonces

$$M_B^B(T^*) = \left[M_B^B(T) \right]^*$$

EJEMPLO: Considerando el operador $T: C^2 \rightarrow C^2$ definido por

$$T(x, y) = (-x - 5iy, (2 - i)y)$$

obtener el adjunto de T .

TEOREMA

Sean V un espacio con producto interno, W un subespacio de V y $T^*: V \rightarrow V$ un operador lineal:

- i) $T^*(V) = N(T)^\perp$
- ii) $N(T^* \circ T) = N(T)$

OPERADORES NORMALES, HERMITIANOS, ANTIHERMITIANOS Y UNITARIOS

DEFINICION

Sea V un espacio con producto interno y sea $T: V \rightarrow V$ operador lineal. Se dice que T es normal si $T \circ T^* = T^* \circ T$.

De esta definición se sigue de inmediato que si T es normal T^* también es normal y viceversa. Los operadores normales tienen las siguientes propiedades.

TEOREMA

Sea V un espacio con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ operador normal:

- i) $\|T(\bar{v})\| = \|T^*(\bar{v})\|, \forall \bar{v} \in V$
- ii) Si $T(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ entonces $T^*(\bar{v}) = \bar{\lambda} \bar{v}$
- iii) Si $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ son vectores característicos de T correspondientes a los valores λ_1, λ_2 y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $(\bar{v}_1 | \bar{v}_2) = 0$

Algunos casos particulares de operadores normales reciben nombres especiales debido a que sus características propias son de interés para la teoría de operadores lineales.

Estos tipos de operadores suelen distinguirse con diferentes nombres cuando el espacio vectorial está definido sobre el campo de los números complejos y cuando está definido sobre el campo de los números reales. En la siguiente definición los nombres corresponden al segundo caso, que en adelante se llamará “caso real” por brevedad aparecen entre paréntesis.

DEFINICION

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{R}$) con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ operador lineal, se dice que

- i) T es hermitiano (simétrico) si $T^* = T$
 - ii) T es antihermitiano (antisimétrico) si $T^* = -T$
 - iii) T es unitario (ortogonal) si $T^* = T^{-1}$
-

TEOREMA

Sea V un espacio con producto interno y sea λ un valor característico del operador lineal $T : V \rightarrow V$

- i) si $T^* = T$ entonces λ es real
 - ii) si $T^* = -T$ entonces λ es imaginario
 - iii) si $T^* = T^{-1}$ entonces $|\lambda| = 1$
-

Este teorema permite obtener algunas conclusiones interesantes con respecto a los tipos de operadores anteriormente definidos, entre las que se encuentran a las siguientes.

Del enunciado i) se deriva que los valores característicos de un operador hermitiano, cuando existen, son números reales. Este mismo enunciado conduce a un resultado trivial en el caso de los operadores simétricos, puesto que el campo de donde se toman los escalares, y por tanto los valores característicos, es el de los números reales.

El enunciado ii) indica que los valores característicos de un operador antihermitiano, cuando existen, son números imaginarios puros; es decir, números complejos cuya parte real es nula.

En el caso de operadores antisimétricos dicho enunciado nos permite concluir que, para este tipo de operadores, el único valor característico es el cero.

El enunciado iii) asegura que los valores característicos de un operador unitario, de existir, son números complejos cuyo módulo es de tamaño uno.

Para los operadores ortogonales, este enunciado indica que sus valores característicos, de existir, son necesariamente igual a 1 ó a -1.

Finalmente, cabe hacer énfasis en que el teorema anterior no se ocupa de la existencia de los valores característicos, sino de las propiedades de éstos cuando existen. El problema de la existencia de los valores característicos es diferente en el caso de un espacio vectorial complejo y en el de un espacio vectorial real, por lo que ambos deben abordarse por separado, como se hace en el siguiente apartado.

Previo a ello se presenta una característica para las representaciones matriciales de los tipos de operadores definidos anteriormente, cuando están referidas a bases ortogonales.

TEOREMA

Sea V un espacio con producto interno, B una base ortonormal de V , $T : V \rightarrow V$ un operador lineal y A la representación matricial de T referida a la base B :

- i) $T^* = T$ si y solo si $A^* = A$
- ii) $T^* = -T$ si y solo si $A^* = -A$
- iii) $T^* = T^{-1}$ si y solo si $A^* = A^{-1}$

Considerando las definiciones de algebra de matrices y tomando en cuenta que $A^* = A^T$ cuando A es una matriz con elementos en $\mathbb{R}$, el teorema anterior nos permite concluir lo siguiente.

Un operador es hermitiano (simétrico) si y solo si su representación matricial es una base ortonormal es una matriz hermitiana (simétrica). A una conclusión semejante se llega para operadores antihermitianos (antisimétricos) y unitarios (ortogonales).

Así por ejemplo, el operador $T : R^2 \rightarrow R^2$ definido por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, 2x - 3y)$$

es un operador simétrico puesto que su representación matricial en la base canónica de R^2 , que es una base ortonormal, es la una matriz

$$M(T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

que es una matriz simétrica.

Si en lugar de la base canónica elegimos la siguiente base ortonormal de R^2

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}} \right), \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \right\}$$

se obtendrá la representación matricial

$$M_B^B = \begin{bmatrix} \frac{-19}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

que es también una representación simétrica.

PROYECCIONES ORTOGONALES Y EL TEOREMA ESPECTRAL

Un operador normal T se puede “descomponer” como combinación lineal de ciertos operadores conocidos como proyecciones ortogonales.

TEOREMA

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (sobre $\mathbb{R}$), de dimensión finita y con producto interno y sea $T : V \rightarrow V$ un operador normal (simétrico).

Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son los diferentes valores característicos de T , $E(\lambda_i)$ es el espacio característico correspondiente a λ_i y P_i es la proyección ortogonal sobre $E(\lambda_i)$, entonces:

- i) $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \dots + \lambda_k P_k$
- ii) $P_1 + P_2 + \dots + P_k = I$
- iii) $P_i \circ P_j = 0$, para $i \neq j$

A la expresión i) del teorema anterior se le conoce como “descomposición espectral” del operador T , y como se sigue de lo que se ha visto, tal descomposición es única (salvo en el orden de los sumandos)

EJERCICIO Obtener la descomposición espectral del operador $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$T(x, y, z) = (3x + 2y, 2x + 3y, 5z)$$

cuya matriz asociada al operador lineal es

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCION

Como la matriz asociada al operador es simétrica por lo tanto el operador es igualmente simétrico. Entonces T tiene una descomposición en términos de proyecciones ortogonales sobre sus espacios característicos.

Para obtener dichas proyecciones, así como la descomposición espectral de T , se determinan primero los valores característicos del operador a partir del polinomio

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(5-\lambda) - 4(5-\lambda) = (5-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda)$$

cuyas tres raíces son los valores característicos $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = 1$, de los cuales solo dos son diferentes. Designado a éstos como $\lambda_1 = 5$, y $\lambda_2 = 1$, sus espacios correspondientes son

$$E(\lambda_1) = \{ (a, a, b) \mid a, b \in R \}$$

y

$$E(\lambda_2) = \{ (c, -c, 0) \mid c \in R \}$$

Estos espacios tienen la siguiente interpretación geométrica: $E(\lambda_1)$, que es un espacio de dimensión dos, corresponde a un plano perpendicular al plano $X - Y$ y que forma un ángulo de 45° con el plano $X - Z$; mientras que $E(\lambda_2)$, que es un espacio de dimensión uno, corresponde a una recta alojada en el plano $X - Y$ y de ecuación $y = -x$. Claramente, $E(\lambda_1)$ y $E(\lambda_2)$ son complementos ortogonales. Por lo tanto R^3 es la suma directa de los espacios característicos de T ; esto es $R^3 = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2)$ por lo que la expresión

$$(x, y, z) = (a, a, b) + (c, -c, 0) \text{ es única.}$$

En efecto, se tiene que $\forall (x, y, z) \in R^3$

$$(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z \right) + \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0 \right)$$

lo que determina las proyecciones

$$P_1(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z \right) \dots\dots\dots(1)$$

y

$$P_2(x, y, z) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0 \right) \dots\dots\dots(2)$$

Como es de esperarse, se verifica que

$$\begin{aligned} 5P_1(x, y, z) + P_2(x, y, z) &= 5\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, z \right) + \left(\frac{x-y}{2}, \frac{-x+y}{2}, 0 \right) \\ &= (3x + 2y, 2x + 3y, 5z) \end{aligned}$$

$$5P_1(x, y, z) + P_2(x, y, z) = T(x, y, z)$$

por lo que

$$5P_1 + P_2 = T$$

con P_1 y P_2 definidos por las ecuaciones (1) y (2), es la proyección espectral del operador T .