POLINOMIOS

DEF. Llamaremos polinomio en x con coeficientes en C a una expresión de la forma

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

GRADO DE UN POLINOMIO

DEF. Sea el polinomio en x con coeficientes en C

$$p(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

si $a_n \neq 0$

el entero no negativo n es el grado del polinomio, lo que representamos con

$$gr(p) = n$$

LA IGUALDAD DE POLINOMIOS

DEF. Sean los polinomios en x con coeficientes en C

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

y

$$g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

Diremos que son iguales, lo que representaremos con $f(x) = g(x)$, cuando:

i) $a_k = b_k$ para $k \leq n$ y $b_k = 0$ para $n < k \leq m$, si $n < m$,

ii) $a_k = b_k$ para $k \leq n$, si $n = m$

iii) $a_k = b_k$ para $k \leq m$ y $a_k = 0$ para $m < k \leq n$, si $n > m$

LA ADICIÓN DE POLINOMIOS

DEF. Sean los polinomios en x con coeficientes en C

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

y

$$g(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

El polinomio $f(x) + g(x)$ se define como

$$f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k$$

TEOREMA

Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en x con coeficientes en C , entonces:

i) $f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x)$

$$\text{ii) } f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$$

iii) Existe un polinomio $\theta(x)$ tal que
$$f(x) + \theta(x) = f(x)$$

iV) Existe un polinomio $-f(x)$ tal que

$$f(x) + [-f(x)] = \theta(x)$$

LA SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

DEF. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en C , el polinomio $f(x) - g(x)$ se define como

$$f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$$

LA MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

DEF. Sean los polinomios en x con coeficientes en C

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

y

$$g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

El polinomio $f(x)g(x)$ se define como

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

$$\text{donde } c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$$

TEOREMA

Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $f(x)[g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]h(x)$

ii) $f(x)g(x) = g(x)f(x)$

iii) Existe un polinomio $u(x)$ tal que
$$f(x) u(x) = f(x)$$

TEOREMA

Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios en x con coeficientes en C , entonces:

i) $f(x)[g(x)+h(x)]=[f(x)g(x)]+[f(x)h(x)]$

DIVISIBILIDAD

FACTOR

DEF. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en C y $g(x) \neq 0$:

$g(x)$ es un factor de $f(x)$ si existe un polinomio $q(x)$ con coeficientes en C tal que

$$f(x) = g(x)q(x)$$

se dice entonces que $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

TEOREMA

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios en x con coeficientes en C . Si $g(x) \neq 0$, existen dos polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ con coeficientes en C tales que

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

donde $\text{gr}(r) < \text{gr}(g)$ o bien $r(x)=0$

TEOREMA DEL RESIDUO

Sean $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en C y $c \in C$. El residuo de dividir $p(x)$ entre $x - c$ es igual a $p(c)$.

TEOREMA DEL FACTOR

Sean $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en C y $c \in C$. $p(x)$ es divisible entre $x - c$ si y sólo si $p(c)=0$.

División sintética

Cuando se divide un polinomio entre un polinomio de la forma $x - c$, se pueden introducir algunas simplificaciones al procedimiento general de la división hasta llegar a lo que se conoce como “división sintética”.

RAÍCES DE UN POLINOMIO

DEF. Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en C y sea α un número complejo. α es una raíz de $p(x)$ si $p(\alpha)=0$.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en C de grado mayor o igual que uno, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en C .

TEOREMA

Si $p(x)$ es un polinomio en x con coeficientes en C de grado $n \geq 1$, entonces $p(x)$ tiene n raíces.

Las raíces de un polinomio con coeficientes en Q pueden ser de tres tipos:

- a) Raíces racionales.
- b) Raíces irracionales.
- c) Raíces complejas.

RAÍCES RACIONALES

TEOREMA

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio en x con coeficientes enteros, donde $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$ y $n \geq 1$. Si un número racional es raíz de $p(x)$ y $\frac{p}{q}$

es su mínima expresión, entonces es un factor de a_0 y q es un factor de a_n .

TEOREMA

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si a y b son dos números reales tales que $a < b$ y $p(a)$, $p(b)$ tienen signos contrarios, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz real α en el intervalo $a < \alpha < b$.

COTAS DE LAS RÍCES REALES

TEOREMA

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio en x con coeficientes reales y $a_n > 0$.

- i) Si $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, y no existen números negativos en el tercer renglón de la división sintética de

$p(x)$ entre $x-s$, entonces para toda raíz real α de $p(x)$ se tiene que $\alpha < s$.

ii) Si $t \in R$, $t < 0$, y los números del tercer renglón de la división sintética de $p(x)$ entre $x-t$ son alternadamente positivos y negativos, entonces para toda raíz real α de $p(x)$ se tiene que $t < \alpha$. Los ceros en este tercer renglón podrán considerarse positivos o negativos a efecto de lograr los signos alternados.

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

TEOREMA

Sea

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polinomio en x con coeficientes reales y $a_0 \neq 0$;

- i) El número de raíces reales positivas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio $p(x)$, o menor que éste en un número par.
- ii) El número de raíces reales negativas de $p(x)$ es igual al número de cambios de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio en x que se obtiene al sustituir x por $-x$ en $p(x)$, o menor que éste en un número par.

RAÍCES IRRACIONALES

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Si $\alpha = a + b\sqrt{c}$, con $b \neq 0$ y $c \neq 0$, donde a y b son racionales y $\sqrt{c}$ es un irracional, entonces $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{c}$ también es raíz de $p(x)$.

RAÍCES COMPLEJAS

TEOREMA

Sea $p(x)$ un polinomio en x con coeficientes en $\mathbb{R}$. Si $\alpha = a + bi$, con $b \neq 0$, es una raíz de $p(x)$ entonces $\bar{\alpha} = a - bi$ es otra raíz de $p(x)$.