

CONCEPTO TRADICIONAL DE FUNCIÓN

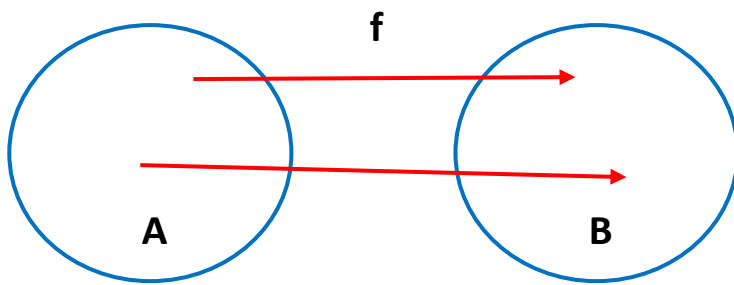
Cuando dos variables están relacionadas en tal forma que a cada valor de la primera corresponde un valor de la segunda, se dice que la segunda es función de la primera.

La variable cuyo valor puede fijarse a voluntad es la variable independiente y aquella cuyo valor depende del que se le dé a la independiente se llama variable dependiente.

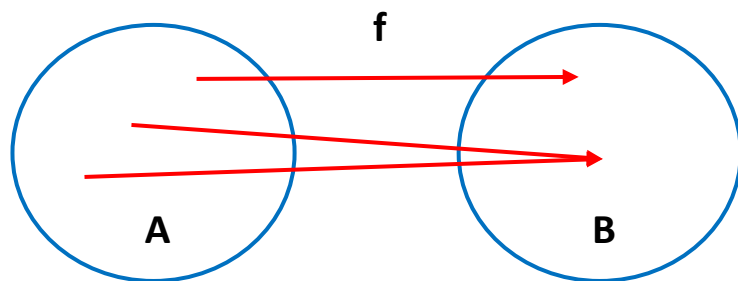
Si x es la variable independiente en una función y “ y ” es la variable dependiente se acostumbra escribir $y = f(x)$.

ENFOQUE “MODERNO” DE FUNCIÓN

Este enfoque está basado en la teoría de conjuntos. Así, una función es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A (Dominio) un único elemento “ y ” de un conjunto B (Codominio). Esquemáticamente:

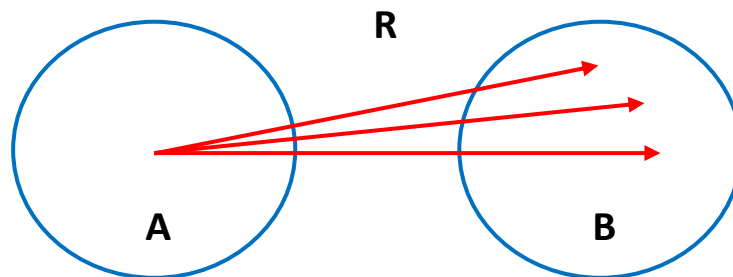


Relación “uno a uno” (biunívoca)



Relación uniforme (unívoca)

Toda función es una relación, pero no toda relación es una función. Las relaciones multiformes NO son funciones.



Relación multiforme

Para verificar que cualquier relación sea una función se sugiere tabular y graficar la ecuación de la regla de correspondencia y cortar la gráfica con rectas verticales. Ninguna de estas rectas debe cortar más de una vez la gráfica.

Una función puede expresarse “por comprensión” como $f = \{ (x, y) \mid x \in A, y = f(x) \}$ o bien “por extensión” escribiendo todas las parejas que la forman $f = \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n) \}$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

Son funciones donde los elementos que intervienen pertenecen al conjunto de los números reales, es decir, que tanto la variable independiente x como la variable dependiente “ y ” son números reales (unión de los racionales y los irracionales).

INTERVALOS

Sean los números reales a y b tal que $a < b$. Se llama intervalo al conjunto de los números comprendidos entre a y b .

Los intervalos pueden ser finitos o infinitos, abiertos o cerrados.

Intervalos finitos

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} \quad \text{abierto}$$

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} \quad \text{cerrado}$$

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} \quad \text{semiabierto por la izq.}$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} \quad \text{semiabierto por la der.}$$

Intervalos infinitos, en donde $x \in \mathbb{R}$

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\} \quad \text{abierto}$$

$$[a, \infty) = \{x \mid x \geq a\} \quad \text{cerrado por la izq.}$$

$$(-\infty, a) = \{x \mid x < a\} \quad \text{abierto}$$

$$(-\infty, a] = \{x \mid x \leq a\} \quad \text{cerrado por la der.}$$

$$(-\infty, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{abierto}$$

En un intervalo abierto (a, b) los extremos a y b no forman parte del mismo.

En un intervalo cerrado $[a, b]$ los extremos a y b forman parte de él.

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de valores que toma la variable independiente. Esto es, si $f = \{ (x, y) \mid x \in A, y = f(x) \}$ el dominio de la función es $D_f = A$

CODOMINIO (CONTRADOMINIO) DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de valores posibles para la variable dependiente “ y ”. En el caso de las funciones reales de variable real, el codominio es precisamente el conjunto de los números reales.

RANGO DE UNA FUNCIÓN

Es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. Esto es, si $f = \{ (x, y) \mid x \in A, y = f(x) \}$ el rango de la función es $R_f = \{ y \mid y = f(x), x \in D_f \}$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA O GEOMÉTRICA DE UNA FUNCIÓN

Una función se representa por el conjunto de puntos del plano, cuyas coordenadas son las parejas ordenadas de números reales (x, y) que constituyen la función.

En otras palabras, la gráfica de una función es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$ cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $y = f(x)$.

CLASIFICACIÓN DE LAS FUNCIONES

Las funciones se clasifican de acuerdo con la información que pueda obtenerse de ellas.

De acuerdo a la variable dependiente “y”

FUNCIONES EXPLÍCITAS

Una función es explícita cuando en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, se tiene despejada la variable dependiente “y” en términos de la variable independiente x.

FUNCIONES IMPLÍCITAS

Son aquellas cuya regla de correspondencia es una ecuación del tipo $f(x, y) = 0$. Una función de este tipo se caracteriza porque en la ecuación que actúa como regla de correspondencia, la variable dependiente “y” no se encuentra despejada.

De acuerdo a su forma

FUNCIONES PARAMÉTRICAS

Una función paramétrica tiene la siguiente forma:

$$f = \{ (x, y) \mid x = f(t), y = g(t), t \in D_f \cap D_g \neq \emptyset \}$$

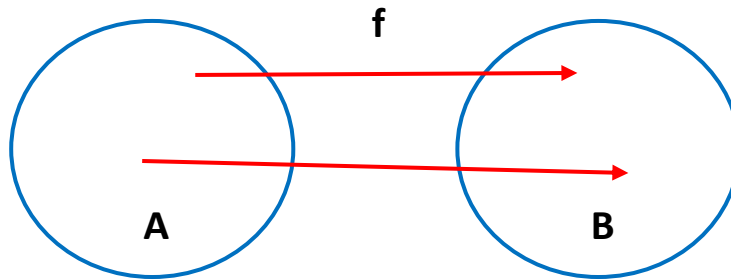
FUNCIONES DEFINIDAS EN DIFERENTES INTERVALOS

Una función puede estar constituida por una o más ecuaciones diferentes que establecen el vínculo entre las variables x, y en diferentes intervalos del dominio.

De acuerdo a la relación entre su dominio y rango

FUNCIONES INYECTIVAS (BIUNÍVOCAS O “UNO A UNO”)

Sean $x_1, x_2 \in D_f$ y $x_1 \neq x_2$. La función f es inyectiva si y sólo si $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es decir, para valores diferentes del dominio deben obtenerse valores diferentes en el rango.



Funciones inyectivas (biunívocas o “uno a uno”)

Para verificar si una función es inyectiva se sugiere tabular y graficar la función y cortar la gráfica con rectas horizontales. Ninguna de estas rectas debe cortar más de una vez la gráfica.

FUNCIONES SUPRAYECTIVAS O SOBREYECTIVAS

Una función es suprayectiva si su codominio es igual a su rango.

FUNCIONES BIYECTIVAS

Una función f es biyectiva si f es inyectiva y además suprayectiva.

De acuerdo a su representación

FUNCIONES ALGEBRAICAS

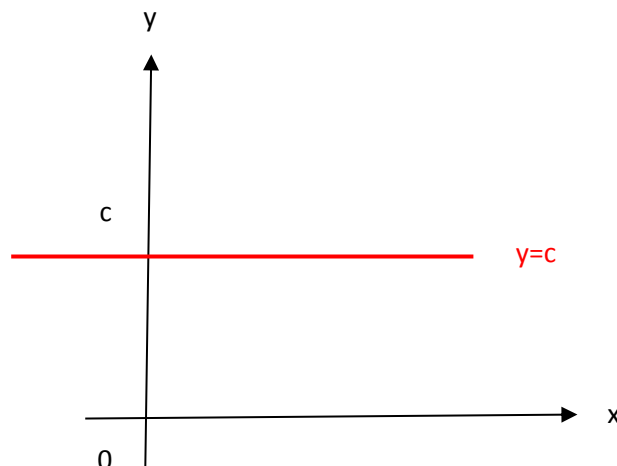
Las funciones algebraicas son aquellas en las que interviene un número finito de operaciones algebraicas de las funciones constante e identidad.

Función constante

Es la función que tiene como dominio el conjunto de los números reales y cuyo rango es un solo número natural. Simbólicamente:

$$C = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = c\} = \{(x, c) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

La gráfica de la función constante es una recta paralela al eje de las abscisas, con ordenada c .



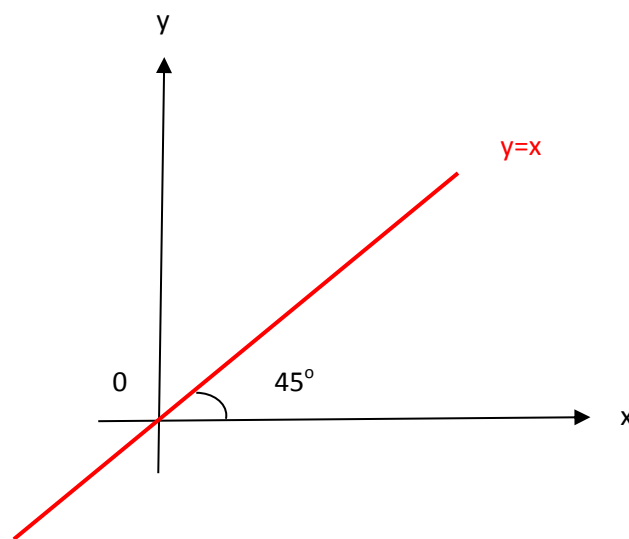
Función lineal

FUNCIÓN IDENTIDAD

Es la que tiene como dominio al conjunto de los números reales y en la que a cada valor de la variable independiente x le corresponde el mismo valor de la variable dependiente “ y ”, por lo que su rango es también el conjunto de los números reales.

La función identidad se representa de la siguiente manera: $I = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = x\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ o bien, $I(x) = x$

La gráfica de la función identidad es la recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ$

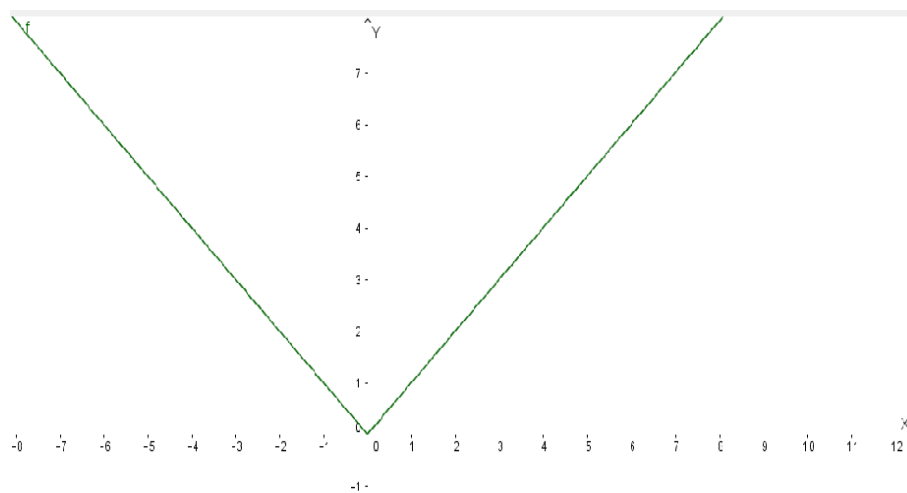


Función valor absoluto

La función permite obtener el mismo valor de la variable independiente, pero si es negativa la función la hace positiva:

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Función entera o polinomial

Son las que se obtienen al efectuar con las funciones constante e identidad un número finito de operaciones de adición, sustracción y multiplicación.

Una función polinomial es de la forma:

$$P = a_0 + a_1 I + a_2 I^2 + \dots + a_n I^n$$

Donde a_k , $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ son funciones constantes, I es la función identidad y el número natural n es el grado de la función polinomial.

Una función de este tipo puede describirse por medio de su regla de correspondencia como:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

cuyo dominio es R , en donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales y n es el grado si $a_n \neq 0$.

Función racional

Se definen como el cociente de dos funciones enteras o polinomiales. Las funciones racionales son de la forma $r = \frac{P_1}{P_2}$ en donde P_1 y P_2 son funciones enteras.

Una función racional puede escribirse como:

$$r(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

donde $P_2(x) \neq 0$

Nota.- Las funciones polinomiales son casos particulares de las funciones racionales.

Función irracional

Son aquéllas en donde además de intervenir operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación, interviene la radicación.

Funciones pares e impares

$$f(-x) = f(x) \quad \text{función par}$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{función impar}$$

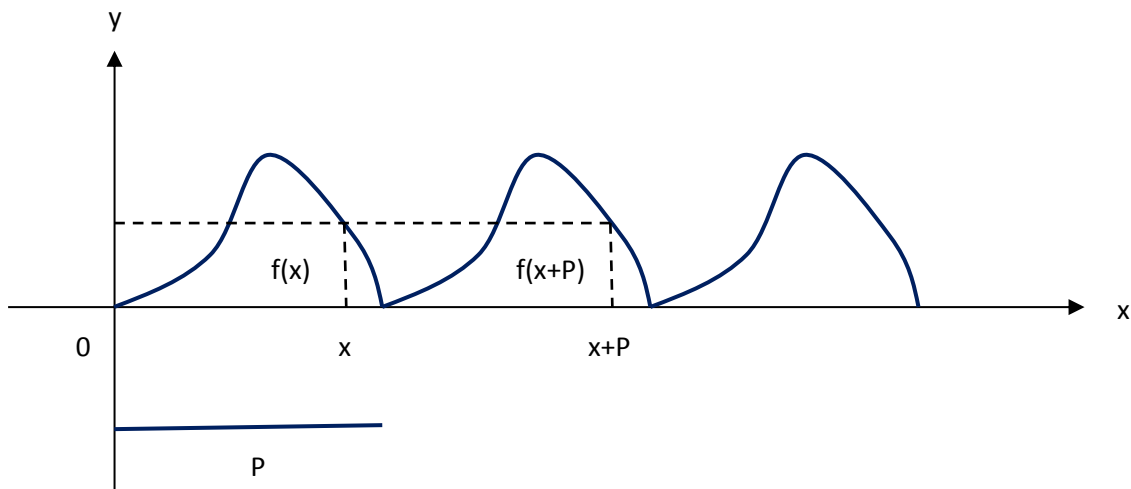
FUNCIONES TRASCENDENTES

Una función que no es algebraica es trascendente. Estas incluyen las funciones circulares directas, circulares inversas, exponenciales de base a y base e ; logarítmicas de base a , base e y base 10 ; y función potencia.

Función trigonométrica

FUNCIONES PERIÓDICAS

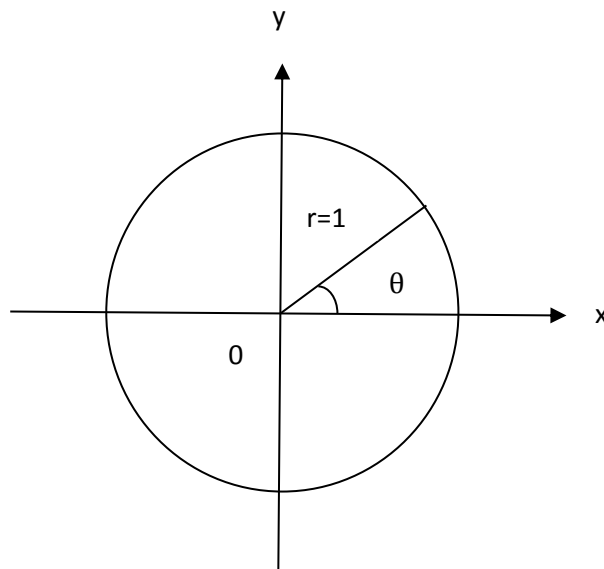
Una función es periódica con período $P > 0$, si siempre que x esté en el dominio de f , entonces $x + P$ también está en el dominio de f y además $f(x + P) = f(x)$. Gráficamente:



Las funciones periódicas no son biunívocas. Tienen importantes aplicaciones en física, como el movimiento ondulatorio, vibraciones, etc.

FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS

Se definen a partir de un círculo unitario de ecuación $x^2 + y^2 = 1$



La función seno está definida por $\sin \theta = y$; y la función coseno por $\cos \theta = x$.

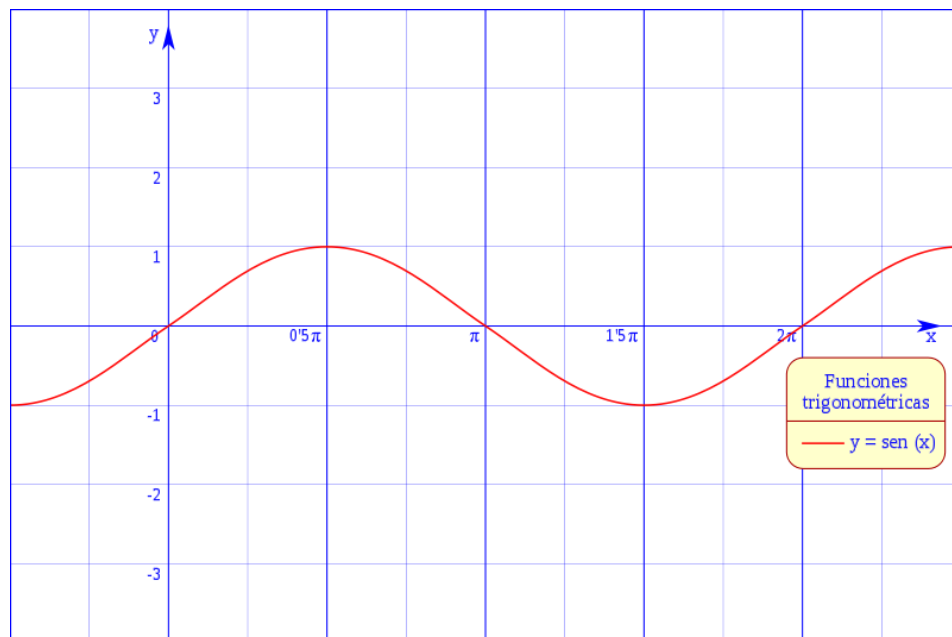
El dominio de ambas funciones es el conjunto de los números reales y su rango es el intervalo $[-1, 1]$. Son continuas en cualquier intervalo de θ .

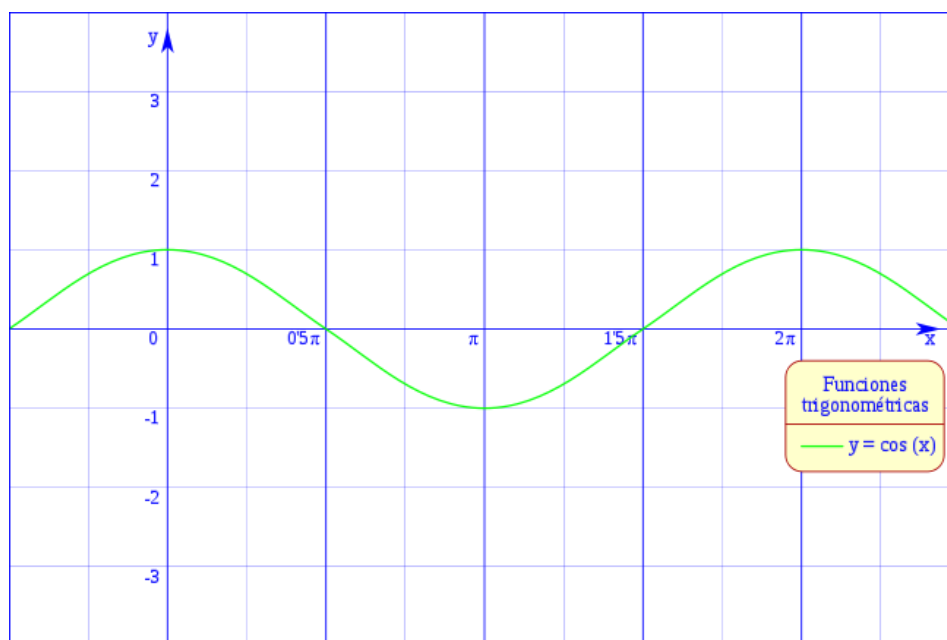
Las funciones seno y coseno son periódicas con período 2π , por lo que:

$$\sin \theta = \sin (\theta + 2\pi)$$

$$\cos \theta = \cos (\theta + 2\pi)$$

[http://es.wikipedia.org/wiki/Seno_\(trigonometr%C3%ADa\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Seno_(trigonometr%C3%ADa))





A partir de las funciones seno y coseno se define la función tangente como:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad \text{donde } \operatorname{cos} \theta \neq 0$$

El dominio de la función tangente es el conjunto de los números reales excluyendo los valores de $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donde $n = 0, +/- 1, +/- 2, \dots$

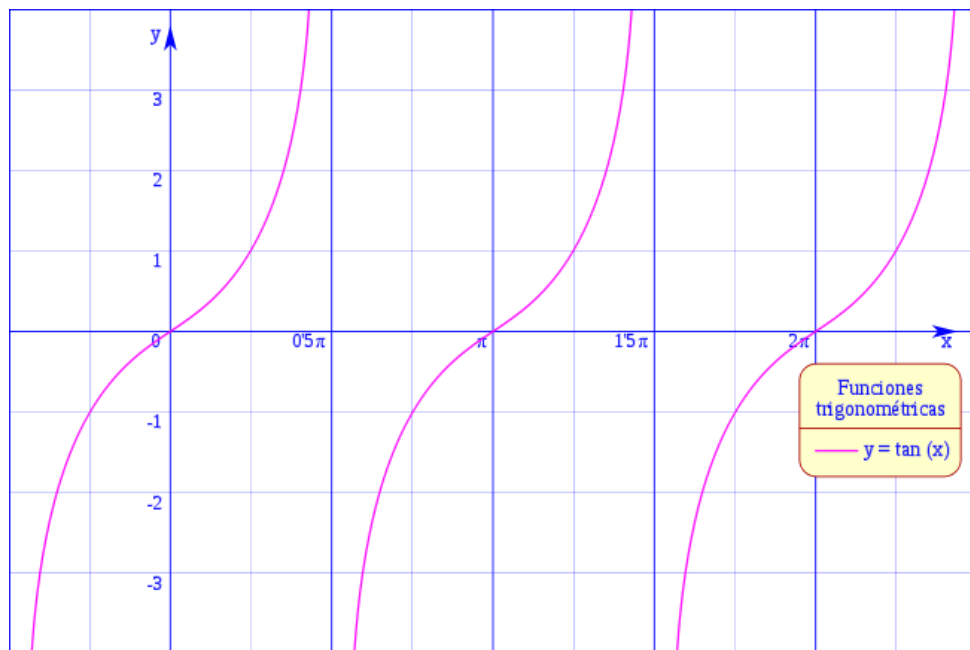
Su rango es el conjunto de los números reales.

La función tangente es una función periódica con período π dado que:

$$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \pi)}{\cos(\theta + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} \theta}{-\cos \theta} = \operatorname{tg} \theta$$

Para valores negativos de θ se tiene:

$$\operatorname{tg}(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = -\operatorname{tg} \theta$$



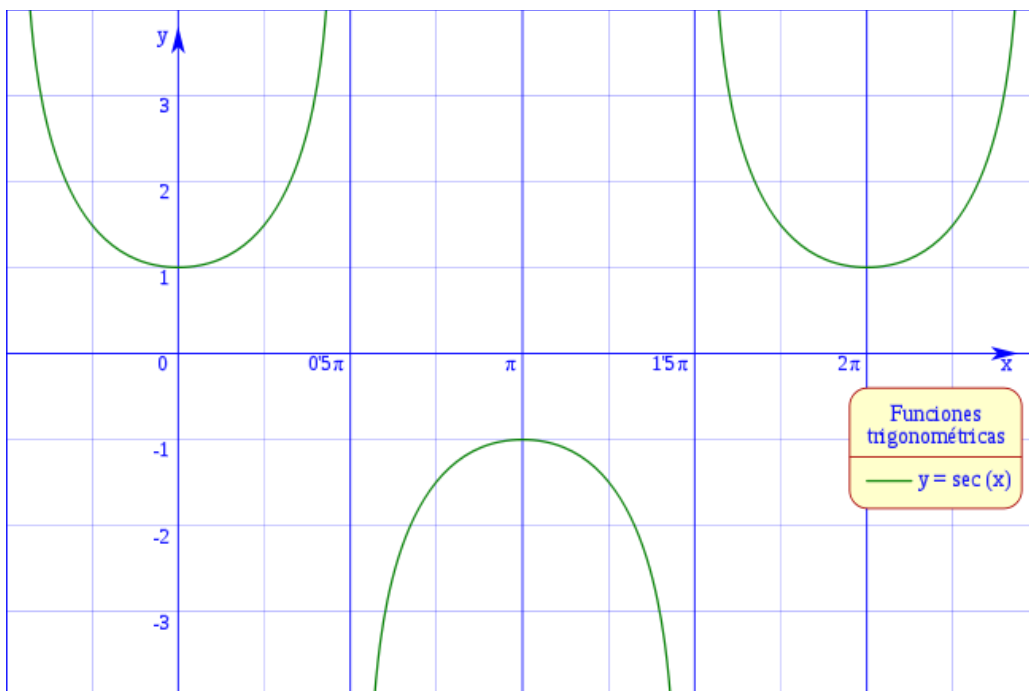
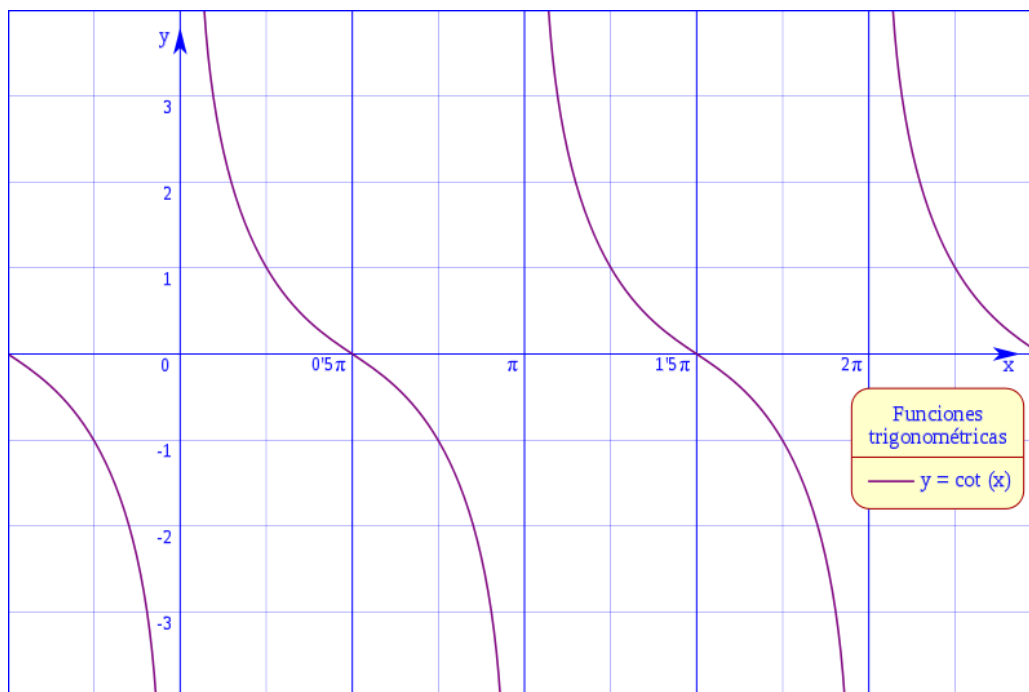
Las funciones trigonométricas cotangente, secante y cosecante se definen como:

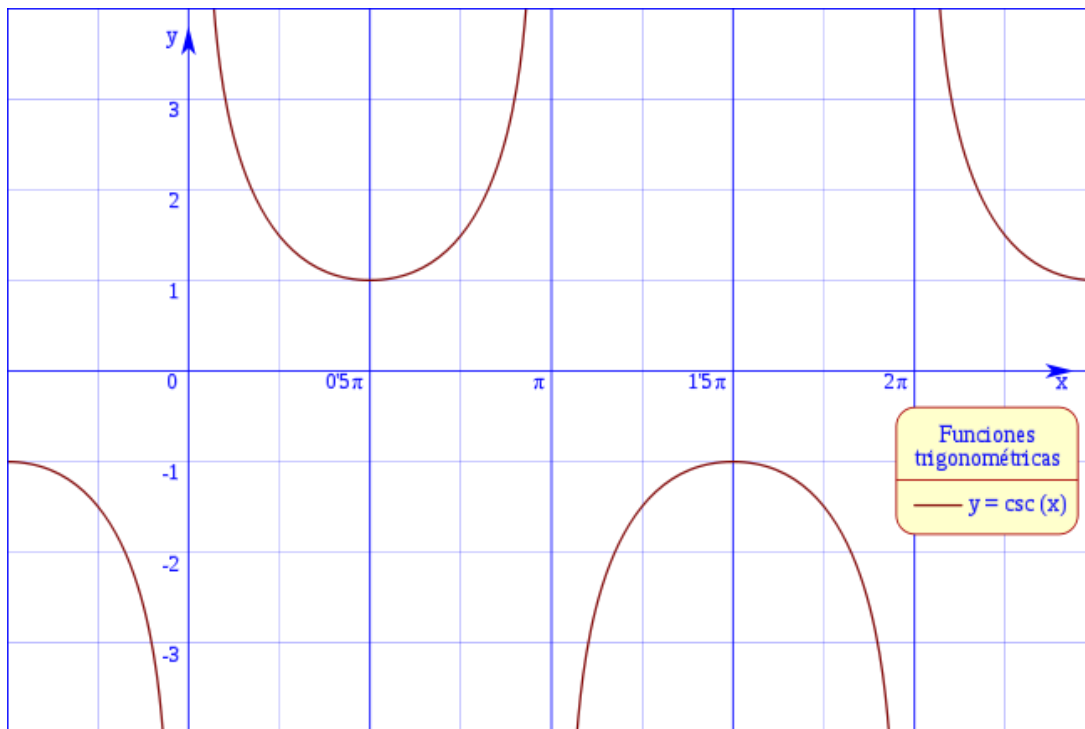
$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta}$$

Las gráficas de estas funciones son:





FUNCIONES INVERSAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las seis funciones trigonométricas descritas son periódicas y por tanto no son biunívocas. Luego la inversa de una función trigonométrica no es función.

No obstante, es posible obtener una función biunívoca de una función trigonométrica restringiendo el dominio. Por ej.:

$$y = \text{sen } x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in [-1, 1]$$

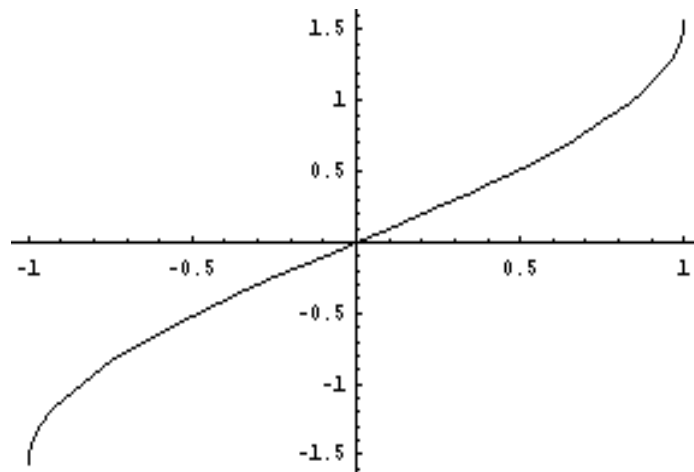
A esta parte de la gráfica se le conoce como la rama principal.

Su función inversa es:

$$x = \text{sen } y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = \text{ang sen } x \leftrightarrow x = \text{sen } y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

y su gráfica

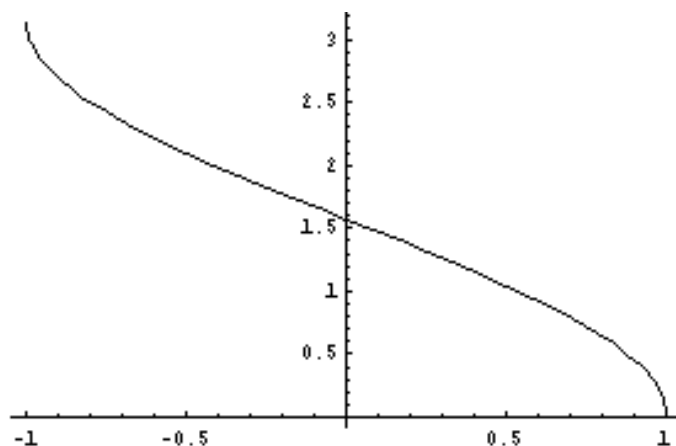


Análogamente, para la función coseno se tiene que si

$$y = \cos x, \quad x \in [0, \pi], \quad y \in [-1, 1] \quad (\text{rama principal})$$

$$x = \cos y, \quad y \in [0, \pi], \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = \text{ang cos } x \leftrightarrow x = \cos y, \quad y \in [0, \pi]$$

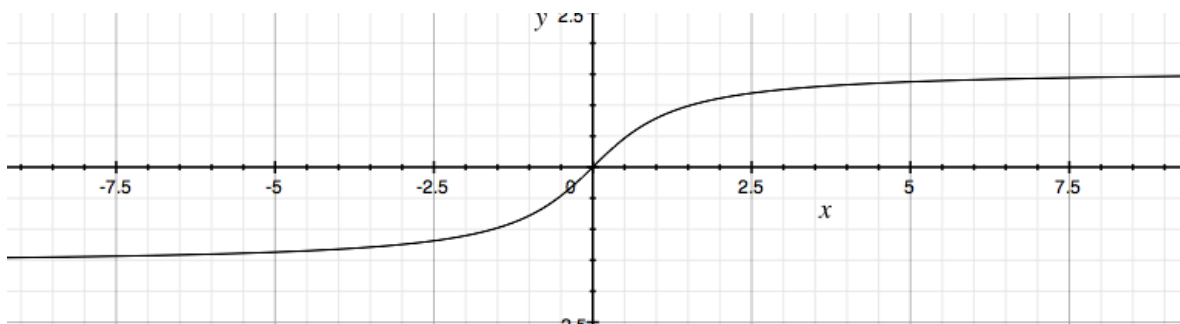


Para la función tangente, si

$$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{rama principal})$$

$$x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{ang} \operatorname{tg} x \leftrightarrow x = \operatorname{tg} y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

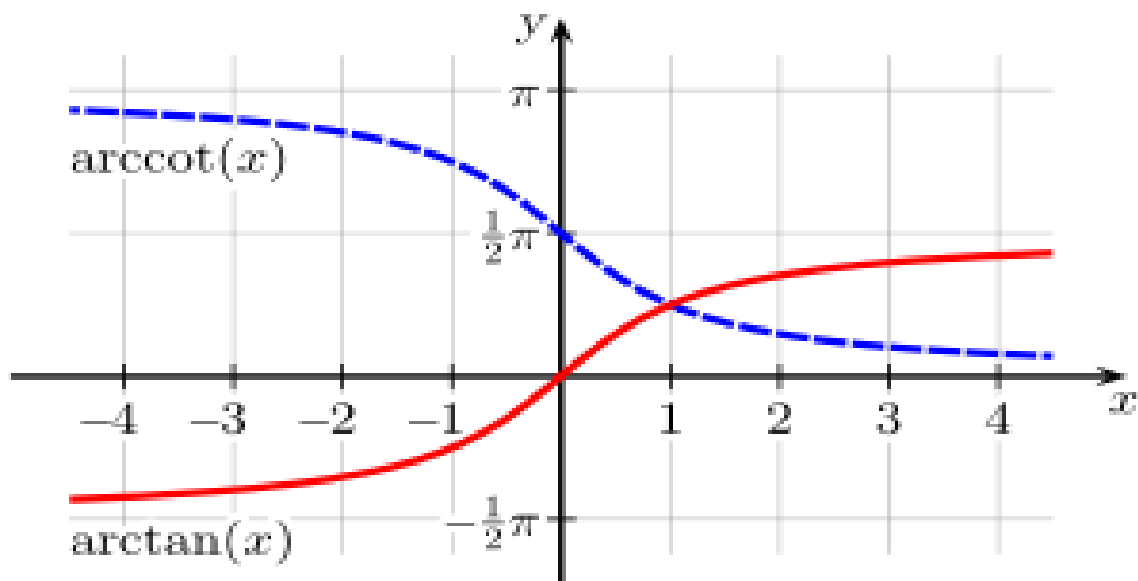
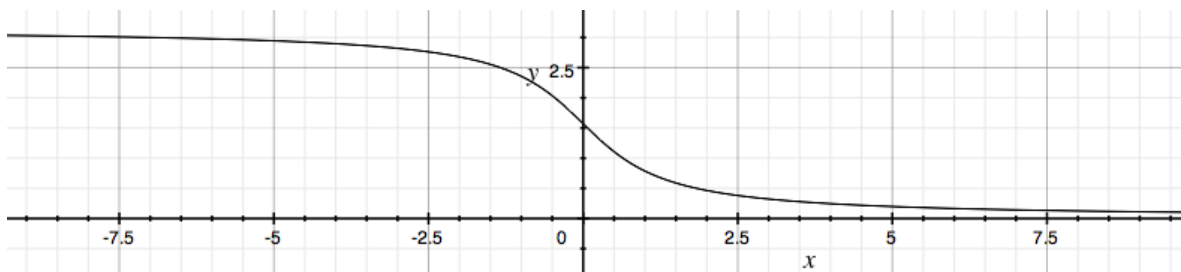


Para la cotangente, si

$$y = \operatorname{ctg} x, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{rama principal})$$

$$x = \operatorname{ctg} y, \quad y \in (0, \pi), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{ctg} x \quad \leftrightarrow \quad x = \operatorname{ctg} y, \quad y \in (0, \pi)$$

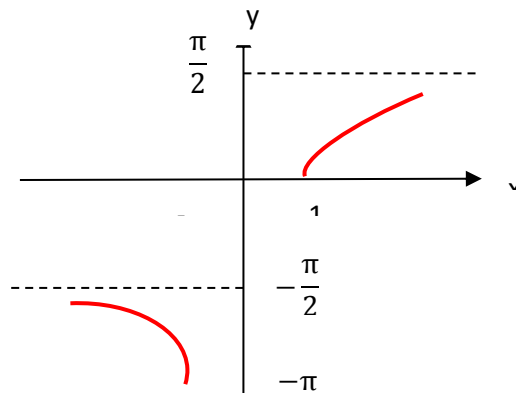


Para la función secante, si

$$y = \sec x, \quad x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad y \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$x = \sec y, \quad y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$y = \operatorname{ang} \sec x \leftrightarrow x = \sec y, \quad y \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

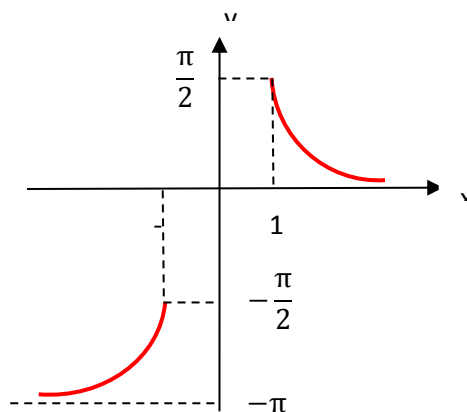


Para la cosecante, si

$$y = \csc x, \quad x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$x = \csc y, \quad y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$$

$$y = \operatorname{ang} \csc x \leftrightarrow x = \csc y, \quad y \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$



Función exponencial

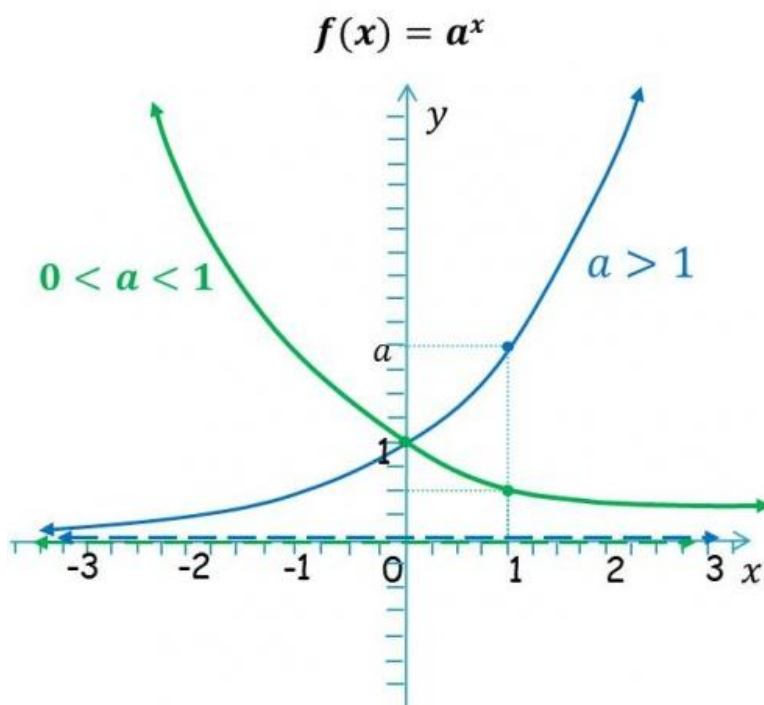
Para cualquier número real positivo $a \neq 1$. La función

$$\text{Exp}_a = \{ (x, y) \mid y = a^x, x \in \mathbb{R} \}$$

se llama función exponencial de base a .

Es necesario que $a > 0$ para evitar tratar con números complejos; el rango de esta función es $(0, +\infty)$, lo que significa que $a^x > 0$ para cualquier valor de x .

La forma de la gráfica depende del valor que tome la base a ; será creciente si $a > 1$ y decreciente si $0 < a < 1$.



La función de x que se define por

$$\text{Exp}_e = \{ (x, y) \mid y = e^x, x \in \mathbb{R} \}$$

se llama función exponencial de base e (el número “ e ” es irracional y vale aproximadamente 2.7182818284). Nótese que es un caso particular de la función exponencial de base a .

La función exponencial natural es creciente y cóncava hacia arriba.

Algunas de sus propiedades son:

- 1) El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$ y el recorrido es $(0, \infty)$.
- 2) La función es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Es un tipo especial de funciones exponenciales. Esta denominación proviene de la comparación entre el área de una región circular y la de una región hiperbólica.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

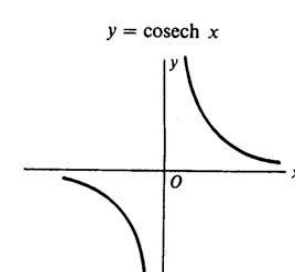
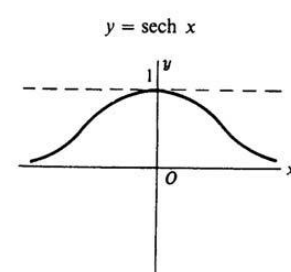
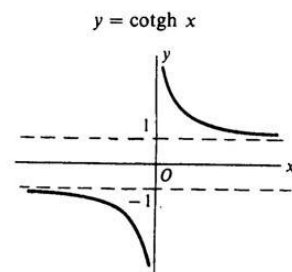
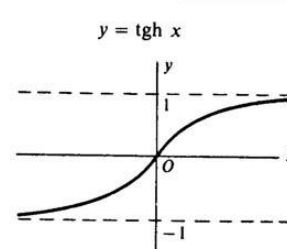
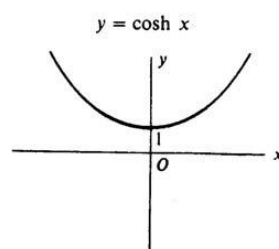
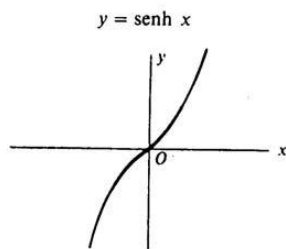
$$\operatorname{csh} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \quad x \neq 0$$



IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

Muchas de las identidades trigonométricas tienen sus correspondientes identidades hiperbólicas. Por ejemplo:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{th}^2 x + \operatorname{sech}^2 x = 1$$

$$\operatorname{ctg} h^2 x - \operatorname{csc} h^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{-1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2}$$

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Como las funciones hiperbólicas se definen en términos de las exponenciales, las funciones hiperbólicas inversas se expresan en términos de las funciones logarítmicas. Así,

$$\operatorname{sh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{dominio } (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{ch}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{dominio } [1, \infty)$$

$$\operatorname{th}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{dominio } (-1, 1)$$

$$\operatorname{ctg} h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$$

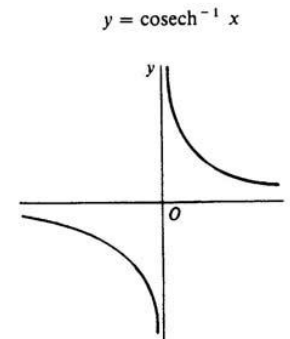
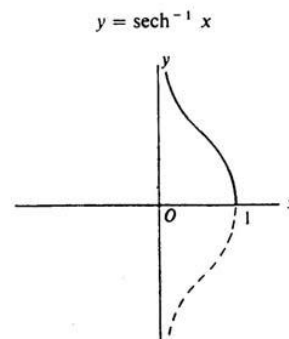
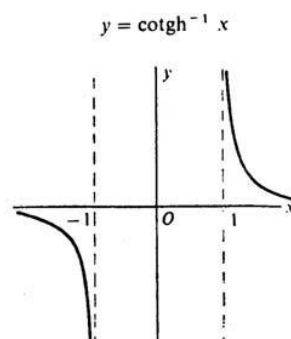
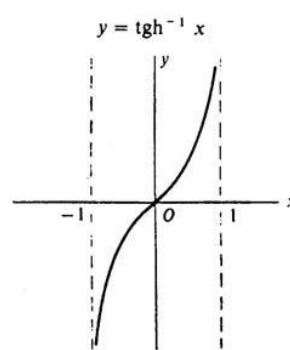
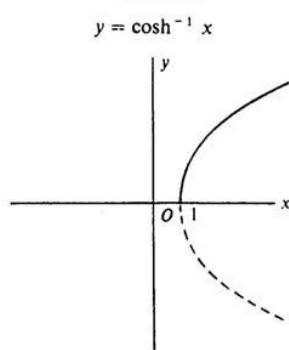
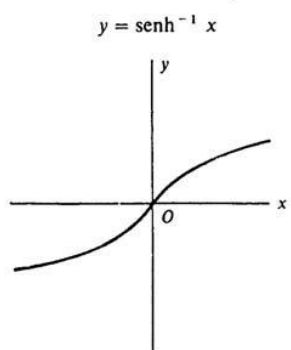
dominio $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$\sec h^{-1} x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

dominio $(0, 1]$

$$\csc h^{-1} x = \ln \left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|} \right)$$

dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

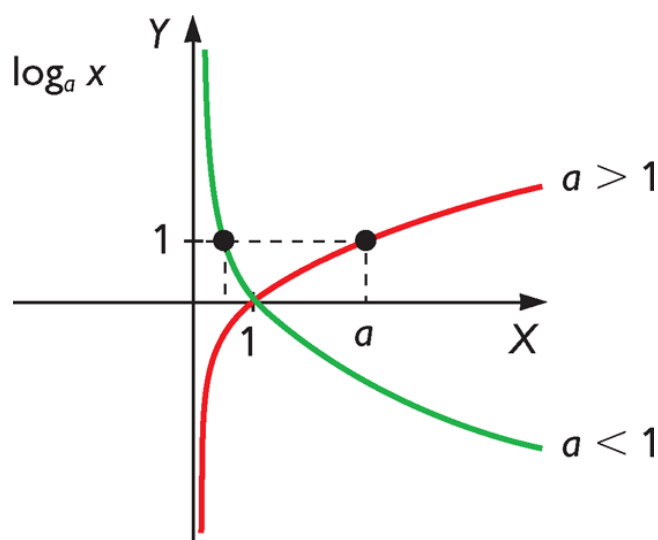


Función logarítmica

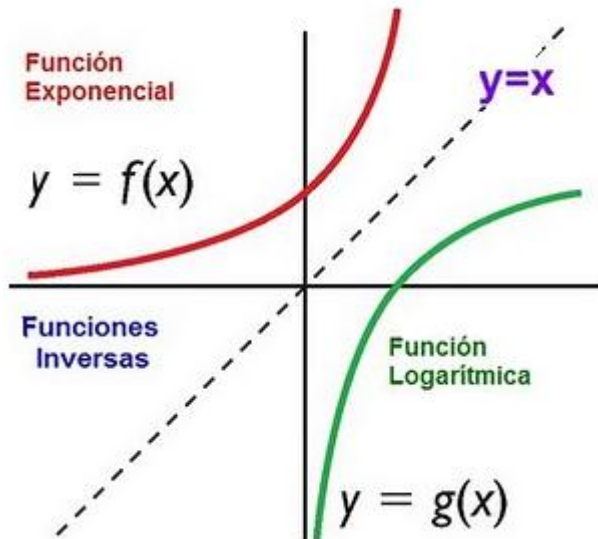
Funciones Logarítmicas de base "a" y base "e"

La función exponencial es biunívoca sobre $\mathbb{R}$, y por lo tanto, la **inversa de la función exponencial** también es una función. Así, la **función logarítmica de base a** es la función

$$\log_a x = \{ (x, y) \mid x = a^y, y \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty) \}$$



La gráfica del $\log_a x$ se obtiene de la gráfica de su inversa Exp_a .



Para el caso de la función exponencial de base e, su inversa es la función logarítmica de base e definida por

$$\text{Ln} = \{ (x, y) \mid x = e^y, y \in \mathbb{R}, x \in (0, +\infty) \}$$

La función $\text{Ln } x$ es positiva si $x > 1$ y es negativa para $0 < x < 1$. Además, $\text{Ln}(1) = 0$.

Tiene las siguientes propiedades:

- 1) Su dominio es $(0, \infty)$ y su recorrido es $(-\infty, \infty)$.
- 2) La función es continua, creciente e inyectiva.
- 3) La gráfica es cóncava hacia abajo.

La relación inversa entre las funciones logaritmo natural y exponencial natural puede expresarse de la siguiente manera:

$$\ln (e^x) = x \quad y \quad e^{\ln x} = x$$

Leyes o propiedades de los logaritmos

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades:

- 1) $\log (1) = 0$
- 2) $\log (ab) = \log a + \log b$
- 3) $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$
- 4) $\log (a^n) = n \log a$

Cambios de base

Se parte de lo siguiente:

si $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$, entonces $x = a^{\log_a x}$... (1)

Para obtener una fórmula que relacione logaritmos de bases diferentes se procede como sigue: sea b un número positivo diferente de 1; tomando logaritmos de base b de los dos miembros de (1)

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x})$$

De las leyes de los logaritmos

$$\log_b x = \log_a x \log_b a$$

Cualquier número positivo, excepto 1, se puede usar como base de un sistema de logaritmos.

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Otra manera de determinar la función logaritmo de base “a”, utilizando logaritmos naturales, es la siguiente: si a es un número real positivo ($a \neq 1$) y “x” es cualquier número real positivo, la función logarítmica de base a se denota

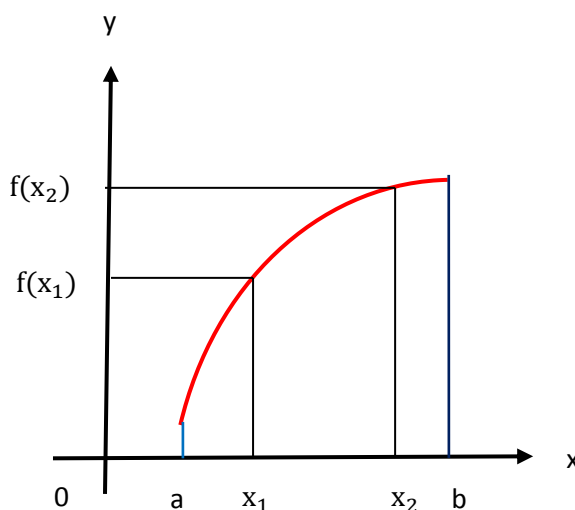
$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x$$

De acuerdo a su monotonía

FUNCIÓN CRECIENTE

Sea una función $f = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D_f \}$

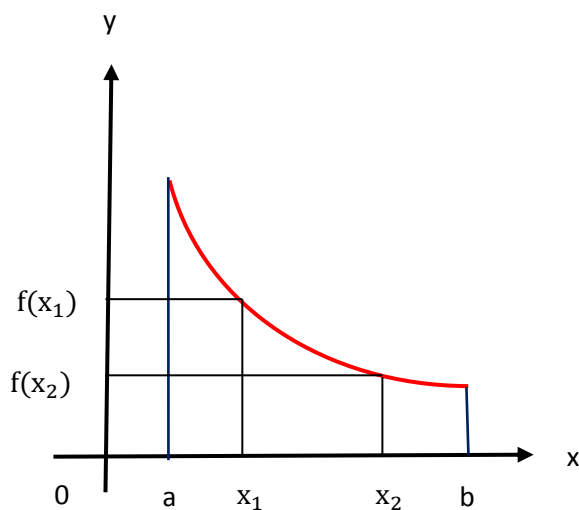
Se dice que $f(x)$ es creciente sobre un intervalo $[a, b] \in D_f$ si $f(x_1) < f(x_2)$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 < x_2$



FUNCIÓN DECRECIENTE

Sea una función $f = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D_f \}$

Se dice que $f(x)$ es decreciente sobre un intervalo $[a, b] \in D_f$ si $f(x_1) > f(x_2)$ cuando $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 < x_2$



OPERACIONES CON FUNCIONES

En lo que sigue se considerará que f y g son funciones con regla de correspondencia $y = f(x)$, $y = g(x)$ y dominio D_f y D_g , respectivamente.

SUMA DE FUNCIONES

Se define como la suma de las funciones f y g a la función denotada $f + g$ con dominio $D = D_f \cap D_g$, tal que $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in D$

RESTA DE FUNCIONES

Se llama diferencia de la función f menos la función g y se denota por $f - g$ a la función dada por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D$$

donde $D = D_f \cap D_g$ es el dominio de $f - g$

MULTIPLICACIÓN DE FUNCIONES

El producto de las funciones f y g es la función con dominio $D = D_f \cap D_g$, denotada por fg y tal que si $x \in D$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

DIVISIÓN DE FUNCIONES

Se llama cociente de la función f entre la función g a la función $\frac{f}{g}$ tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ en donde

$$x \in D = D_f \cap D_g, \quad g(x) \neq 0$$

De las definiciones de suma y producto de funciones se tiene que:

- La suma de n funciones de variable real $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ es una función real
- El producto de n funciones reales de variable real $f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ es una función real
- Si se suma n veces una misma función, se tiene $f + f + f + \dots + f = nf$ (n sumandos)

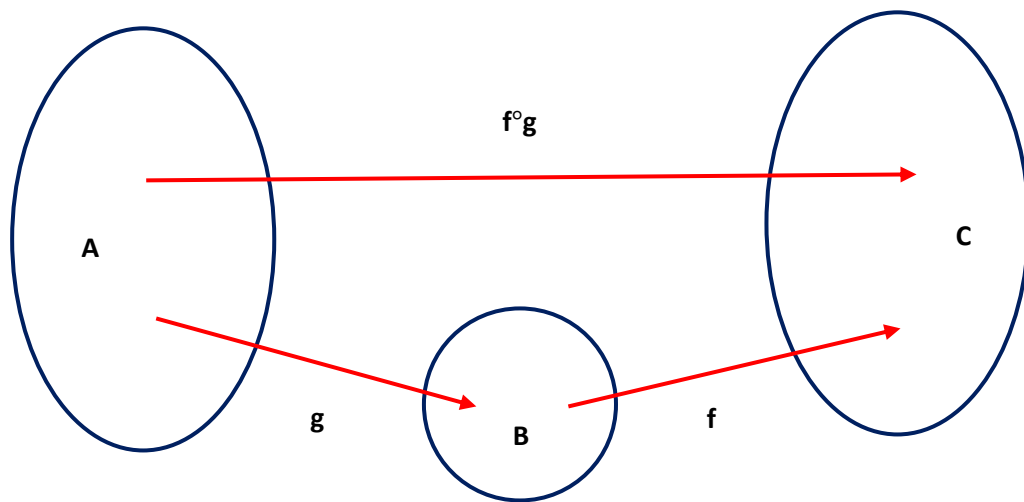
- Si se multiplica n veces por sí misma la función f resulta
 $f f f \dots f = f^n$ (n factores)
- Si m y n son números naturales, entonces
 $f^n f^m = f^{n+m}$ sobre $D_{f^n} \cap D_{f^m}$
- $f^0 = 1$ y $f^{-n} = \frac{1}{f^n}$ donde $n \in \mathbb{N}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES O FUNCIÓN DE FUNCIÓN

Dadas las funciones f y g con dominios D_f y D_g respectivamente, se define como la composición de la función f con la función g a la función denotada por $f \circ g$ tal que $[f \circ g] = f(g(x))$

$f \circ g$ se lee “ f composición g ” y se trata de la función cuyo dominio está formado por todos los elementos x que pertenecen al dominio de g , para los cuales $g(x)$ pertenece al dominio de f .
 Simbólicamente: $D_{f \circ g} = \{x \in D_g, g(x) \in D_f\}$

Si g tiene dominio en el conjunto A y rango en el conjunto B , y f tiene dominio en B y rango en el conjunto C , entonces $f \circ g$ tiene dominio en A y rango en C . Esquemáticamente:



Generalmente la composición de funciones no es conmutativa, es decir, $f \circ g \neq g \circ f$

La gráfica de la función $f \circ g$ puede construirse partiendo de las gráficas de f y g .

FUNCIÓN INVERSA

Si f es una función biunívoca entonces la inversa de f es la función f^{-1} definida por

$$(x, y) \in f^{-1} \quad \text{si y sólo si} \quad (y, x) \in f$$

Esto es, la inversa de una función biunívoca f es la función f^{-1} que se obtiene al intercambiar las componentes de cada una de las parejas ordenadas que constituyen la función f .

Si f^{-1} es la inversa de f , el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1} .

Es importante recordar que es condición necesaria para que una función tenga inversa, el que sea biunívoca.

Nota.- Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la función identidad I , es decir, la recta $y = x$.

Dada una función $f = \{ (x, y) \mid y = f(x), x \in D_f \}$, biunívoca. Su inversa f^{-1} puede obtenerse

intercambiando los papeles de las variables dependiente e independiente. Es decir,

$$f^{-1} = \{ (x, y) \mid x = f(y), y \in D_f = R_{f^{-1}} \}$$

En esta última expresión, la ecuación $x = f(y)$ establece que “y” es función implícita de x.

TEOREMA

Si una función f es biunívoca y su función inversa es f^{-1} :

1) $f \circ f^{-1} = I$, donde el dominio de I es el rango de f

$$D_I = R_f = D_{f^{-1}}$$

2) $f^{-1} \circ f = I$, donde el dominio de I es el dominio de f

$$D_I = D_f = R_{f^{-1}}$$

PLANTEAMIENTO DE FUNCIONES

Las funciones son modelos matemáticos que representan algún fenómeno físico de la vida real.

Para el planteamiento de funciones no existen reglas precisas ni método general. La recomendación en este sentido sería identificar cuáles son los datos, variables e incógnitas del problema, y después encontrar alguna relación entre ellos. Es de especial ayuda el trazo de una gráfica o diagrama.