



PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS SÍSMICO MULTI—ESCALA DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

Jaime Retama Velasco⁽¹⁾, A. Gustavo Ayala Milián⁽¹⁾

¹ Mecánica Aplicada, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, México, D.F., Cp 04510

JRetamaV@iingen.unam.mx, GAyalaM@iingen.unam.mx, JGutierrezT@iingen.unam.mx

RESUMEN

En este artículo se presenta una formulación numérica multi—escala de un modelo de elementos finitos mediante el uso de elementos estructurales convencionales, con propiedades inelásticas empíricas, y elementos finitos continuos no lineales derivados a partir de un modelo constitutivo de daño, para el estudio de comportamiento sísmico de estructuras de concreto reforzado. En la definición del comportamiento constitutivo del concreto reforzado, en su evolución al colapso, se incluyen diferentes variables que dan origen a un comportamiento no—lineal para la curva esfuerzo—deformación. La localización de las varillas de refuerzo y su adherencia con el concreto se introduce de manera explícita, en la formulación del nuevo elemento finito enriquecido, utilizado para el comportamiento mecánico del material compuesto concreto—acero. Derivado de la necesidad de contar con modelos más robustos para evaluar el daño causado por los sismo a las estructuras de concreto reforzado, en la ingeniería práctica, se propone una metodología, basada en conceptos novedosos de multi—escala, para determinar la curva de capacidad o la respuesta dinámica de una estructura; ambos para una demanda sísmica y considerando el daño que se presenta en la estructura, considerado mediante un modelo de daño cohesivo para el concreto y otro del tipo histerético con plasticidad concentrada para las columnas y las vigas. A manera de ilustración, se presenta un diagrama de flujo que considera un análisis estático simplificado, basado en un análisis modal espectral evolutivo, y conceptos avanzados de sub—estructuración.

ABSTRACT

This paper presents a numerical multi – scale formulation of a model using conventional structural elements with empirical inelastic properties and non-linear finite elements derived using a damage mechanics formulation, for the study the seismic behaviour of reinforced concrete structures. Different variables which cause the non—linear stress—strain response are considered in the definition of the constitutive behavior of the reinforced concrete in its evolution to collapse. Location of rebars and the interaction with the concrete bulk, adherence, is introduced in explicit way when the new enriched finite element, used to simulate the mechanical behavior of the composite reinforced concrete material is formulated. Since better models to evaluate the damage of reinforced concrete structures, under seismic conditions, are needed in engineering practice, a new multi—scale methodology is proposed to determine the capacity curve or the dynamic response of a structure both under seismic demand with the damage undergone by the structure, in its evolution to the collapse introduced by means of a cohesive model for the concrete and a concentrated plasticity hysteretic model for columns and beams. As illustration, the simplified static analysis based on evolutive modal spectral analysis and advanced concepts of sub—structuring is presented.

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del diseño sísmico de estructuras, es el garantizar un comportamiento dúctil ante condiciones sísmicas extremas y evitar que, eventualmente ante este tipo de acciones, ocurra su colapso parcial o total. Ante estos escenarios extremos, se considera que las estructuras desarrollan diferentes mecanismos de disipación de energía a nivel local, para cada elemento estructural, o a nivel global, que si bien reducen su capacidad para seguir soportando

cargas su evolución al colapso es gradual. Estos mecanismos de disipación de energía se inician a nivel material, con la pérdida de cohesión entre las partículas que lo constituyen dando lugar a micro grietas. Si este proceso continúa al incrementarse la intensidad de las acciones ocurre una coalescencia de estas micro—grietas, para finalmente evolucionar en fracturas a nivel de elemento estructural (Figura 1).

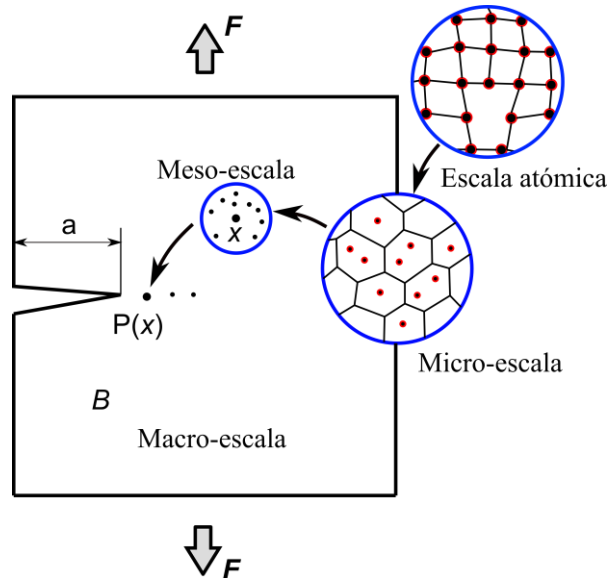


Figura 1 Diferentes escalas del daño en materiales

La literatura disponible contiene modelos que permiten con diferentes niveles de detalle la simulación de este proceso de daño. En la práctica de la ingeniería sísmica, el estudio del daño experimentado por las estructuras de concreto reforzado, en su evolución al colapso, se realiza cada día con mayor frecuencia usando modelos histeréticos empíricos que en el mejor de los casos consideran conceptos de plasticidad concentrada, (Ibarra and Krawinkler 2005). Estos modelos, estrictamente hablando, solo pueden representar el comportamiento global de los elementos estructurales y no los detalles del comportamiento del material que provocan los mecanismos de colapso, (Figura 2). Es importante mencionar que la calibración de estos modelos de histéresis requiere de numerosos resultados experimentales sobre el comportamiento de elementos estructurales con un amplio espectro de propiedades geométricas y de sus materiales. Adicionalmente, estas curvas permiten reproducir solamente características globales de comportamiento ignorando el detalle del proceso de degradación y daño asociado a los mecanismos de disipación de energía.

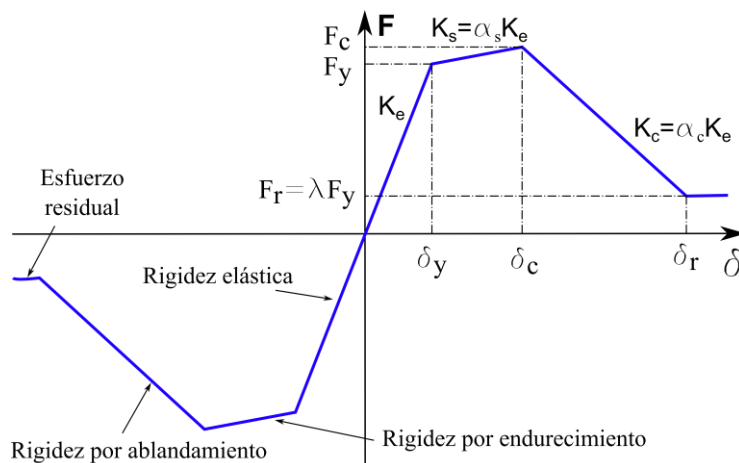


Figura 2 Modelo histerético para una sección de concreto reforzado



Existen también modelos constitutivos más elaborados basados en teorías de plasticidad y/o de daño, (Jirásek and Bazant, 2002), que si bien, permiten modelar de manera explícita la pérdida de rigidez y resistencia de los elementos estructurales; producto de una disminución de las propiedades de sus materiales, su aplicación a problemas prácticos de la ingeniería estructural, considerando el efecto del sismo, es aún limitada debido a que no se dispone de los modelos las herramientas de análisis asequibles a la práctica, ni de las propiedades dinámicas de los materiales. Estas condiciones hacen evidente la necesidad de desarrollar modelos numéricos simplificados que describan el comportamiento sísmico real de las estructuras o de parte de ellas.

Ante este escenario, y considerando que el concreto reforzado es un material mixto, *i.e.*, concreto y acero de refuerzo, en este artículo se propone una metodología de análisis para analizar, mediante un modelado de elemento finito y conceptos de multi—escala el comportamiento sísmico de una estructura considerando dos niveles de refinamiento numérico diferentes. El modelo propuesto permite calcular ante condiciones cuasi-estáticas la curva de capacidad de una estructura mediante un análisis de empuje lateral incremental también referido de manera genérica como análisis de empujón, o ante condiciones dinámicas como las que ocurren durante la respuesta sísmica de una estructura el análisis no lineal paso a paso. En ambos caso, el modelo de la estructura involucrará dos subestructuras, una en la que el nivel de detalle deseado requiera un macro modelaje como sería el de reglas de histéresis para secciones de elementos estructurales y la otra en la que se desea un nivel de detalle mayor en la que el modelado se realice con elementos finitos no lineales fundamentados en la mecánica del daño y en métodos numéricos avanzado. Para ilustrar las características de estos modelos en este artículo se presenta como aplicación potencial la determinación de la curva de capacidad del modelo un marco plano de concreto reforzado considerando como subestructuras uno de sus uniones viga –columnas como la zona en la que se requiere un modelado detallado y la otra el resto del marco modelado mediante elementos estructurales con extremos en los que el daño estructural pueda ocurrir (Kwak y Filippou, 1990).

MODELADO MULTI—ESCALA

El concepto de multi—escala surge de la necesidad de tomar en cuenta todos los mecanismos de daño que se desarrollan en los materiales considerando diferentes niveles de importancia. Específicamente para el caso de estructuras de concreto reforzado, por ser éste un material compuesto, un modelo multi- escala debe considerar:

- El problema estructural es bidimensional para el caso de marcos planos tridimensional para el caso de edificios.
- Las propiedades del concreto cambian a medida que éste experimenta daño
- La interfaces entre el acero de refuerzo y el concreto si representan por elementos estructurales que simulan el proceso de degradación de adherencia y corrimiento de varilla de refuerzo
- La curva esfuerzo—deformación del concreto es no lineal representada por un modelo de daño cohesivo
- Las deformaciones del concreto dependen del tiempo, flujo plástico

Todos estos factores complican la definición de un modelo constitutivo general para el concreto reforzado, que considere de manera global todos los mecanismos de disipación de energía que se desarrollan a nivel material, (Ngo y Scordelis, 1967; Retama y Ayala, 2013); problema que rebasa los alcances de esta investigación.

Para fines de este artículo se entiende por modelado multi—escala, al estudio de los diferentes mecanismos de disipación de energía que se desarrollan en una estructura a diferentes niveles: nivel material analizado mediante elementos finitos no lineales y nivel elemental analizado mediante métodos tradicionales de la ingeniería estructural. Para ilustrar los conceptos involucrados, considérese un marco plano de concreto reforzado, como el que se muestra en la figura 3a, sujeto a la acción de un sismo. El marco está formado por vigas y columnas, elementos en los que no es necesario tomar en cuenta la ubicación exacta del acero, ya que se recurre a métodos simplificados que transforman la sección de acero en concreto. Los grados de libertad asociados a este tipo de elementos estructurales son: desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y giro en el plano, (Figura 3b).

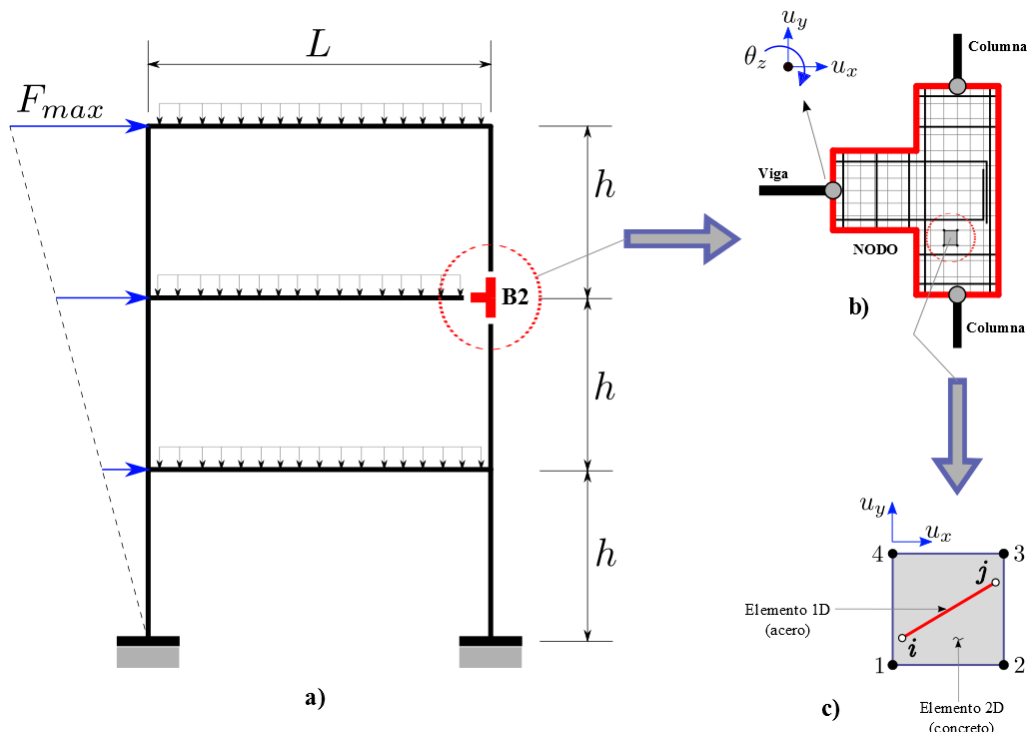


Figura 3 Marco de concreto reforzado con diferentes escalas de modelado

Conjuntamente con lo anterior, se asume de inicio que la conexión $B2$, que se muestra en rojo en la figura 3a, es crítica y que su comportamiento influye de manera predominante en la respuesta global de la estructura. Esta condición permite realizar un análisis detallado de esta parte de la estructura, utilizando elementos finitos en dos dimensiones como los que se muestran en la figura 3b. De esta forma, es posible estudiar a una escala menor el comportamiento del concreto de refuerzo, a través de modelos constitutivos de daño, y considerando un modelo de comportamiento para la adherencia existente entre el concreto y el acero de refuerzo.

Los elementos finitos que se utilizan para modelar el comportamiento de la conexión, son elementos en los que la cinemática de deformación se ha enriquecido para incluir el efecto de las varillas de refuerzo que pudieran estar embebidas en él, (Retama y Ayala, 2010; Oliver et al. 2008). En la figura 3c muestra el tipo de elementos enriquecidos propuesto.

El daño que se presenta en estos elementos enriquecidos, producto de la presencia del acero de refuerzo en su dominio, se introduce mediante la definición de una relación constitutiva cohesiva de daño; que permite disipar energía de manera consistente con la física real del problema, a medida que la grieta crece.

Modelo cohesivo de daño para el concreto

La formulación numérica del elemento finito enriquecido se utiliza conjuntamente con un modelo cohesivo de daño para describir el comportamiento inelástico del concreto en su evolución al colapso. En este modelo constitutivo, se considera que el daño evoluciona de acuerdo a dos propiedades características del material, *i.e.*, la energía de fractura G_F y el esfuerzo último de fluencia σ_{to} , (Retama, 2010).

Se considera que en el instante en que el esfuerzo principal máximo σ_I sobrepasa el esfuerzo de fluencia σ_{to} del material, ocurre una grieta dentro del elemento finito bidimensional, de manera similar al criterio de Rankine en teoría clásica de plasticidad.

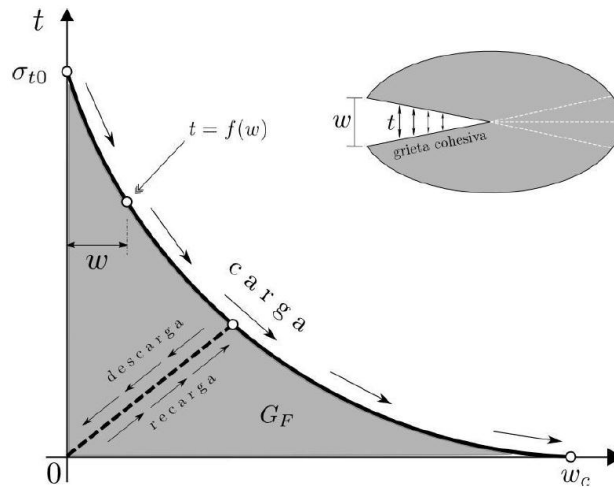


Figura 4 Modelo constitutivo de daño cohesivo

En la figura 4 se muestra la curva correspondiente a la relación constitutiva de daño cohesivo asociada al comportamiento del concreto simple, en el que la falla ocurre de manera dominante en modo I para posteriormente evolucionar en un modo mixto. Se observa que mientras el esfuerzo principal σ_I sea menor al esfuerzo de fluencia del material σ_{to} , no existe daño en el elemento y la apertura de la grieta es cero, *i.e.*, $w = 0$. Si esta condición no se satisface, entonces ocurre daño y la resistencia del material decae monótonicamente a medida que el ancho de la grieta crece.

A diferencia de la teoría asociada a la mecánica de fractura en la que existe una grieta física en el continuo, definida mediante la localización de elementos en ambos lados de la grieta, en el modelo de daño utilizado en este artículo, no existe una grieta en el sentido de la mecánica de fractura. Para poder incluirla se considera que, durante todo el proceso de daño, tiene lugar una transferencia de esfuerzos, referidas como tracciones, entre ambos lados de la grieta, como se muestra en la figura 4.

El modelo de daño utilizado es un modelo escalar para el que, la únicamente componente del vector de tracciones definido en la grieta, es la asociada al modo I de fractura, *i.e.*, t_n , y que se relaciona con la apertura de la grieta w a través de la relación,

$$t_n(w) = \sigma_{to} \left[1 - \frac{w}{w_c} \right]^n \quad (1)$$

Para la curva mostrada en la figura 4, la apertura de la grieta toma valores desde cero hasta un valor máximo w_c . Cuando $w = w_c$, el material ha disipado toda la energía en forma de daño. La energía así disipada, corresponde al área bajo la curva tracción—grieta; esto es,

$$G_F = \int_0^{w_c} t_n d\kappa \quad (2)$$

Mediante las ecs 1 y 2 es posible obtener el tensor constitutivo del material, pendiente de la curva tracción—grieta, a medida que la grieta crece.

Elemento finito 2D enriquecido

Con fines ilustrativos, el modelado de un elemento estructural crítico se realiza mediante elementos finitos triangulares 2D, de deformación constante, como el que se muestra en la figura 5.

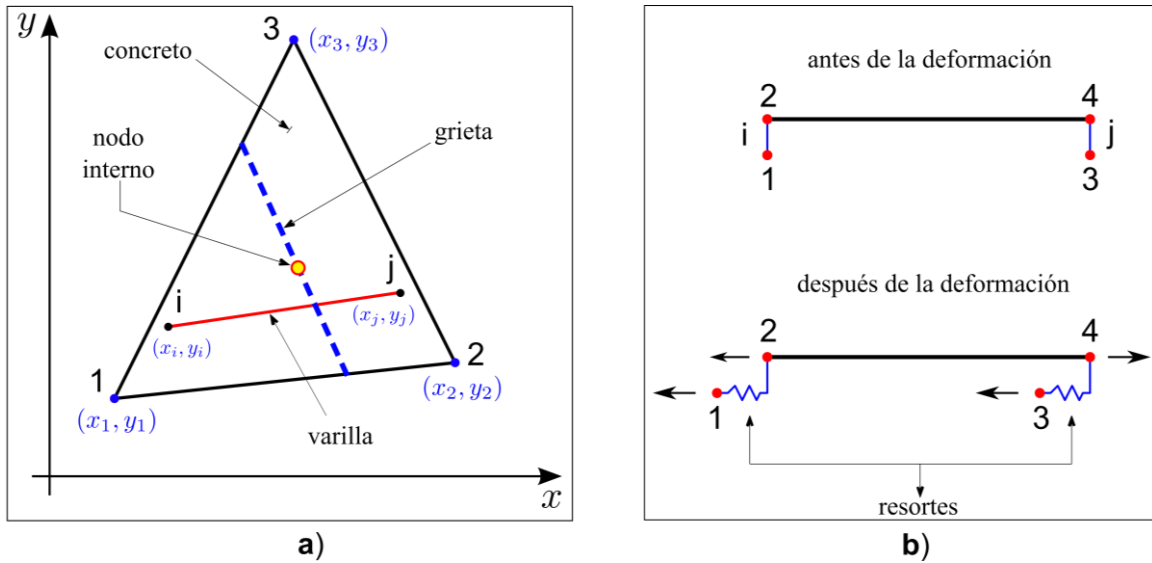


Figura 5 a) Elemento finito triangular enriquecido, b) Modelo para la adherencia

Este elemento tiene como característica que incluye un enriquecimiento elemental que permite modelar el acero de refuerzo correctamente, en conjunto con el concreto. Esto se logra colocando un elemento armadura $i - j$ en su dominio, (Retama y Ayala, 2012).

Otro efecto del concreto reforzado que se incluye en el elemento finito enriquecido, es la evolución del daño que experimenta el concreto hasta llegar al colapso total. En este artículo se utiliza un modelo de daño discreto, implementado en conjunto con la formulación de discontinuidades interiores, desarrollada e implementada numéricamente por (Retama y Ayala, 2010). Como se observa en la figura 5, el daño en el concreto se introduce en el elemento mediante un discontinuidad, en un nodo interno, que se propaga a medida que la estructura sufre daño.

Otro fenómeno característico del comportamiento mecánico del concreto reforzado, es el corrimiento de las varillas que se puede modelar mediante la consideración de elementos de interfaz en los nodos del elemento armadura. Esto se muestra en la parte derecha de la figura 5. Si se considera que existe una adherencia perfecta entre el acero y el concreto, se llega a la siguiente matriz de rigidez del elemento

$$k = k_1 + k_2 \tag{3}$$

donde

$$k_1 = k_{\hat{u}\hat{u}} - k_{\hat{u}\bar{u}} [k_{\bar{u}\bar{u}}]^{-1} k_{\bar{u}\hat{u}}^T \tag{4}$$

dada de acuerdo a Retama (poner referencias); que toma en cuenta el daño en el concreto, y

$$k_2 = R_n^T R_\alpha^T k_t R_\alpha R_n \tag{5}$$

siendo

$$R_n = \begin{bmatrix} n_1^i & 0 & n_2^i & 0 & n_3^i & 0 \\ 0 & n_1^i & 0 & n_2^i & 0 & n_3^i \\ n_1^j & 0 & n_2^j & 0 & n_3^j & 0 \\ 0 & n_1^j & 0 & n_2^j & 0 & n_3^j \end{bmatrix} \tag{6}$$



$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (7)$$

y la matriz \mathbf{k}_t corresponde a la de un elemento armadura, como el que se muestra en la figura 6,

$$\mathbf{k}_t = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

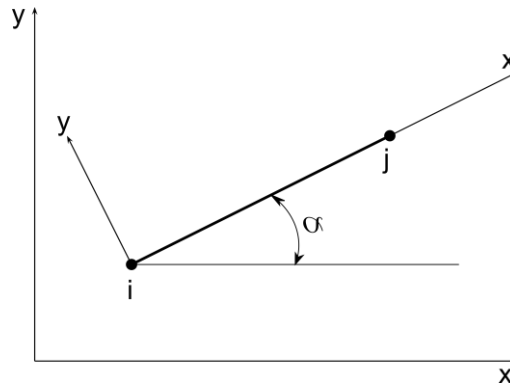


Figura 6 Elemento armadura

La cinemática obtenida para el elemento enriquecido, considera la influencia de las varillas de acero embebidas en el concreto y su correcta localización dentro del elemento estructural de manera explícita. La respuesta elástica obtenida dependerá de la ubicación de las varillas y de la relación constitutiva adoptada para la interface entre el concreto y el acero.

Elemento finito 2D rígido

Los grados de libertad de un elemento marco son tres: desplazamiento horizontal, desplazamiento vertical y giro en el plano. La transición entre este tipo de elemento y uno plano, utilizados para modelar la conexión crítica B2, que solo considera desplazamiento horizontal y vertical, *i.e.*, dos grados de libertad, se realiza mediante la introducción de elementos rígidos en la frontera de la conexión. Esto garantiza una correcta transmisión de momentos hacia los elementos enriquecidos, fig 5. A continuación se presenta un elemento finito rígido que garantiza el movimiento de cuerpo rígido (Cook *et al.*, 1988).

El concepto de elemento rígido no es nuevo en el contexto de los elementos finitos. Su aplicación obedece a situaciones específicas en el modelado de problemas prácticos de la Ingeniería, (Cook *et al.*, 1998; Felippa, 2013). En esencia, se trata de un caso particular de la imposición de restricciones cinemáticas en la formulación de un elemento. En este artículo se utiliza el denominado método de maestro—esclavo; lo que garantiza una imposición exacta de los modos cinemáticos que se desean imponer al elemento. Existen otros métodos como son: el de multiplicadores de Lagrange, penalización y multiplicadores de Lagrange aumentados.

En este trabajo la formulación se aplica a un elemento finito rígido en dos dimensiones, triángulo de tres nodos, para transmitir correctamente los elementos mecánicos de un elemento marco a un elemento finito plano 2D. El comportamiento mecánico de un elemento estructural crítico, en su evolución al colapso, se modela mediante elementos finitos planos de deformación constante, triángulos, en los que se ha enriquecido su cinemática de deformación mediante la inclusión de un elemento barra en su dominio, figura 5.

Considérese un elemento plano triangular de tres nodos, como el que se muestra en la figura 7. Las coordenadas nodales del elemento están dadas por las dimensiones características a y b . Como característica fundamental de este elemento finito es que las componentes del vector de deformaciones ε deben de ser nulas, esto es

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xy} = 0 \tag{9}$$

donde ε_{xx} y ε_{yy} son las deformaciones axiales y ε_{xy} es la deformación angular, del elemento. Estas tres componentes de deformación se relacionan con el vector de desplazamientos nodales, \mathbf{u} , del elemento mediante la matriz de transformación \mathbf{B} ,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{10}$$

donde \mathbf{B} es una matriz de 3×6 y \mathbf{u} es un vector de 6×1 . Igualando a cero la ec 10, se obtiene un sistema algebraico de tres ecuaciones con seis incógnitas. Esto da origen a un sistema sobredeterminado que tiene varias soluciones. De acuerdo a esto, se plantea una solución asignando valores a tres desplazamientos nodales; reduciendo el número de incógnitas a tres y quedando el sistema como determinado.

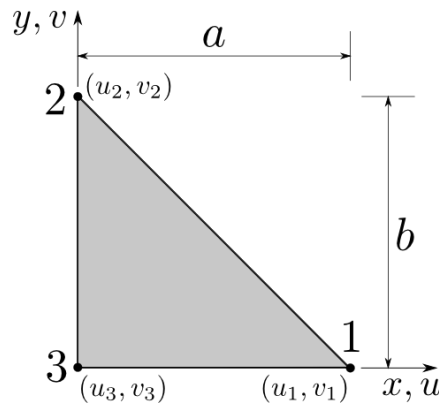


Figura 7 Geometría de un elemento finito triangular 2D

Para el caso particular en que se toman como variables independientes a los desplazamientos nodales u_1, v_1, u_2 , se obtiene una matriz \mathbf{T} de transformación que relaciona los desplazamientos independientes con los dependientes, v_2, u_3, v_3 , dada como

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a}{b} & 1 & -\frac{a}{b} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{b} & 1 & -\frac{a}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

o en notación matricial

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{d} \tag{12}$$

Sustituyendo las ecs 10 y 12 en potencial de energía total Π del elemento,

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext} = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{k}} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \bar{\mathbf{f}}_{ext} \tag{13}$$

Derivando la ec 13 con respecto a \mathbf{d} e igualando a cero, se obtiene la matriz de rigidez del elemento

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \tag{14}$$

y su respectivo vector de cargas nodales, consideración que éstas se aplican solo en los nodos,



$$\bar{\mathbf{f}}_{ext} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (15)$$

De las ecs 14 y 15 se puede observar que la matriz de rigidez del elemento, que inicialmente era de 6×6 , se redujo a un tamaño de 6×6 . Lo mismo para el vector de cargas nodales. Esto se deriva del hecho de que el elemento posee un movimiento de cuerpo rígido y solamente se necesitan tres coordenadas generalizadas para definir su movimiento.

PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El comportamiento cíclico inelástico de las estructuras, depende en gran medida de la historia de desplazamientos impuestos. Entonces, de metodología adoptada para imponer los desplazamientos, es un punto fundamental en la obtención de la respuesta de las estructuras ante acciones sísmicas. El uso de las mesas vibratorias para estudiar la respuesta sísmica es la opción más realista para estudiar este comportamiento, por medio de experimentos de laboratorio. Sin embargo, las dimensiones de la mesas limitan su aplicación a problemas de escala real (Mahin, 1989). De forma alternativa, para resolver el problema de escalas se puede realizar un análisis cuasi—estático de las estructuras, sin embargo es frecuente tener problemas en la relación de lo observado experimentalmente y lo que se simula de forma numérica.

El método pseudo—dinámico con subestructuración combina las ventajas de los dos métodos anteriores, simulando la respuesta sísmica de las estructuras mediante una combinación de experimentos de laboratorio, bajo condiciones cuasi—estáticas, y simulaciones numéricas. Este procedimiento implica la simulación numérica de una parte de la estructura, a través de una computadora, y de su interacción en tiempo real con los resultados obtenidos de experimentos de laboratorio para un elemento o subestructura crítica con masa despreciable para que los efectos inerciales puedan ignorarse (Pegon y Pinto, 2000).

En este artículo se desarrolla una formulación numérica del método pseudo—dinámico con subestructuración frecuentemente usado para estudios experimentales con fines prácticos. En lo que aquí se describe los pasos involucrados en el método experimental, se realizan en su totalidad mediante simulaciones numéricas. El modelado se efectúa mediante elementos estructurales convencionales para el marco y mediante elementos finitos continuos en dos dimensiones para la conexión.

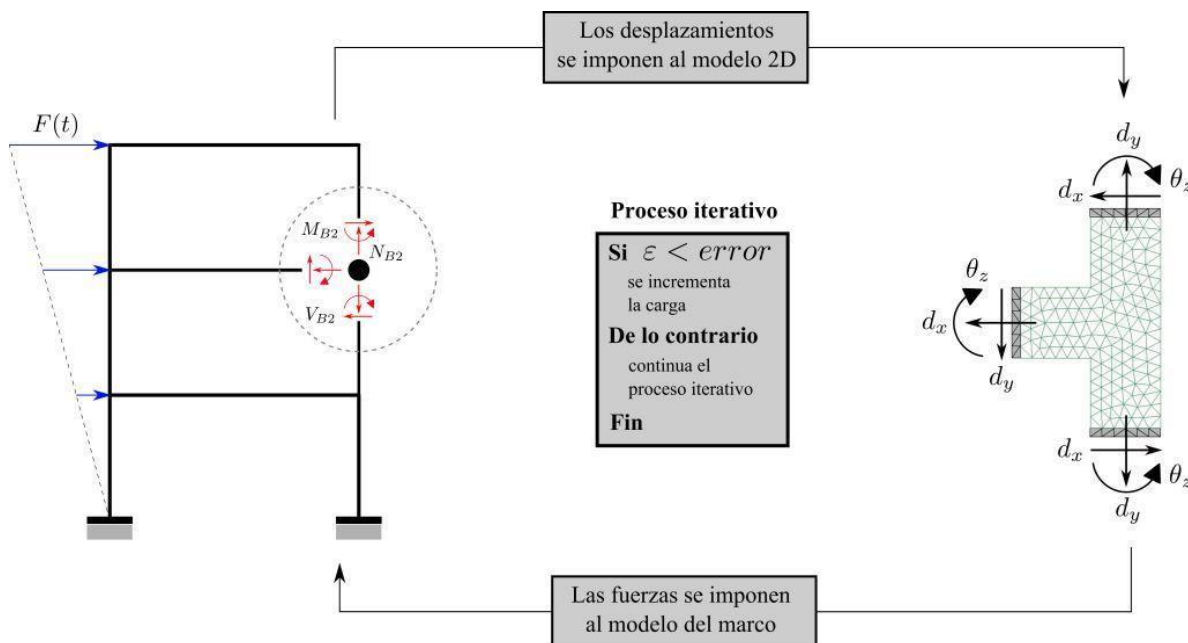


Figura 8 Procedimiento de análisis sísmico multi—escala

El procedimiento de análisis mediante el cual se obtiene la curva de capacidad de una estructura, se muestra esquemáticamente en la fig 8.

La aplicación del procedimiento de análisis se hace para un marco con las características mostradas en la fig 8. Básicamente se trata de un análisis de empuje lateral incremental. La distribución de cargas, correspondientes a la demanda sísmica, se obtienen a partir de análisis modales espectrales evolutivos (Alba et al., 2005). Es importante mencionar que en la aplicación de este modelo multi-escala para el análisis no lineal paso a paso se recomienda que la masa de la subestructura modelada con elementos finitos sea despreciables para fines de análisis ya que de no ser así, al no existir la subestructuración dinámica, el problema no se puede atacar utilizando este modelo.

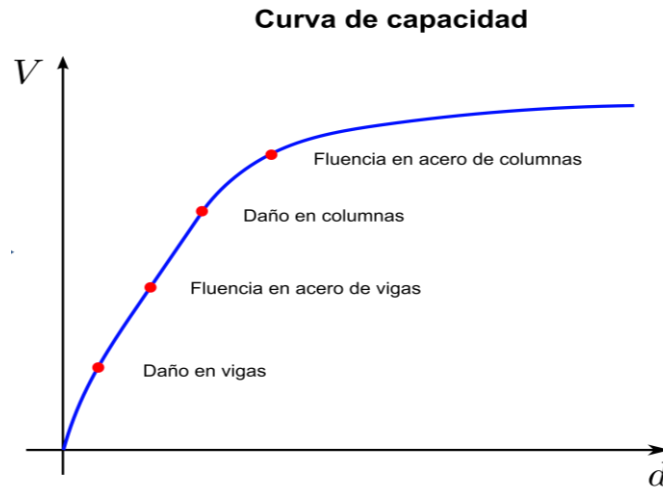


Figura 9 Curva de capacidad de la estructura

De manera general, el procedimiento es el siguiente:

1. Se realiza un primer análisis del marco completo, con un primer incremento de carga definido a partir de un análisis modal espectral
2. Los desplazamientos sobre la conexión correspondientes al análisis anterior se aplican al modelo de elementos finitos 2D de la conexión.
3. Del análisis de elementos finitos 2D se obtienen fuerzas que se deben aplicar al marco sin la conexión.
4. De manera iterativa se repiten los pasos 2 y 3 hasta alcanzar convergencia verificandose que tambien se satisfaga el equilibrio en el nodo de acuerdo con una tolerancia de error, previamente establecida.
5. Una vez obtenido el equilibrio en el nodo, se obtiene el cortante basal y el desplazamiento de un punto de referencia para ir construyendo la curva de capacidad mostrada en la fig 9.
6. Se regresa al paso 1 con un nuevo incremento de carga, con el mismo procedimiento de análisis descrito anteriormente.
7. Se termina el análisis cuando se ha aplicado la carga total actuante en la estructura.

CONCLUSIONES

El estudio del daño en estructuras de concreto reforzado, es un problema que involucra el desarrollo de diferentes mecanismos de disipación de energía, a diferentes escalas de análisis. El modelado numérico del concreto reforzado, visto como un material compuesto, mediante modelos histeréticos de plasticidad concentrada, requiere de su calibración a través de estudios experimentales, con características particulares. Una forma alternativa de estudiar las estructuras de concreto reforzado, es mediante la aplicación de modelos numéricos multi—escala, que permiten considerar a nivel constitutivo del material, el daño experimentado por las estructuras en su evolución al colapso, y tomar en cuenta a través de elementos finitos enriquecidos, como los descritos en este artículo, la contribución del acero de refuerzo a la rigidez global de la estructura, de manera explícita. De esta forma la curva de capacidad obtenida, mediante el método del empujon y en combinación con el modelo de daño cohesivo descrito, garantizan un



respuesta única para cada tipo de estructura; variando una de otra, por la distribución del acero que pudiera tener en el nodo en estudio; considerado como crítico.

AGRADECIMIENTOS

El desarrollo de este trabajo fue posible gracias al apoyo otorgado al proyecto, PAPIIT IN108512, “Simulación numérica del proceso de falla en elementos de concreto reforzado considerando el efecto del calor de hidratación del cemento en los concretos jóvenes” por parte de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM. De igual forma, el primer autor agradece al Instituto de Ingeniería de la UNAM por la beca recibida para realizar una estancia de posdoctorado en la coordinación de Mecánica Aplicada.

REFERENCIAS

- J. Retama. (2010). Formulation and approximation to problems in solids by embedded discontinuity models. Tesis de Doctorado, Programa de posgrado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- J. Retama y G. Ayala. (2010). Modelado del daño en sólidos mediante formulaciones variacionales de discontinuidades interiores. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* **26:3**, 171—177.
- B. Ngo y C. Scordelis. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams. *ACI Journal* **64:3**, 152—163.
- R. D. Cook, D. S. Malkus y M. E. Plesha. (1988). Concepts and applications of finite element analysis. Ed. John Wiley & Sons, U.S.A.
- J. Retama y G. Ayala. (2013). Reinforced concrete modelling using enriched finite elements. *Third International Conference on Computational Modelling of Fracture and Failure on Materials and Structures (CFRAC 2013)*. Praga, República Checa.
- J. Oliver, D. L. Linero, A. E. Huespe y O. L. Manzoli. (2008). Two—dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **197:5**, 332—347.
- H. G. Kwak y F. C. Filippou. (1990). Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads. Report no. UCB/SEMM-90/14. Department of Civil Engineering, Universidad de California, Berkeley, CA.
- S. A. Mahin, P. B. Shing, C. R. Thewalt y R. D. Hanson. (1989). Pseudodynamic test method—current status and future directions. *Journal of Structural Engineering* **115:8**, 2113—2128.
- M. Jirásek y Z. P. Bazant. (2002). Inelastic analysis of structures. Ed. Ed. John Wiley & Sons, U.K.
- L. F. Ibarra y H. Krawinkler. (2005). Global collapse of frame structures under seismic excitations. Report no. 152. Department of Civil and Environmental Engineering. Universidad de Stanford, Stanford CA.
- C. A. Felippa. (2013). Introduction to finite element methods. Notas de clase, página de internet: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/Home.html>.
- P. Pegon y A. V. Pinto. (2000). Pseudo—dynamic testing with substructuring at the ELSA Laboratory, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **29:7**, 905—925.
- F. Alba, R. Bento y G. Ayala. (2005). Seismic performance evaluation of plane frames vertically regular and irregular, Memorias del “Fourth European Workshop on the Seismic Behavior of Irregular and Complex Structures”, EAEE, Tesalónica, Grecia.