



SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL DAÑO EN SÓLIDOS MEDIANTE MODELOS DE DAÑO DISCRETO

Jaime Retama Velasco¹, A. Gustavo Ayala Milián² y Gelacio Juárez Luna³

RESUMEN

En este artículo se presenta un modelado numérico de la falla en materiales cuasi-frágiles mediante modelos de daño discreto. En los modelos de daño continuo, la aparición de una zona de debilidad dentro del sólido se refleja al modificar las propiedades constitutivas del material sin redefinir la cinemática del continuo; mientras que en los modelos discretos, de manera conjunta se utiliza un modelo constitutivo cohesivo en la frontera de la grieta y se modifica la cinemática de desplazamientos. Para mostrar la validez numérica de los modelos de daño discreto, al final del artículo se presentan varios ejemplos de aplicación donde se hace énfasis en las ventajas y desventajas de la formulación presentada.

ABSTRACT

A numerical model for the simulation of quasibrittle materials, by means of discrete damage models, is presented. In continuum damage models the effect of a bandwidth, where inelastic phenomena take place, is taken into account through the modification of the constitutive properties of the material without modifying the kinematics of the continuum. In the case of discrete damage models, the kinematics is modified, and a cohesive surface constitutive model is used in the crack zone to simulate the damage. To show the numerical and mathematical validity of the developed formulation two numerical examples are presented at the end of the paper; from which, comments and conclusions are addressed.

INTRODUCCIÓN

El problema de la simulación numérica y computacional del daño experimentado por una estructura, es un tema de investigación que recientemente ha propiciado el desarrollo de nuevos modelos numéricos que permiten estudiar el comportamiento de los sistemas estructurales ante acciones extraordinarias que pueden llevarlos a desarrollar mecanismos inelásticos que reducen su capacidad de carga y eventualmente lo llevan a la falla.

La teoría matemática básica, para el estudio del daño en sólidos, se establece en el artículo de Inglis, (Inglis, 1913), que en 1913 obtuvo una solución elástica para los esfuerzos alrededor de una cavidad con forma elíptica. Inglis observó que cuando la forma de la cavidad se aproximaba a una línea, los esfuerzos en los vértices de la elipse tendían a ser no acotados. Estos resultados dieron las bases para el desarrollo de la Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE).

Hoy en día la MFLE es una de las teorías más ampliamente utilizadas en la Ingeniería para modelar la propagación de grietas en sólidos. Sin embargo, ésta es aplicable únicamente cuando ya existe una grieta

¹ Asistente de investigador, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria Núm. 3000, Col. Copilco Universidad, Del. Coyoacán, México D.F., CP. 04360, Tel. (55) 5623-3508, JRetamaV@ingen.unam.mx.

² Profesor Investigador, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad Universitaria Núm. 3000, Col. Copilco Universidad, Del. Coyoacán, México D.F., CP. 04360, Tel. (55) 5623-3508, GAyalaM@ingen.unam.mx.

³ Profesor Investigador, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo Núm. 180, Del. Azcapotzalco, México D.F., CP. 02200, Tel. (55) 5318-9085, gjl@correo.azc.uam.mx.

dentro de continuo; por lo que el costo computacional, asociado a la propagación de la grieta, es mayor al necesario para la solución del problema mismo.

Aproximadamente en el año de 1960 nace una alternativa distinta a la mecánica de fractura para el estudio de este fenómeno. De esta forma, dentro de la mecánica de los medios continuos se comienzan a desarrollar varias formulaciones orientadas al estudio del problema de la falla en estructuras, utilizando algunos conceptos introducidos anteriormente por la mecánica de fractura.

Dentro del contexto del Método del Elemento Finito (MEF), se pueden distinguir dos tipos de aproximaciones al modelado del daño. En el primer tipo, modelos de daño continuo, las deformaciones inelásticas se distribuyen dentro de un ancho de banda, diferente de cero; y en el segundo caso todo el fenómeno inelástico se sitúa en una línea cuyo comportamiento se determina por modelos constitutivos del tipo esfuerzo-desplazamiento.

En este artículo se presenta una formulación variacional para el modelo de discontinuidades interiores, en su aproximación discreta, para la simulación numérica y computacional del daño en materiales cuasi-frágiles y su aproximación mediante el Método de los Elementos Finitos, formulación de desplazamientos.

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL DAÑO

Básicamente el proceso de daño en los materiales, inicia a nivel micro-escala con la concentración de esfuerzos alrededor de los defectos o interfaces, en el material, que hacen que el daño se concentre en una zona del continuo. La coalescencia de estas zonas de debilidad da origen a macro-grietas que al propagarse eventualmente pueden llevar a la estructura al colapso final o local, (Lemaitre, 1996).



Figura 1 Proceso de daño en un medio continuo. a) inicio del daño a nivel micro-escala y b) evolución de las macro-grietas

De manera general se tienen dos tipos de modelos para simular numéricamente el daño (Retama, 2010a). Modelos como los de daño continuo, agrietamiento distribuido y elementos extendidos; consideran el problema de daño como una degradación de las propiedades mecánicas del material sin redefinir la cinemática del continuo (Rots, 1988; Juárez, 2010). Este tipo de formulaciones numéricas modelan adecuadamente zonas de localización donde se concentran los fenómenos inelásticos ya que distribuyen el daño en todo el elemento, en su discretización mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF); sin embargo, no modelan adecuadamente grietas localizadas o procesos de daño en materiales donde claramente existe una discontinuidad física (Retama, 2010b).

Para simular este tipo de problemas, se ha utilizado el Método de los Elementos Discretos (MED) que ha resultado ser un punto de comparación para otras formulaciones numéricas cuando se tienen grietas localizadas. Existen tres formas de aplicar este tipo de modelo: 1) la malla se modifica en cada paso de análisis para permitir que la grieta, en su proceso de propagación, se alinee con las fronteras de los elementos, 2) desde el inicio del análisis se traza la trayectoria de propagación de la grieta colocando elementos de interfaz y 3) se utiliza un tamaño de malla muy fino y colocando elementos de interfaz en todas las fronteras de los elementos.



A pesar de obtener buenos resultados con este tipo de modelado, existen desventajas que hacen al método poco atractivo para su aplicación a problemas de interés en la práctica. El número de grados de libertad se incrementa a medida que la malla se va modificando o cuando se utiliza una malla muy fina; además el costo computacional necesario para modificar la malla es mayor al necesario para resolver el problema de daño.

Este tipo de inconvenientes ha dado lugar al desarrollo de nuevos modelos numéricos que eliminan las desventajas de los las formulaciones numéricas anteriormente descritas al permitir que la grieta cruce el elemento sin la necesidad de modificar la malla. Formulaciones como el de discontinuidades interiores sitúan la grieta dentro del elemento en consistencia con el problema físico (Retama, 2010b).

DISCONTINUIDADES INTERIORES

Dentro de la formulación de discontinuidades interiores se tienen dos tipos de aproximaciones. Una es la aproximación continua en la que se utilizan relaciones constitutivas continuas, esfuerzo-deformación, en todo el dominio del continuo, incluyendo la zona de localización. La aproximación débil y la fuerte pertenecen a este tipo de discontinuidades interiores. El otro tipo de aproximación de discontinuidades interiores corresponde a la discreta en la que, a diferencia de la fuerte, se utiliza un modelo constitutivo cohesivo tracción-salto en la frontera de la discontinuidad; mientras que en el resto del sólido se utiliza una ley constitutiva continua, esfuerzo-deformación (Retama, 2010c).

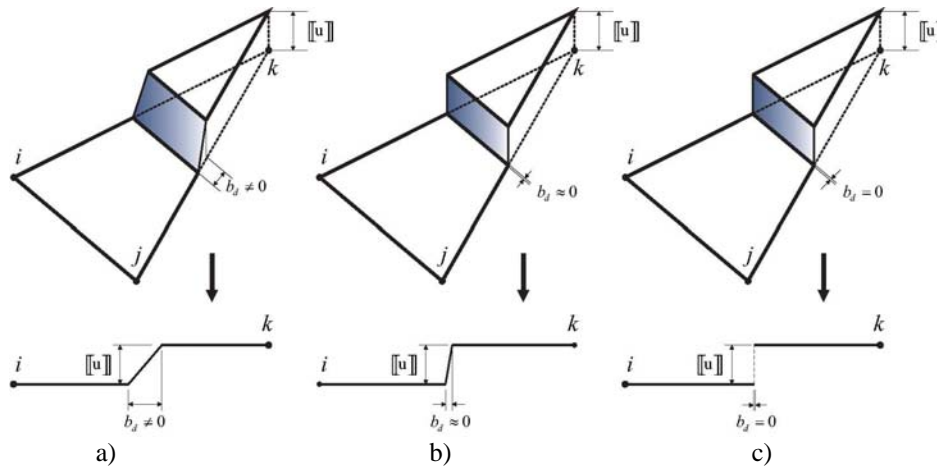


Figura 2 Aproximaciones de discontinuidades interiores. a) débil, b) fuerte y c) discreta

En este tipo de formulaciones, el daño se introduce al tomar en cuenta la energía disipada en la zona de la discontinuidad, en la formulación variacional del problema. Es importante resaltar que, a diferencia del método de los elementos de interfaz, en este modelo no se necesita modificar la malla durante todo el proceso de análisis; ya que la grieta cruza al elemento.

El empleo del modelo de discontinuidades interiores, en su aproximación discreta, involucra dos puntos principales a considerar: a) el comportamiento constitutivo de la grieta y b) la descripción cinemática de los campos discontinuos utilizados para modelar la grieta mediante el método de los elementos finitos.

COMPORTAMIENTO CONSTITUTIVO DE LA GRIETA

Para simular el comportamiento constitutivo de la grieta se utiliza un modelo constitutivo del tipo tracción-salto. La respuesta se define por dos parámetros característicos de cada material; el esfuerzo máximo a tensión del material, σ_0 , y la energía de fractura, G_f . La evolución de las tracciones en la frontera de la grieta se definen como

$$\mathbf{t} = f(\tilde{w}) \frac{\mathbf{w}}{\tilde{w}} \quad (1)$$

donde:

\mathbf{t} es el vector de tracciones actuando a través de la frontera de la grieta,

\mathbf{w} es el vector del salto de desplazamientos, y

\tilde{w} es un salto equivalente definido a partir del valor máximo alcanzado por el salto de desplazamientos.

En la figura 3 se observa una curva de ablandamiento exponencial en la que se considera un crecimiento monotónico de la grieta considerando únicamente el modo I de falla, modo de apertura de la grieta.

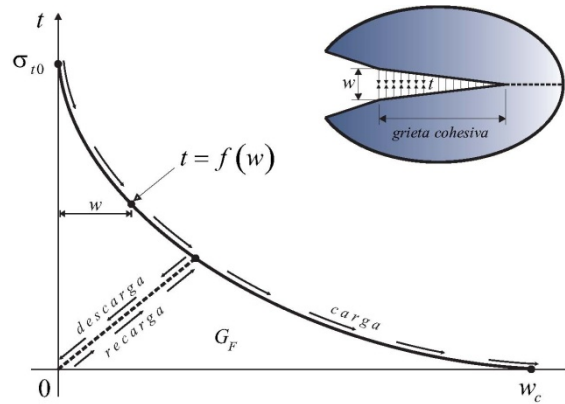


Figura 3 Ley de ablandamiento exponencial

La grieta se introduce perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal máximo σ_I en el momento en que éste alcanza el esfuerzo máximo a tensión del material σ_{t0} , criterio de falla de Rankine en teoría clásica de plasticidad.

CINEMÁTICA DE LA GRIETA

La cinemática de desplazamientos y de deformaciones del elemento finito, considera un término adicional que refleja el enriquecimiento que se hace a nivel elemental de estos campos para permitir que la grieta cruce al elemento. El salto se introduce a nivel elemental mediante grados de libertad que pueden ser consensados estáticamente. El campo de desplazamientos se interpola, mediante elemento finito, como

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{N}_c\tilde{\mathbf{d}} \quad (2)$$

Y el de deformaciones se deriva a partir de la ecuación 2 mediante

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{B}_c\tilde{\mathbf{d}} \quad (3)$$

donde $\hat{\mathbf{d}}$ y $\tilde{\mathbf{d}}$ son los desplazamientos nodales regulares y los no regulares, relacionados con el salto de desplazamientos $\tilde{\mathbf{u}}$, respectivamente. \mathbf{N} y \mathbf{N}_c son las funciones de forma estándar y las relacionadas con el salto; \mathbf{B} y \mathbf{B}_c son las respectivas matrices de transformación construidas con las derivadas de las funciones de forma.

FORMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO



La formulación del modelo de discontinuidades interiores, presentada, se realiza en el marco del cálculo variacional al tomar en cuenta en el funcional la energía disipada en la frontera de la grieta, figura 4,

$$\Pi = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b}_v d\Omega - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \mathbf{t}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_d} \psi(\tilde{\mathbf{u}}) d\Gamma \quad (4)$$

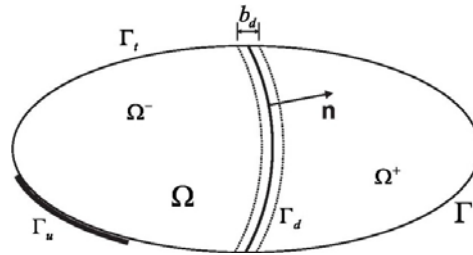


Figura 4 Continuo dividido por una discontinuidad

Al minimizar el funcional definido en la ecuación 4 utilizando las funciones de interpolación para desplazamientos, ecuación 2, y de deformaciones, ecuación 3, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{T} d\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{d}} \\ \tilde{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b}_v d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{t}^* d\Omega \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se presentan dos ejemplos numéricos de aplicación con el objetivo de validar la consistencia teórica de la formulación de discontinuidades interiores presentada. Se considera que el material presenta un comportamiento cuasi-frágil y que falla predominantemente en Modo-I, de tensión.

En el primer ejemplo se muestra la capacidad de la formulación de reproducir el movimiento de cuerpo rígido cuando la grieta evoluciona totalmente, dividiendo al continuo en dos partes que experimentan una descarga elástica. El segundo ejemplo es una viga de tres puntos con una muesca en la parte inferior central de su claro donde se ha prescrito una grieta con la finalidad de mostrar que es posible utilizar el elemento desarrollado como un elemento de interfaz.

En todos los ejemplos se utiliza una malla mediante elementos finitos de tres nodos, elementos triangulares, en los que la grieta se introduce perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal máximo, criterio de fluencia de Rankine.

EJEMPLO 1

El primer ejemplo numérico de aplicación es una viga sujeta a un estado asimétrico de tensión donde se aplican desplazamientos en la parte superior de éste. Para facilitar la aparición y propagación de la grieta, se considera que existe una imperfección inicial en el sólido que provoca una concentración de esfuerzos dando lugar a una grieta que se propaga a través de todo el sólido, dividiéndolo en dos partes.

La geometría del problema y los desplazamientos aplicados se muestran en la figura 5a. Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad $E = 40000 \text{ MPa}$, relación de Poisson $\mu = 0.25$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_{t_0} = 2.5 \text{ MPa}$ y energía de fractura $G_F = 0.15 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$.

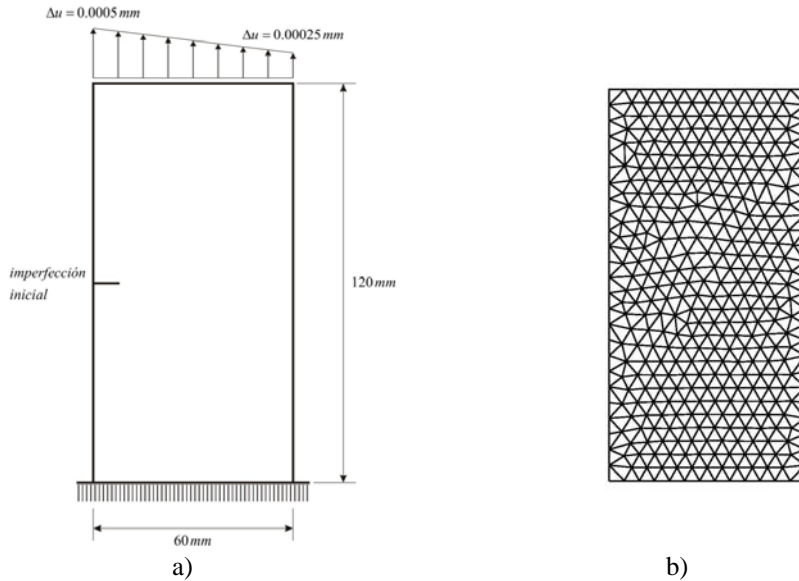


Figura 5 Sólido sujeto a un estado de tensión. a) geometría del espécimen y b) malla mediante elementos finito triangulares

En la figura 6a se muestra la malla deformada mediante elementos triangulares de deformación constante. Se observa que una vez que la grieta evoluciona totalmente, el sólido queda dividido en dos partes con una cinemática de cuerpo rígido. En la figura se observa que los elementos contenidos en las dos partes en que se divide el sólido sufren una descarga elástica por lo que no se aprecia una deformación en éstos. Este hecho es algo que se ha observado en experimentos de laboratorio con materiales cuasi-frágiles.

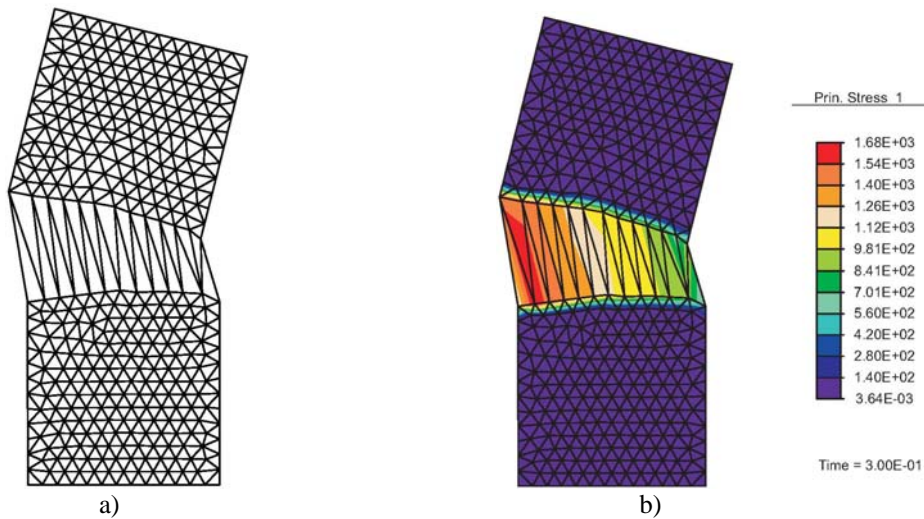


Figura 6 Sólido con un movimiento de cuerpo rígido. a) malla deformada y b) esfuerzos principales máximos

Adicionalmente, en la figura 6b, se presentan los esfuerzos principales de todo el sólido. Aquí se puede ver que todos los efectos inelásticos se concentran en la zona central donde la grieta ha evolucionado totalmente.

EJEMPLO 2



En el segundo ejemplo de aplicación, la formulación de discontinuidades interiores se aplica a la simulación de una viga de tres puntos con una muesca en la parte central de la parte inferior de la viga. Experimentos de laboratorio utilizando este tipo de probetas, son comunes en el área de la ingeniería de pavimentos donde se estudia el problema de agrietamiento de la capa de asfalto ante cargas de trabajo que provocan el agrietamiento del material. A diferencia del ejemplo anterior, en este problema se aplica una carga en la parte superior de la viga hasta que se llega al colapso global del espécimen.

La geometría utilizada en los experimentos numéricos corresponde a la mostrada en la figura 7; donde además es posible apreciar las condiciones de frontera y las dimensiones de la muesca. El espesor de la viga es de 500 mm . Las propiedades mecánicas utilizadas son: módulo de elasticidad $E = 30000\text{ MPa}$, relación de Poisson $\mu = 0.2$, esfuerzo máximo a tensión $\sigma_{t_0} = 3.33\text{ MPa}$ y energía de fractura $G_F = 0.11\frac{\text{N}}{\text{mm}}$.

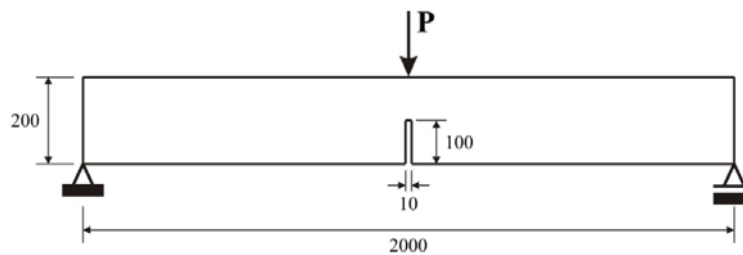


Figura 7 Viga de tres puntos

La discretización del continuo se ha hecho utilizando elementos finitos de deformación constante, triangulares de tres nodos, reflejando en ésta la simetría del problema respecto al eje vertical, figura 8.

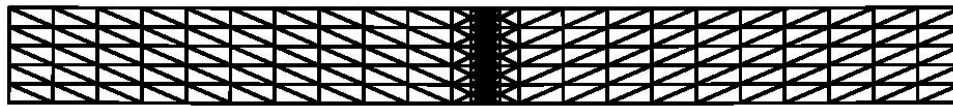


Figura 8 Malla de elementos finitos de la viga de tres puntos

Una vez que la viga a quedado dividida en dos partes por la grieta, en la figura 9a se puede observar que los elementos localizados en ambos lados de la grieta no presentan deformación, lo que garantiza un movimiento de cuerpo rígido. De igual forma se puede ver en la figura 9b que estas partes experimentan una descarga elástica con lo que los esfuerzos decrecen de manera asintótica hasta llegar a cero.

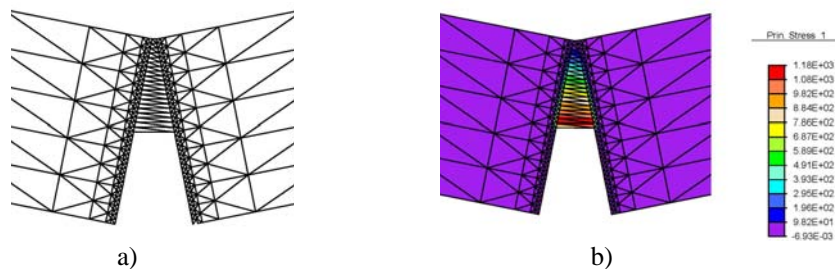


Figura 9 Propagación de la grieta en la viga. a) malla deformada de la viga y b) descarga elástica de las partes en que queda dividida la viga

Todo este comportamiento mecánico de la viga, reducción de su rigidez a medida que la grieta evoluciona, se puede entender fácilmente mediante la gráfica mostrada en la figura 10 en la que se ha graficado los valores de la carga aplicada, en el eje vertical, contra su respectivo desplazamiento en su punto de aplicación, eje horizontal. Aquí se observa que la viga, inicialmente elástica sin daño, es capaz de soportar hasta un cierto valor de carga. En este punto donde se desarrollan mecanismos inelásticos que se reflejan como una macro-

grieta, que disminuyen la rigidez de la estructura acompañada de una pérdida en su capacidad para seguir tomando más carga; que finalmente conllevan a la viga al colapso final.

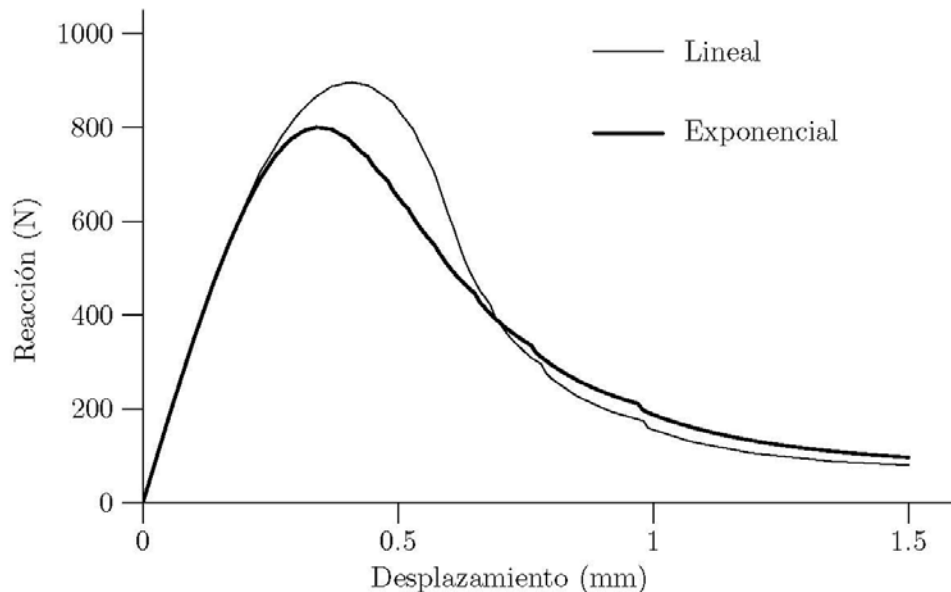


Figura 10 Respuesta global de la estructura mediante un ablandamiento lineal y otro exponencial

En este ejemplo en particular se han utilizado dos tipos de leyes de ablandamiento para la simulación del daño. El primero es uno lineal mientras que el segundo corresponde a uno del tipo exponencial. Se puede apreciar gráficamente que la carga máxima para el caso lineal es mayor que para el exponencial. Éste hecho se debe a que a nivel elemental en la primera parte de la rama descendente, la pendiente de la curva exponencial es mayor que la lineal; caso contrario en la segunda parte de la rama.

CONCLUSIONES

Se presentó una formulación variacional alternativa al de MFLE, para la simulación numérica del daño en materiales cuasi-frágiles. Esta nueva formulación permite eliminar el problema del remallado, necesario en la MFEL cuando se necesita propagar la grieta, junto con una consistencia geométrica que permite situar la grieta de acuerdo al problema físico.

En el primer ejemplo numérico, donde se ha prescrito una grieta, se trató de mostrar que aún cuando el objetivo fundamental del modelo de discontinuidades interiores es simular grietas no localizadas; es posible utilizar este tipo de elementos como elementos de interfaz, comúnmente utilizados para modelar grietas localizadas. Con la ventaja de que en esta formulación no es necesario que los lados de los elementos estén alineados con la dirección de la grieta.

Finalmente para mostrar el potencial numérico y computacional de la formulación, en el segundo ejemplo se simuló una viga de tres puntos con una muesca donde la grieta no fue prescrita. Para poder conocer la dirección de propagación de ésta, se utilizó el criterio de falla de Rankine. Se puede observar que en este segundo ejemplo, no fue necesario utilizar un proceso de remallado para propagar la grieta; ya que el efecto del salto en el campo de desplazamientos fue considerado en la formulación del elemento.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la *Dirección General de Asuntos del Personal Académico* (DGAPA) por el apoyo brindado para la presentación de este artículo, a través del proyecto de investigación **IN121009-3** (*Modelado Numérico del Problema de Daño en Estructuras Mediante Discontinuidades Interiores*). De igual forma agradezco al CONACYT por apoyar parte de mi investigación sobre el modelado del daño en sólidos, mediante el proyecto de investigación con clave **82839**.

REFERENCIAS

Inglis C. E. (1913), “**Stress in a plate due to the presence of crack and sharp corners**”, Transactions of the Institution of Naval Architects, vol. 55, pp. 219-241.

Lemaitre J. (1996), “**A course on damage mechanics**”, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 228 pp.

Rots J. G. (1988), “**Computational modeling of concrete fracture**”, Tesis de doctorado, Universidad Tecnológica de Delft, Delft, Holanda.

Juárez G. (2010), “**Aproximación del proceso de falla en sólidos con elementos finitos mixtos usando modelos de daño continuos**”, en CIMN 2010, Congreso Internacional de Métodos Numéricos, 3 al 5 de febrero de 2010, Guanajuato, México.

Retama J. (2010a), “**Modelado de la propagación de grietas en sólidos mediante formulaciones variacionales de discontinuidades interiores y elementos finitos mixtos**”, en CIMN 2010, Congreso Internacional de Métodos Numéricos, 3 al 5 de febrero de 2010, Guanajuato, México.

Retama J. (2010b), “**Modelado del daño en sólidos mediante formulaciones variacionales de discontinuidades interiores**”, aceptado para su publicación en: Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería.

Retama J. (2010c), “**Formulation and approximation to problems in solids by embedded discontinuity models**”, Tesis de doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

