En la última sección, se expone el principio de simulación digital de sistemas analógicos. Este tema demuestra la importancia de los sistemas discretos en el tratamiento de señales. Se desarrolla con un mayor detalle en el capítulo 5.

1. SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS

La notación $f[n]$ se empleará para designar una secuencia de números reales o complejos definidos para todo número entero n. La secuencia $f[n]$ será denominada *señal discreta* y el índice n *tiempo discreto*.

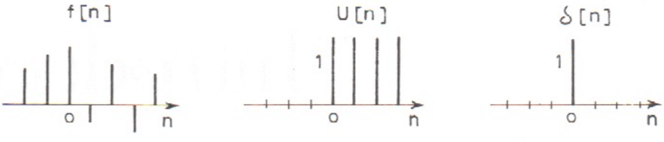

Figura 1-1

Se usarán a menudo los siguientes casos especiales:

Secuencia escalón: *Secuencia delta:*

$$U[n] = \begin{cases} 1, & n \geqslant 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Observemos que $\delta[n-3]=1$ para $n=3$ y 0 para $n \neq 3$. Para cualquier k

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \tag{1-1}$$

En donde se sobreentiende que n es el tiempo discreto y k un parámetro constante.

De la igualdad (1-1) se desprende que una secuencia arbitraria $f[n]$ puede ser representada como una suma de secuencias delta:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\delta[n-k] \tag{1-2}$$

como se ilustra en la Fig. 1-2.

Sistemas discretos

Un sistema discreto es una regla que asocia a cada secuencia $f[n]$ otra secuencia $g[n]$. De esta forma, un sistema discreto es una correspondencia (transformación) entre la secuencia $f[n]$ y la secuencia $g[n]$. Emplearemos la notación

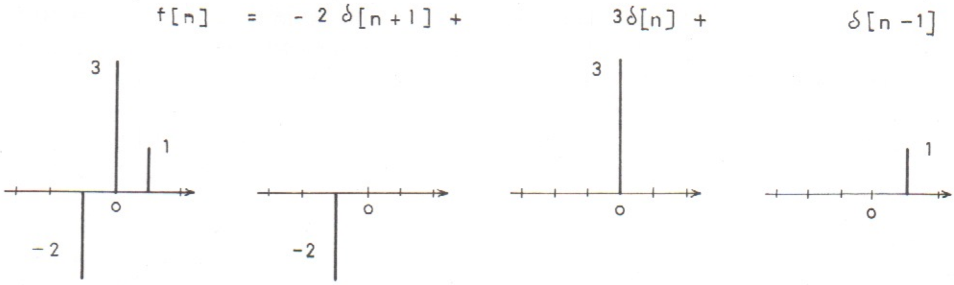

Figura 1-2

$$g[n] = L\{f[n]\}$$

para representar dicha correspondencia. El dominio $f[n]$ se designará por *entrada* y el codominio de la transformación $g[n]$ por *salida* o respuesta.

Para la determinación del valor de la salida $g[n]$ para un valor de n dado, debemos conocer, en general, la entrada $f[n]$ para toda n perteneciente al pasado y futuro. Sin embargo, como podemos ver en los ejemplos que siguen, dicho conocimiento no es siempre necesario.

Figura 1-3

Ejemplo 1-1 a) $g[n] = f^2[n]$. Este sistema es no-lineal y el valor presente de la salida $g[n]$ depende tan solo de $f[n]$ (sistema sin memoria).
b) $g[n] = nf[n]$. Es un sistema lineal, sin memoria y variante con el tiempo.
c) $g[n] = 2f[n] + 3f[n-1]$. El valor presente $g[n]$ depende de $f[n]$ y del valor anterior $f[n-1]$. El sistema tiene memoria finita.

En el ejemplo anterior, $g[n]$ se expresó siempre en función de $f[n]$. No sucede así en todos los casos tal como puede verse seguidamente.

Ejemplo 1-2 $g[n] + 2g[n-1] = f[n]$. En este ejemplo, para hallar $g[n]$ debemos saber no tan solo $f[n]$ sino también $g[n-1]$. De modo que $g[n]$ se obtiene por la solución de la anterior *ecuación de recurrencia*. En realidad tenemos un conjunto infinito de ecuaciones, una para cada n. Como se mostrará, bajo ciertas condiciones (causalidad) estas ecuaciones tienen una solución única, por consiguiente definen un sistema (recurrente).

Los siguientes sistemas simples son de interés especial:

Elemento de retardo:	*Multiplicador:*
$g[n] = f[n-1]$	$g[n] = af[n]$

Estos sistemas serán representados por los diagramas de bloques de la figura 1-4. El caracter a en el interior del triángulo que representa el multiplicador es su ganancia. El significado de la letra z^{-1} en el bloque representativo del elemento de retardo se va a dar seguidamente (función de transferencia).

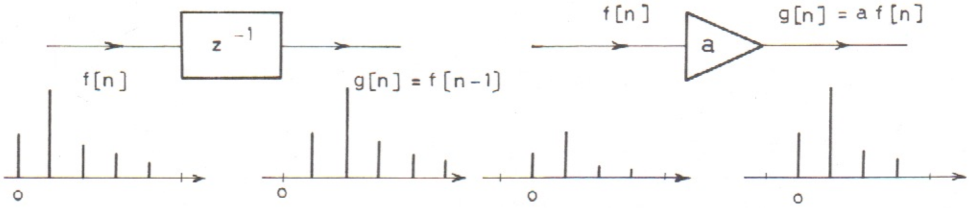

Figura 1-4

Como mostramos más adelante, un sistema lineal arbitrario puede ser realizado por una combinación de elementos de retardo y multiplicadores. En la figura 1-5 se ve la realización del sistema $g[n] = 2f[n] + 3f[n-1]$ como ilustración de lo anterior

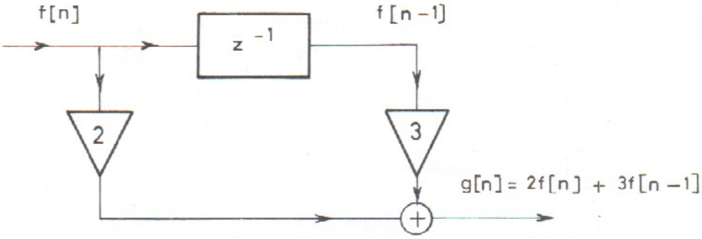

Figura 1-5

Linealidad Un sistema L es lineal si se cumple que

$$L\{a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]\} = a_1 L\{f_1[n]\} + a_2 L\{f_2[n]\} \qquad (1\text{-}3)$$

para cualesquiera a_1, a_2, $f_1[n]$ y $f_2[n]$.

Como consecuencia de esta definición se tiene que la respuesta a $af[n]$ es igual a $ag[n]$.

Además, si $g_1[n]$ y $g_2[n]$ son las respuestas a $f_1[n]$ y $f_2[n]$ respectivamente, se tiene entonces que la respuesta a $f_1[n]+f_2[n]$ es igual a $g_1[n]+g_2[n]$.

Invariancia temporal Un sistema L es invariante con el tiempo si

$$L\{f[n-k]\} = g[n-k] \qquad (1\text{-}4)$$

para cualquier k. En otras palabras: un desplazamiento de la entrada se traduce en un desplazamiento igual de la salida.

Ejemplo 1-3 a) El sistema $g[n] = |f[n]|$ es no lineal (explicarlo) pero invariante con el tiempo.

b) El sistema $g[n]=nf[n]$ es lineal pero variante con el tiempo ya que la respuesta a $f[n-k]$ es $nf[n-k]$ mientras que $g[n-k]=(n-k)f[n-k]$
c) El sistema $g[n]=2f[n]+3f[n-1]$ es lineal e invariante con el tiempo.

El término «sistema lineal» o simplemente «sistema» querrá decir en lo que sigue lineal e invariante con el tiempo a no ser que se indique explícitamente lo contrario.

La respuesta delta La respuesta de un sistema a la secuencia delta $\delta[n]$ la denotaremos por $h[n]$:

$$L\{\delta[n]\}=h[n] \tag{1-5}$$

Veremos que la secuencia $h[n]$ no es necesariamente nula para $n<0$. Si

$$h[n]=0 \quad \text{para} \quad n<0 \tag{1-6}$$

entonces el sistema se llamará causal.

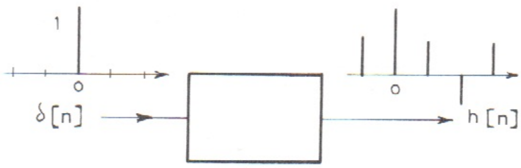

Figura 1-6

Ejemplo 1-4 $g[n] = 2f[n] + 3f[n-1]$. En este ejemplo, $g[n]$ se expresa directamente en función de $f[n]$ (sistema no recurrente). Por consiguiente, podemos hallar la respuesta delta $h[n]$ haciendo $f[n] = \delta[n]$:

$$h[n]=2\delta[n]+3\delta[n-1]$$

Ejemplo 1-5

$$g[n]=f[n]+\frac{1}{2}f[n-1]+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^k f[n-k]+\ldots \tag{1-7}$$

Como en el ejemplo 1-4,

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^k \delta[n-k] + \ldots = \begin{cases} (1/2)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n<0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n]$$

Ejemplo 1-6 Se desea hallar la respuesta delta $h[n]$ de un sistema causal tal que

$$g[n]-\frac{1}{2}g[n-1]=f[n] \tag{1-8}$$

De (1-5) y (1-6) se deduce que $h[n] - \frac{1}{2}h[n-1] = \delta[n]$ para todo n, $h[n] = 0$ para $n<0$.

Si se hace $n=0,1,\ldots$ y se observa que $h[-1]=0$, se obtiene

$n=0$: $h[0]=1$

$n=1$: $h[1] - \frac{1}{2}h[0] = 0, \quad h[1] = \frac{1}{2}$

$n=2$: $h[2] - \frac{1}{2}h[1] = 0, \quad h[2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

En general, $h[n]=\frac{1}{2}h[n-1]$ para $n>0$. Por medio de una inducción hallamos sin dificultad que

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n U[n] \tag{1-9}$$

En el capítulo 2 desarrollamos métodos más simples para la determinación de $h[n]$. En la Fig. 1-7 mostramos una realización del filtro anterior por medio de un diagrama de bloques.

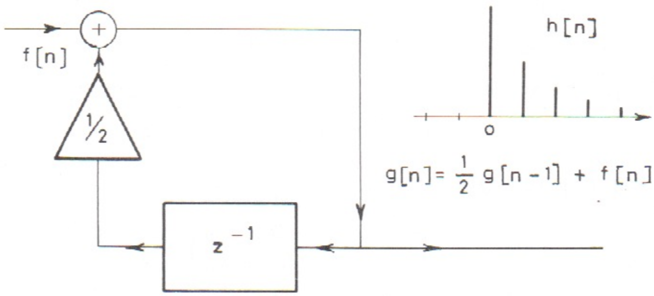

Figura 1-7

Observemos que los dos sistemas en (1-7) y (1-8) tienen la misma respuesta delta $h[n]$ y por lo tanto son equivalentes, en otras palabras, ambos dan la misma respuesta para la misma entrada [ver (1-11)]. El sistema de (1-7) es no recurrente pero para su realización son necesarios un número infinito de elementos de retardo. La realización del sistema de (1-8) se hace con tan sólo un elemento de retardo.

Convolución discreta Vamos a expresar la respuesta $g[n]$ de un sistema lineal a una entrada arbitraria $f[n]$ en función de $h[n]$ y de $f[n]$.

Observemos que para cualquier k la respuesta a $\delta[n-k]$ es igual a $h[n-k]$ (invariancia temporal):

$$L\{\delta[n-k]\}=h[n-k] \tag{1-10}$$

por lo tanto, la respuesta a $f[k]\delta[n-k]$ es $f[k]h[n-k]$ (linealidad). De lo anterior y de (1-2) se desprende que

$$g[n]=L\{f[n]\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\,L\{\delta[n-k]\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]h[n-k]$$

Esta suma es la *convolución discreta* de $f[n]$ con $h[n]$. Dicha operación se representará por $f[n]*h[n]$. Es conmutativa como puede comprobarse fácilmente. Hemos pues llegado a la importante conclusión de que

$$g[n]=f[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n-k]\,h[k] \tag{1-11}$$

Ejemplo 1-7

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n U[n], \qquad f[n] = U[n] - U[n-4] = \begin{cases} 1, 0 \leqslant n < 4 \\ 0, \text{ de otro modo} \end{cases}$$

Hallar $g[n]=f[n]*h[n]$ para $n=2$ y $n=5$

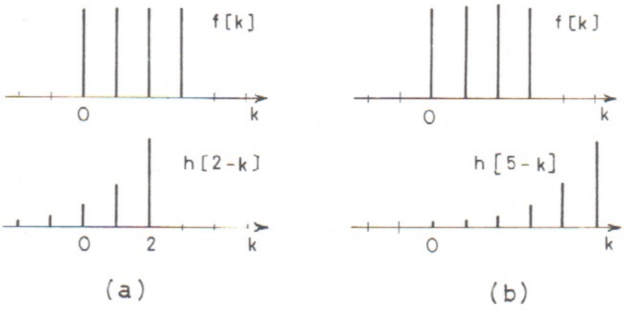

Figura 1-8

Para hallar $g[2]$, multiplicamos $f[k]$ por $h[2-k]$ y sumamos para toda k. Tal como puede verse en la Fig. 1-8*a*

$$g[2] = f[2]\,h[0] + f[1]h[1] + f[0]h[2] = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

De una forma similar,

$$g[5] = f[3]h[2] + f[2]h[3] + f[1]h[4] + f[0]\,h[5] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Observemos que, si $h[n]=0$ para $n<0$, se tiene que

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} f[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} f[n-k]\,h[k] \tag{1-12}$$

Si también $f[n]=0$ para $n<0$, entonces, $g[n]=0$ para $n<0$ y para $n>0$ $g[n]$ vendrá dada por

$$g[n] = \sum_{k=0}^{n} f[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} f[n-k]h[k] \tag{1-13}$$

En particular

$$g[0]=f[0]h[0], \quad g[1]=f[0]h[1]+f[1]h[0]$$

$$g[2]=f[0]h[2]+f[1]h[1]+f[2]h[0]$$

Ejemplo 1-8 $f[n]=U[n]-U[n-3]=h[n]$ Hallar $g[n]$ (Fig. 1-9)

Es fácil ver que $g[n]=0$ para $n<0$ y $n>4$

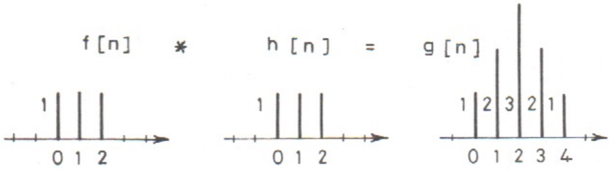

Figura 1-9

Para $0 \leqslant n \leqslant 2$ $\qquad$ Para $2 < n \leqslant 4$

$$g[n] = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1 \qquad g[n] = \sum_{k=n-2}^{2} 1 \cdot 1 = 5-n$$

Ejemplo 1-9 $f[n] = 2^n$, $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n U[n]$. De (1-12) se sigue que

$$g[n] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{6}{5} \cdot 2^n$$

La función de transferencia Supongamos que la entrada de un sistema lineal es una progresión geométrica

$$f[n] = r^n$$

Como puede deducirse de (1-11) la respuesta resultante

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^{n-k} h[k] = r^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] r^{-k} \tag{1-14}$$

también es una progresión geométrica multiplicada por el valor $H(r)$ de la *transformada z*

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] z^{-n} \tag{1-15}$$

de la secuencia $h[n]$.

Así, la respuesta a z^n es igual a $H(z)z^n$:

$$L\{z^n\} = H(z)z^n \tag{1-16}$$

para cualquier valor de z real o complejo, para el que la serie (1-15) sea convergente.

Al factor $H(z)$ lo llamaremos *función de transferencia*. Puede determinarse ya sea de (1-15) o de (1-16). Para hacerlo a partir de (1-16), aplicaremos la entrada $f[n] = z^n$. La función $H(z)$ será el coeficiente de z^n en la respuesta que resulte.

Para el elemento de retardo, $H(z) = z^{-1}$. En efecto, si $f[n] = z^n$, entonces, $g[n] = f[n-1] = z^{n-1} = z^{-1} z^n$.

Para el multiplicador, $H(z) = a$. En efecto, si $f[n] = z^n$, entonces, $g[n] = af[n] = az^n$.

Ejemplo 1-10 La ecuación de recurrencia

$$6g[n]+5g[n-1]+g[n-2]=f[n]$$

define un sistema con entrada $f[n]$ y salida $g[n]$. Si $f[n]=z^n$, entonces $g[n]=H(z)z^n$. Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

$$6H(z)z^n+5H(z)z^{n-1}+H(z)z^{n-2}=z^n$$

por lo tanto,

$$H(z)=\frac{1}{6+5z^{-1}+z^{-2}}$$

Ejemplo 1-11

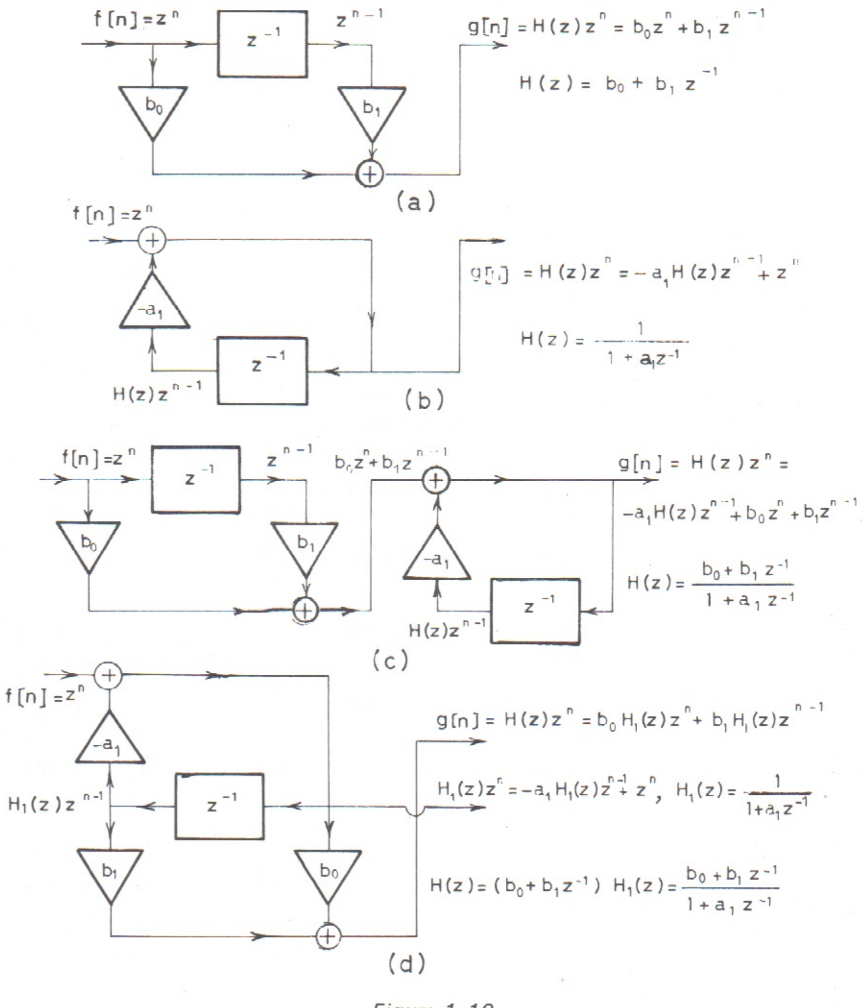

Figura 1-10

En este ejemplo, tenemos cuatro sistemas especificados por sus diagramas de bloques. En a) (no recurrente) $H(z)$ se halla directamente siguiendo la traza de z^n. En b) (recurrente), la solución de una ecuación nos permite el cálculo de $H(z)$. El tercer ejemplo es una combinación de los dos primeros (cascada). En d) se hace necesaria la introducción de una salida auxiliar con función de transferencia $H_1(z)$ y resolver un sistema de dos ecuaciones. Los ejemplos c) y d) tienen la misma función de transferencia, por lo tanto son equivalentes en cuanto a sus entradas y salidas. Sin embargo c) contiene dos elementos de retardo mientras que d) tiene sólo uno.

Sistemas en cascada Dos sistemas están conectados en cascada si la salida del primero es la entrada del segundo. Designando por $h[n]$ y $H(z)$ a la respuesta delta y función de transferencia respectivamente, del nuevo sistema formado de este modo, podemos concluir de las ilustraciones de la Fig. 1-11 que

$$h[n] = h_1[n]*h_2[n], \qquad H(z) = H_1(z)H_2(z) \tag{1-17}$$

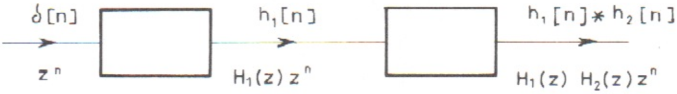

Figura 1-11

Teorema de convolución Por definición, $H(z)$, $H_1(z)$ y $H_2(z)$ son las transformadas z de $h[n]$, $h_1[n]$ y $h_2[n]$. Al ser arbitrarias las secuencias $h_1[n]$ y $h_2[n]$ concluimos de (1-17) que la transformada z de la convolución de dos secuencias es igual al producto de sus dos transformadas z.

Esto nos lleva a la conclusión de que si

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]\,z^{-n}, \qquad G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n]\,z^{-n}$$

son las transformadas z de la entrada $f[n]$ y de la salida $g[n]$ del sistema $H(z)$, se tiene entonces que

$$G(z) = F(z)\,H(z) \tag{1-18}$$

ya que

$$g[n] = f[n]*h[n].$$

Tenemos, de esta forma, las tres siguientes definiciones de la función de transferencia $H(z)$.

1. $H(z)$ es la transformada z de $h[n]$.
2. Si $f[n] = z^n$, entonces, $H(z)$ es el coeficiente de la respuesta resultante $g[n] = H(z)z^n$.
3. $H(z)$ es igual a la relación $G(z)/F(z)$.

2. SEÑALES Y SISTEMAS ANALOGICOS

El término «señal analógica» $f(t)$ será empleado para designar una