

La unión Josephson vista como un sistema dinámico

Alberto Francisco Sandino Hernández¹, José Luis Del Río Correa²

Departamento de Física, UAM Iztapalapa, México D.F., México

E-mail: ¹afsandino@hotmail.com, ²jlr@xanum.uam.mx

Resumen — En este trabajo mostramos a la unión Josephson como un sistema dinámico. La ecuación diferencial que describe a este dispositivo es análoga a la de un péndulo amortiguado sometido a una torca constante, la cual puede reescribirse en una ecuación sin dimensiones debido a la introducción de un parámetro \underline{T} que hace adimensional al tiempo. La corriente total que fluye por este dispositivo consta de tres componentes: la corriente de desplazamiento, la corriente normal y la supercorriente. Al seleccionar \underline{T} en dos formas distintas podemos estudiar el comportamiento del sistema cuando:

- La corriente de desplazamiento es despreciable con respecto a la corriente normal y a la supercorriente de los pares de Cooper,
- la corriente normal es pequeña comparada con la de desplazamiento y la supercorriente, y
- el caso general en donde las tres corrientes son del mismo orden de magnitud, mostrando la existencia de un ciclo límite.

En todos estos casos, el parámetro variable es la razón entre la corriente y la corriente crítica Josephson. Sin embargo, en el último caso se encuentra que al disminuir la razón entre las corrientes desde un valor mayor a 1 se presenta una bifurcación homoclinica.

Palabras Clave – bifurcación, sistema dinámico, unión Josephson.

Abstract — In this paper we show the Josephson junction as a dynamic system. The differential equation that describes this device is analogous to the damped pendulum forced with a constant torque equation, which can be rewritten in a dimensionless equation due to the introduction of a parameter \underline{T} that makes non-dimensional at the time. The total current flowing through this device consists of three components: the displacement current, normal current and the supercurrent. If we select \underline{T} in two different ways we can study the behavior of the system when:

- The displacement current is negligible with respect to the normal current and the supercurrent of the Cooper pairs
- normal current is small compared to the displacement and the supercurrent, and
- the general case where the three currents are of the same order of magnitude, showing the existence of a limit cycle.

In all these cases, the variable parameter is the ratio between the current and the Josephson critical current. However, in the latter case is that to decrease the ratio between flows from one value greater than 1 is a homoclinic bifurcation.

Keywords — bifurcation, dynamic system, Josephson junction.

I. INTRODUCCIÓN

El físico británico Brian David Josephson predijo en 1962 un efecto muy peculiar, conocido hoy en día como *efecto Josephson* el cual consiste que una corriente fluya indefinidamente a través de un dispositivo conocido como *unión Josephson* aun cuando no hay una diferencia de potencial aplicada. Existen distintos tipos de uniones, pero en este trabajo estudiaremos la de tipo túnel que constan de dos superconductores separados por una conexión débil, la cual puede ser un aislante (superconductor-aislante-superconductor, SIS en inglés), un metal normal (superconductor-normal-superconductor, SNS), un semiconductor, un superconductor débil o cualquier otro material que se acople débilmente a los dos superconductores (Fig. 1). En este tipo de uniones, el efecto Josephson ocurre debido al tunelamiento de los pares Cooper a través del material conector. Las dos regiones superconductoras están caracterizadas por funciones de onda macroscópicas $\psi_1 e^{i\phi_1}$ y $\psi_2 e^{i\phi_2}$ respectivamente.

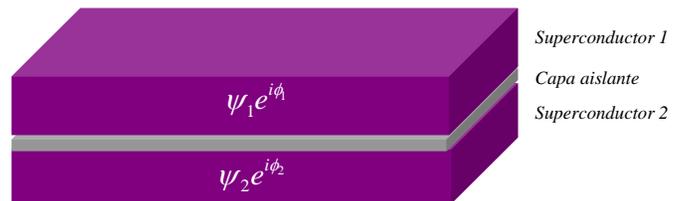


Figura 1 Esquema simple de una unión túnel

Bajo condiciones adecuadas se pueden observar dos tipos de efecto Josephson, los cuales son:

- Efecto Josephson DC*. Una corriente continua fluye a través de la unión en ausencia de un campo eléctrico o magnético.
- Efecto Josephson AC*. Un voltaje fijo es aplicado a través de la unión causando una corriente oscilante.

Las uniones Josephson son capaces de generar voltajes oscilatorios de alta frecuencia, por lo regular de 10^{10} – 10^{11} ciclos por segundo y detectan potenciales eléctricos de un cuatrillón de volt.

La predicción de este efecto le valió a Josephson el premio Nobel de Física en 1973 junto con Leo Esaki e Ivar Giaever. Un año más tarde, estas uniones fueron construidas por primera vez por P. W. Anderson y J. M. Rowell. En 1968, W. C. Stewart y D. E. McCumber presentaron un modelo simple de circuito equivalente para la unión Josephson cuyo objetivo es describir la relación entre la corriente I y el voltaje V a través de esta; este modelo es conocido como RCSJ (Resistively and Capacitively Shunted Junction) el cual permite estudiar a la unión túnel desde el punto de vista de un sistema dinámico.

II. LAS RELACIONES JOSEPHSON

Para comenzar el análisis del sistema, se considera un sistema simple y simétrico, es decir, el material es el mismo en ambos lados de la unión y no existe campo magnético. Sea ψ_1 la probabilidad de encontrar un par de Cooper de un lado y ψ_2 la probabilidad de encontrarlo en el otro lado. Dado que el acoplamiento entre los superconductores es muy débil, el vector de estado que describe al sistema acoplado se puede escribir en una forma simple:

$$|\psi\rangle = \psi_1|1\rangle + \psi_2|2\rangle. \quad (1)$$

La densidad de carga ρ_i en el superconductor i -ésimo de la unión, descrito por el estado $|i\rangle$, está definida como

$$\rho_i = |\psi_i|^2 = \langle i|\psi\rangle\langle\psi|i\rangle, \quad i=1,2. \quad (2)$$

La ecuación de Schrödinger para el vector estado $|\psi\rangle$ es

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (3)$$

con hamiltoniano

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} \quad (4)$$

donde

$$H_i = U_i |i\rangle\langle i|, \quad i=1,2 \quad (5)$$

y el acoplamiento entre los superconductores está representado como

$$H_{\text{int}} = -K(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|). \quad (6)$$

Tomando en cuenta el producto interno de la ecuación (3) con los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ se obtiene las ecuaciones de movimiento de los dos superconductores débilmente acoplados.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= U_1 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= U_2 \psi_2 + K \psi_1 \end{aligned} \quad (7)$$

En el término de acoplamiento entre ambos lados, la constante K es la probabilidad de que pueda haber filtración de un lado a otro. Si K es nula, estas ecuaciones describirían simplemente el estado de energía más bajo (con energía U) de cada superconductor. Si se conecta los dos superconductores a las terminales de una batería para que exista una diferencia de potencial V en la unión, entonces, $U_1 - U_2 = 2eV$. Por conveniencia, se define el cero de energía, a la mitad de esta cantidad, así las ecuaciones (7) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= eV \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -eV \psi_2 + K \psi_1 \end{aligned} \quad (8)$$

Entonces se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas para dos estados cuánticos. Las funciones de onda macroscópicas para cada superconductor son dadas por

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\rho_1} e^{i\phi_1} \\ \psi_2 &= \sqrt{\rho_2} e^{i\phi_2} \end{aligned} \quad (9)$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son las fases a los dos lados de la unión y ρ_1, ρ_2 son las densidades de carga en cada lado. Al sustituir las expresiones (9) en las ecuaciones (8) se obtienen las siguientes cuatro expresiones:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= +\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin\phi \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{2}{\hbar} K \sqrt{\rho_2 \rho_1} \sin\phi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= +\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos\phi - \frac{eV}{\hbar} \\ \dot{\phi}_2 &= +\frac{K}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos\phi + \frac{eV}{\hbar} \end{aligned} \quad (11)$$

donde se denota a la diferencia de fase como $\phi = \phi_2 - \phi_1$.

Las ecuaciones (10) describen el tipo de corriente que comenzaría a circular en la unión desde un lado al otro, la cual es simplemente $J_s = \dot{\rho}_1 = -\dot{\rho}_2$, es decir,

$$J = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \text{sen}\phi \quad (12)$$

Esta densidad de corriente es debida a los pares de Cooper y es conocida como **densidad de supercorriente**. Una situación a considerar es que la supercorriente cargaría pronto un lado de la unión y descargaría al otro; para evitar esto y lograr un estado estacionario, ambos lados deben estar conectados a una fuente de potencial. La corriente debida a la fuente no ha sido incluida en las ecuaciones, si se toma en cuenta, ρ_1 y ρ_2 no varían y la corriente a través de la unión continúa siendo dada por la ecuación (12).

Como ρ_1 y ρ_2 permanecen constantes, es decir, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, se define la **densidad de corriente crítica** $J_c = 2K\rho_0/\hbar$. Así, la ecuación (12) se expresa de la siguiente forma:

$$J = J_c \text{sen}\phi \quad (13)$$

que obtendrá valores comprendidos entre J_c y $-J_c$.

Por otro lado, al definir $\dot{\phi} = \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1$ y hacer uso del segundo par de ecuaciones (11), se llega a la siguiente expresión:

$$\dot{\phi} = \frac{2eV}{\hbar}. \quad (14)$$

donde $\frac{2e}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\Phi_0}$ es conocida como la **constante de Josephson** y es inversamente proporcional al cuanto de flujo magnético¹ $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$; la solución de (14) es

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{2e}{\hbar} \int_0^t V(t) dt \quad (15)$$

donde ϕ_0 es el valor de ϕ a $t = 0$.

Las ecuaciones (13) y (14) son un resultado importante de la teoría para la unión entre superconductores y son conocidas como las **relaciones Josephson**.

III. COMPONENTES DE LA CORRIENTE TOTAL

En general, la corriente total I suministrada por una fuente de potencial que pasa a través de la unión contiene contribuciones de una corriente de desplazamiento I_d , una corriente ordinaria I_n debida a los electrones libres y una supercorriente I_s de pares de electrones, es decir, $I = I_d + I_n + I_s$.

A. Corriente normal

Cuando la temperatura $T \neq 0$, siempre habrá movimiento térmico de cargas cuya energía es del orden de $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann². Recordemos que en un superconductor, el aumento de temperatura provoca el rompimiento de pares de Cooper, dando origen a las cuasi-partículas (electrones libres con características distintas a los de un metal normal). Hay dos propiedades generales a considerar de esta corriente normal o de cuasipartículas I_n :

- Cuando T es menor pero cercano a una temperatura crítica³ T_c , la energía de acoplamiento de los pares Cooper $E_g = 2\Delta$ es mucho menor a $k_B T$, dando como resultado la disminución de los pares y aumentando la concentración de electrones normales⁴.
- Si el voltaje a través de la unión está por encima del voltaje asociado a la energía de la brecha $V_g = |\Delta_1 + \Delta_2|/e$, los pares de Cooper de un lado de la unión se rompen y uno de los electrones de cada uno de los pares disueltos pasan al otro lado, es decir, se produce un tunelamiento de corriente de cuasi-partículas.

En ambos casos, si la concentración de cuasi-partículas continúa en aumento, el comportamiento de la unión tenderá a uno de tipo óhmico, es decir, la relación entre la corriente total y el voltaje suministrado cumplirá con la ley de Ohm.

B. Corriente de desplazamiento

La unión Josephson forma, en cierta medida, es un capacitor de placas paralelas superconductoras con un material aislante o normal entre ellas, entonces podemos hablar de una corriente de desplazamiento I_d como aportación a la corriente total. La capacitancia C de este dispositivo está definida de la misma manera que en el estado normal:

² $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \approx 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg/K}$.

³ Cada material superconductor están caracterizado por una temperatura crítica T_c en la cual pasan del estado normal al superconductor.

⁴ La relación del número de electrones superconductores con la temperatura fue primero deducida por los hermanos London, la cual afirma que al aumentar la temperatura hasta T_c , el número de superelectrones disminuye hasta anularse justamente en T_c . Por otro lado, $E_g = 2\Delta$ es el ancho de la banda prohibida que presentan los superconductores en sus niveles de energía y está relacionada con la energía necesaria para separar el par de Cooper. Si la energía aplicada es menor a E_g , no se logrará excitar al par y en consecuencia los electrones que lo conforman no se separaran. Si la energía es mayor a E_g , el par se rompe y la energía sobrante se convierte en energía cinética para los electrones.

¹ $\Phi_0 \approx 2.07 \times 10^{-15} \text{ Wb}$

$$C = \epsilon_r \frac{A}{4\pi d} \quad (16)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa de la capa que separa a los dos superconductores, d la separación de los superconductores y A el área de los mismos.

C. Supercorriente

Se puede expresar la relación Josephson (13) en términos de la corriente I_s y una corriente crítica I_c . En general, la corriente está relacionada con la densidad de corriente J como

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

donde S es la superficie por la que atraviesa el flujo de densidad de corriente. Si se considera que los vectores \mathbf{J} y $d\mathbf{S}$ tienen la misma dirección, entonces la expresión (4.18) puede describirse como

$$I_s = \iint_S J_s dS = \iint_S J_c dS \sin\phi,$$

es decir,

$$I_s = I_c \sin\phi \quad (17)$$

donde se ha denominado a la integral de superficie de J_c como la **corriente crítica** I_c . Esta corriente es un parámetro experimental importante del dispositivo que puede alterarse tanto por la temperatura como por un campo magnético aplicado.

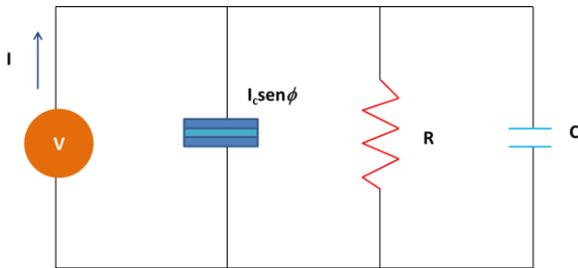


Figura 2 Circuito eléctrico equivalente

IV. ECUACIÓN DE MOVIMIENTO

A. Circuito eléctrico equivalente

Para obtener la ecuación de movimiento que rige a la unión túnel, se realiza una representación de la misma por medio de un circuito equivalente cuyos elementos se encuentran conectados en paralelo. La corriente de desplazamiento está representada por una capacitancia C , la corriente ordinaria por una resistencia R y la supercorriente

por la expresión (17), llegando al circuito mostrado en la Fig. 2.

Al aplicar las leyes de Kirchhoff obtenemos la ecuación de movimiento de este circuito. La caída de voltaje en cada rama del circuito debe ser igual a la diferencia de potencial V entre la unión. Así, la suma de la corriente $C\dot{V}$ que pasa a través de la capacitancia, la corriente V/R que pasa a través de la resistencia y la supercorriente $I_c \sin\phi$, debe ser igual a la corriente I suministrada por la fuente de potencial:

$$C\dot{V} + \frac{V}{R} + I_c \sin\phi = I. \quad (18)$$

Esta ecuación puede ser reescrita en términos de la diferencia de fase ϕ , haciendo uso de la expresión (14):

$$\frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + I_c \sin\phi = I. \quad (19)$$

Esta expresión es análoga a la ecuación que gobierna a un péndulo amortiguado forzado por una torca constante Γ .

B. Formulación adimensional

Para facilitar nuestro estudio, vamos a adimensionalizar la ecuación (19), multiplicándola por I_c^{-1} , de esta manera se obtiene:

$$\frac{\hbar C}{2eI_c} \ddot{\phi} + \frac{\hbar}{2eI_c R} \dot{\phi} + \sin\phi = \frac{I}{I_c}. \quad (20)$$

Ahora, se define un tiempo adimensional τ :

$$\tau = \frac{t}{T} \quad (21)$$

donde T es una escala de tiempo característica. Haciendo uso de la regla de cadena obtenemos las siguientes derivadas:

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\phi}{d\tau} \quad (22)$$

y

$$\ddot{\phi} = \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \frac{d\dot{\phi}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T^2} \frac{d^2\phi}{d\tau^2}. \quad (23)$$

Sustituyendo ambas en la ecuación (20), se tiene:

$$\left(\frac{\hbar C}{2eI_c T^2} \right) \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \left(\frac{\hbar}{2eI_c R T} \right) \frac{d\phi}{d\tau} + \sin\phi = \frac{I}{I_c}. \quad (24)$$

Esta expresión es la ecuación de movimiento adimensional del circuito que representa a la unión túnel Josephson. El término con $d^2\phi/d\tau^2$ representa a la corriente de desplazamiento, el término con $d\phi/d\tau$ está asociado con la corriente ordinaria y $\text{sen}\phi$ con la supercorriente. Las expresiones dentro de los paréntesis son conocidas como **grupos adimensionales**.

V. CASO SOBREAMORTIGUADO

A. Formulación

La ecuación (24) no es tan fácil de resolver, por esta razón se estudiará primero el caso sobreamortiguado, para ello se reescribe esta ecuación de tal manera que el primer término sea despreciable con respecto a los otros, que a su vez se consideran del mismo orden de magnitud. Como las derivadas y el $\text{sen}\phi$ son de orden unitario $O(1)$, requerimos que:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\hbar}{2eI_c R T_1} &\approx O(1) \\ \bullet \frac{\hbar C}{2eI_c T_1^2} &\ll 1 \end{aligned} \quad (25)$$

El primer requisito nos da una escala de tiempo T_1 , una elección natural para obtenerla es igualar a 1:

$$\frac{\hbar}{2eI_c R T_1} = 1 \Rightarrow T_1 = \frac{\hbar}{2eI_c R}. \quad (26)$$

Al sustituir T_1 en el segundo requisito se obtiene lo siguiente:

$$\beta = \frac{2eI_c R^2 C}{\hbar} \ll 1, \quad (27)$$

donde se introduce un nuevo grupo adimensional conocido como el **parámetro de McCumber**, cuyo rango de valores se encuentra entre 10^{-6} y 10^6 , dependiendo del tamaño, la geometría y los materiales utilizados en la unión. Así, la ecuación (24) toma la siguiente forma:

$$\beta \frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \frac{d\phi}{d\tau} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c} \quad (28)$$

Este análisis dimensional lleva al caso sobreamortiguado que sucede cuando $\beta \rightarrow 0$, es decir, el término a despreciar es el asociado a la corriente de desplazamiento I_d con respecto a la corriente ordinaria I_n y la supercorriente I_s . Entonces, esta ecuación se convierte en una ecuación diferencial de primer orden:

$$f(\phi) = \phi' = \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi \quad (29)$$

donde la prima indica derivada con respecto a τ . Esta expresión tiene la estructura de una ecuación para un oscilador no uniforme $\phi' = \omega - a \text{sen}\phi$ con $\omega = I/I_c$ y $a = 1$.

B. Puntos fijos y estabilidad

Los puntos fijos ϕ^* son aquellos que satisfacen $f(\phi^*) = 0$. Para este caso:

$$f(\phi^*) = \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi^* = 0 \Rightarrow \text{sen}\phi^* = \frac{I}{I_c} \quad (30)$$

la cual implica que:

$$\cos\phi^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}. \quad (31)$$

por lo que la ecuación (30) solamente tiene solución cuando $I/I_c \leq 1$. Hay dos casos a considerar:

- Para $I/I_c = 1$ existe solo un punto fijo: $\phi^* = \pi/2$.
- Para $I/I_c < 1$ hay dos soluciones que cumplen con lo siguiente: $\phi_1^* < \pi/2$ y $\phi_2^* > \pi/2$.

La estabilidad de los puntos fijos está determinada por

$$f'(\phi^*) = -\cos\phi^* = \mp \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}. \quad (32)$$

Cuando $f'(\phi^*) > 0$ se tiene un punto fijo inestable, si $f'(\phi^*) < 0$ es estable. Los casos a considerar son:

- Para $I/I_c < 1$, $f'(\phi_1^*) < 0$ por lo tanto ϕ_1^* es un atractor, en tanto que si $f'(\phi_2^*) > 0$, ϕ_2^* es un repulsor⁵.
- Para $I/I_c = 1$, $\cos\phi^* = 0$ en esta situación la estabilidad depende de cómo se acerque uno al punto ϕ^* , para valores $\phi < \pi/2$ el punto se comporta como un atractor en tanto que para $\phi > \pi/2$ como un repulsor, entonces se dice que es un punto fijo **semiestable**.

En las figuras 3, los puntos fijos atractores están representados por puntos de color negro, los repulsores por puntos blancos y los semiestable por puntos rojos.

⁵ Un repulsor es un punto en el cual son repelidas las trayectorias dentro del plano fase, en cambio un atractor es aquel que las atrae.

C. Bifurcación nodo-silla

La aparición de puntos fijos en el plano fase depende del valor de I/I_c , al variar este parámetro se obtiene un desplazamiento vertical de la curva $-\text{sen}\phi$ sobre el eje ϕ' (ver Fig. 3), provocando una bifurcación nodo-silla⁶. Si se considera el comportamiento del flujo en el diagrama circular tenemos lo siguiente:

- Cuando I/I_c es ligeramente mayor que 1 (Fig. 3a), la oscilación del sistema es bastante no uniforme. En este caso, el punto fase $\phi(\tau)$ le toma bastante tiempo pasar por la zona cercana a $\phi = \pi/2$ conocida como **cuello de botella**. Una vez que pasa esta zona, recorre el resto del círculo en una escala de tiempo más rápida.
- Cuando $I/I_c = 1$ (Fig. 3b), el sistema para de oscilar completamente, debido a que ha nacido un punto fijo semiestable en $\phi = \pi/2$.
- Finalmente, cuando $I/I_c < 1$ (Fig. 3c), aparecen dos puntos fijos uno estable y otro inestable, todas las trayectorias son atraídas al punto fijo estable cuando $t \rightarrow \infty$.

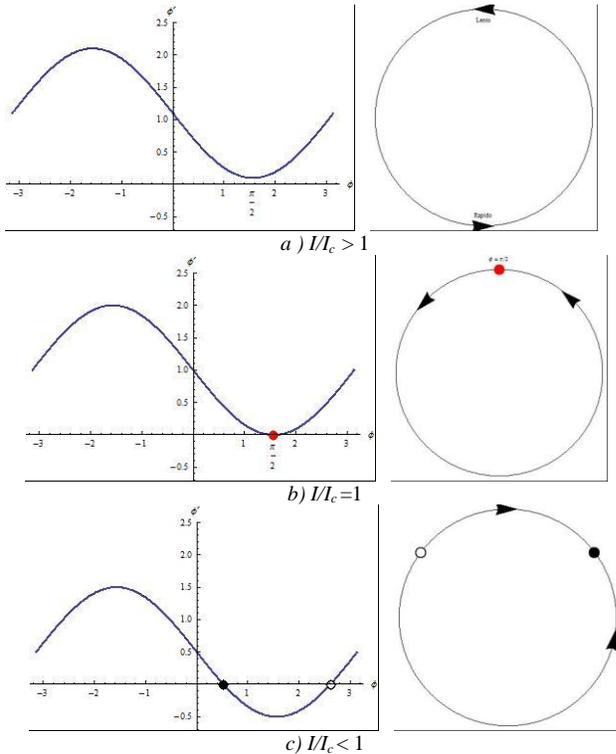


Figura 3 Bifurcación nodo-silla

⁶ La bifurcación nodo-silla es un mecanismo en el cual se crean o se destruyen puntos fijos, debido a que el valor de un parámetro varía. Por ejemplo, dos puntos se acercan uno con respecto al otro, colisionan y se aniquilan o de un punto fijo pueden crearse otros dos.

IV. CASO CONSERVATIVO

A. Formulación

Ahora se presenta el análisis del caso conservativo, donde la corriente ordinaria I_n es despreciable con respecto a las otras corrientes. Para lograr esto, se realiza un tratamiento a los grupos adimensionales similar al caso anterior, es decir, reescribiendo la ecuación (24) de tal manera que el segundo término sea despreciable y los términos primero, tercero y cuarto sean del mismo orden de magnitud. Además, se continúa suponiendo que las derivadas y el $\text{sen}\phi$ son de orden unitario $O(1)$, por lo cual se requiere que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\hbar C}{2eI_c T_2^2} &\approx O(1) \\ \bullet \frac{\hbar}{2eI_c R T_2} &\ll 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Se define una escala de tiempo T_2 distinta a la que se había obtenido para el caso sobreamortiguado a partir del primer requisito igualándolo a 1:

$$\frac{\hbar C}{2eI_c (T_2)^2} = 1 \Rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{\hbar C}{2eI_c}}. \quad (34)$$

Al sustituir T_2 en el segundo requisito se obtiene el grupo adimensional:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2eI_c R^2 C}} \ll 1. \quad (35)$$

Cabe destacar que α y T_2 están relacionadas con el grupo adimensional β y la escala de tiempo T_1 de la siguiente manera:

$$\beta = \frac{1}{\alpha^2} \quad \text{y} \quad T_1 = (T_2)^2.$$

Ahora la ecuación (24) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \alpha \frac{d\phi}{d\tau} + \text{sen}\phi = \frac{I}{I_c}, \quad (36)$$

de la cual se puede obtener el caso conservativo cuando $\alpha = 0$, despreciando así el término asociado a la corriente normal. La expresión obtenida puede escribirse como un sistema de dos ecuaciones, de tal manera que:

$$\begin{aligned} \phi' &= y \\ y' &= \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi \end{aligned} \quad (37)$$

donde la prima indica derivada de ϕ con respecto a τ .

B. Matriz jacobiana y puntos fijos

Para conocer el comportamiento del sistema (37) alrededor de los puntos fijos, se recurre a una linealización del mismo, lo cual implica obtener su matriz jacobiana A evaluada en esos puntos:

$$A|_{\phi^*, y^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial \phi} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{\phi^*, y^*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \phi^* & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

La traza y el determinante de esta matriz son importantes para deducir los tipos de puntos presentes en este sistema, que satisfacen lo siguiente:

$$y^* = 0$$

$$\text{sen} \phi^* = \frac{I}{I_c} \Rightarrow \cos \phi^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2} \quad (39)$$

Entonces, $\text{tr}A = 0$ y $\det A = \cos \phi^* = [1 - (I/I_c)^2]^{1/2}$, así la clasificación de los puntos fijos es la siguiente:

	$I/I_c < 1$	$I/I_c = 1$	$I/I_c > 1$
$\det A > 0$	Centro		$\det A$ imaginario y no hay puntos fijos
$\det A = 0$		punto aislado	
$\det A < 0$	punto silla		

C. Curvas integrales

A continuación se deducirá la expresión para las trayectorias sobre el diagrama fase. Para ello, primero se multiplica la segunda de las expresiones (37) por y :

$$yy' - \frac{I}{I_c} y + y \text{sen} \phi = 0, \quad (40)$$

el lado izquierdo de esta expresión se puede reescribir como la derivada con respecto a τ de una función:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{2} y^2 - \cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi \right) = 0. \quad (41)$$

A partir de aquí definimos la función

$$E(y, \phi) = \frac{1}{2} y^2 - \cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi = \frac{E - E_c}{E_c} \quad (42)$$

con $(E - E_c)/E_c$ como una constante, así se deduce que el sistema es conservativo. La energía cinética es dada por el término $\frac{1}{2} y^2$ y la energía potencial por

$$U(\phi) = -\cos \phi - \frac{I}{I_c} \phi \quad (43)$$

cuyos máximos y mínimos para $I/I_c \leq 1$ son:

$$\text{mínimos: } \phi_n^- = \text{sen}^{-1} \left(\frac{I}{I_c} \right) + 2\pi n, \quad (44)$$

$$\text{máximos: } \phi_n^+ = \pi - \text{sen}^{-1} \left(\frac{I}{I_c} \right) + 2\pi n.$$

Los puntos mínimos son estables mientras que los máximos son inestables.

De la expresión (41) se obtiene una expresión para $y(\phi)$, la cual denominamos como **curva integral**:

$$y(\phi) = \pm \sqrt{2 \left(\cos \phi + \frac{I}{I_c} \phi \right) + 2E}, \quad (45)$$

la cual describe las trayectorias sobre el plano fase para distintos valores de E .

D. Comportamiento de la energía potencial y diagrama fase

Para el caso en que $I/I_c = 0$, no hay una fuente de voltaje que suministre una corriente I y las únicas corrientes que circulan son I_d e $I_c \text{sen} \phi$. Inicialmente la unión tiene energía almacenada, que al no estar conectada a una fuente de potencial, comenzará a “descargarse” cediendo esa energía gradualmente a los pares Cooper generando una supercorriente que circulará por la unión; al no haber disipación de energía debido a la ausencia de corriente normal, la unión vuelve a cargarse siendo esto un proceso periódico similar al de un circuito LC. En este tipo de circuito, el capacitor se descarga provocando una corriente que pasa por el inductor generando un campo magnético e induciendo una **fem**, que cargará al capacitor de nuevo sin pérdida de energía gracias a la ausencia de una resistencia. Para el caso Josephson, la unión almacena energía como si fuese un capacitor y la supercorriente toma el papel de la corriente debida al inductor.

En la cuestión matemática, la expresión (45) toma la siguiente forma:

$$y(\phi) = \pm \sqrt{2(\cos \phi + E)} \quad (46)$$

y la energía potencial es

$$U(\phi) = -\cos \phi. \quad (47)$$

Para este caso los puntos donde la energía potencial es máxima y mínima coinciden con los puntos fijos del sistema; en el caso de $\phi^* = \phi_n^-$ tenemos puntos de tipo centro y para $\phi^* = \phi_n^+$ los puntos son de tipo silla.

En la Fig. 5, la zona delimitada por los puntos de retorno $\pm\phi_0$ debido a que $E > U(\phi)$, con $-1 < E < 1$, la unión se cargará y descargará totalmente, cediendo u obteniendo energía de la supercorriente (Fig. 4), dando origen a una **oscilación eléctrica**.

Cuando $\phi = -\phi_0$, el dispositivo está completamente descargado y la supercorriente está a su máximo de energía potencial $U(-\phi_0) = E$. Conforme ϕ aumenta, la supercorriente va perdiendo energía que la unión va almacenando hasta cargarse por completo en $\phi = 0$. Posteriormente, comienza a descargarse totalmente cediendo esa energía a los pares de Cooper, hasta que la supercorriente vuelve a estar a su máxima energía potencial $U(\phi_0) = E$, para volver a cargar la unión, repitiéndose el proceso descrito de manera periódica.

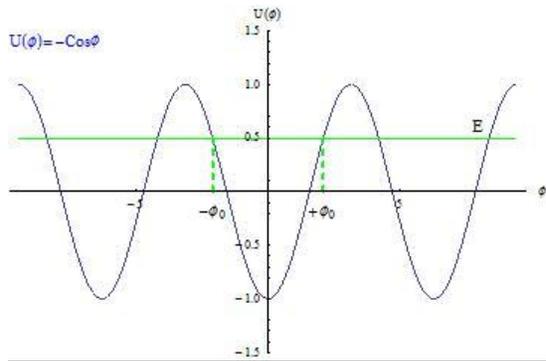


Figura 4 Energía potencial $U(\phi)$

El diagrama fase es el mismo que el de un péndulo simple (Fig. 5), donde se puede apreciar los puntos silla y centro, así como también las separatrices que une a los puntos sillas y que a su vez encierran a las trayectorias cerradas asociadas a oscilaciones eléctricas. Las trayectorias fuera de las separatrices están asociadas a “movimientos” no oscilatorios pero periódicos; estos “movimientos” consisten en lo siguiente: la unión almacena energía que va cediendo a los pares de Cooper pero sin descargarse por completo, posteriormente la supercorriente cede energía potencial al dispositivo para volverlo a cargar y repetir el proceso de descarga parcial. Todo esto sucede de manera periódica.

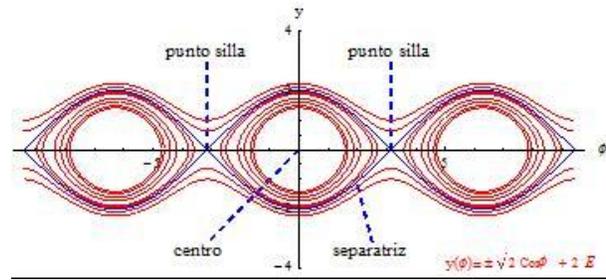


Figura 5 Plano fase del sistema

Cuando $I/I_c < 1$, tenemos ya la presencia de un fuente de potencial que suministra una corriente I al dispositivo. La expresión $U(\phi)$ es una función cosenoidal cuyos nodos ya no se encuentran a lo largo del eje x sino sobre la línea recta $(I/I_c)\phi$ cuya pendiente está asociada al parámetro I/I_c (Fig. 6).

La oscilación del sistema dependerá de las condiciones iniciales. Para un valor particular de E , el sistema puede oscilar entre los puntos de retorno ϕ_1 y ϕ_2 , dados por la expresión:

$$U(\phi_i) = -\cos \phi_i - \frac{I}{I_c} \phi_i = E; \quad i = 1, 2 \quad (48)$$

es decir, el dispositivo se carga totalmente gracias a la energía cedida por la supercorriente y la fuente, pero se descarga por completo al ceder energía a los pares de Cooper, realizando este proceso periódicamente. Sin embargo, si la condición inicial es tal que $\phi = \phi_3$, puede que no exista oscilaciones eléctrica y solamente el dispositivo se cargue y descargue de manera parcial debido a la presencia de una fuente de potencial.

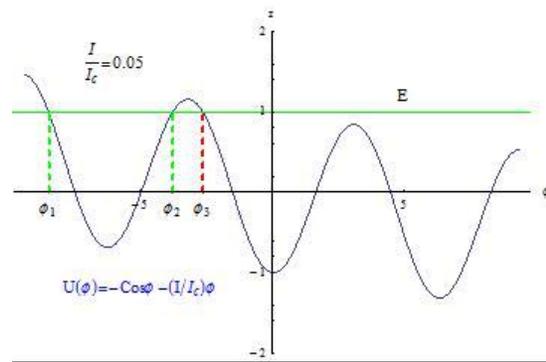


Figura 6 Energía potencial $U(\phi)$

En el diagrama fase (Fig. 7), la separatriz ha cambiado su forma pero continua encerrando los puntos centros y las trayectorias cerradas asociadas a oscilaciones. Los puntos silla continúan presentes pero no en la misma cantidad que en el caso anterior.

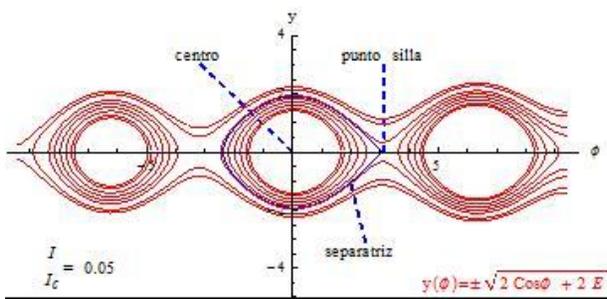


Figura 7 Plano fase del sistema

En el caso de $I/I_c = 1$, la energía potencial $U(\phi)$ ya no tiene máximos ni mínimos, pero en $\phi_n = (n+1)\pi/2$, existen puntos de inflexión de esta curva (Fig. 8). Si se considera una energía $E = U(\phi_1)$, inicialmente la unión no tiene almacenada energía cuando $\phi = \phi_1$, pero comienza a cargarse gracias a la supercorriente y la corriente I conforme aumenta ϕ ; al acercarse al punto de inflexión el dispositivo cede energía a los pares de Cooper pero la unión continua cargándose gracias a la fuente de potencial, una vez que pasó $\phi = \pi/2$, la supercorriente vuelve a ceder energía para almacenar en la unión hasta que llega de nuevo a otro punto de inflexión para que la unión le ceda de nuevo energía a los pares. Este proceso se realiza así sucesivamente. Cabe destacar que la unión no se descarga por completo.

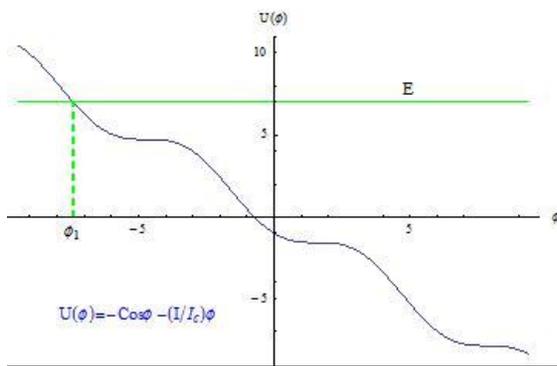


Figura 8 Energía potencial $U(\phi)$

En el plano fase existe un punto fijo de orden superior en $\phi = \pi/2$ y no hay curvas cerradas de ningún tipo sobre el cilindro incluida la separatriz que pasa por el punto fijo. Las trayectorias en el diagrama fase al no cerrarse se extienden hacia las partes superior e inferior del plano.

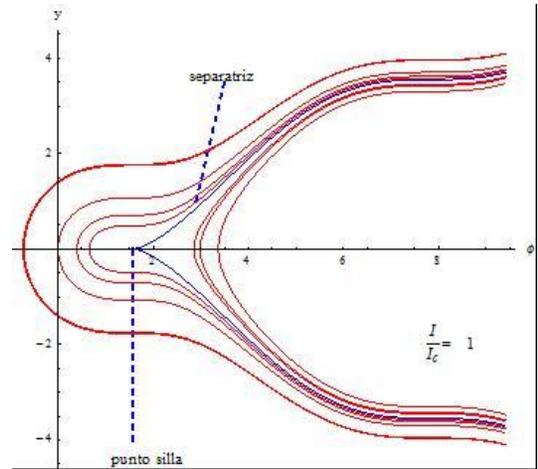


Figura 9 Plano fase del sistema

Para $I/I_c > 1$, la función $U(\phi)$ no tiene máximos ni mínimos y tampoco puntos de inflexión.

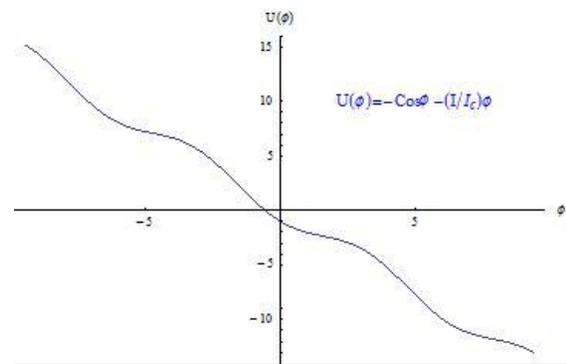


Figura 10 Energía potencial $U(\phi)$

En cuanto al diagrama fase, ya no existen puntos fijos y la separatriz ha desaparecido. Todas las trayectorias continúan abriéndose y extendiéndose en todo el plano fase. Todo esto debido a la ausencia de amortiguamiento.

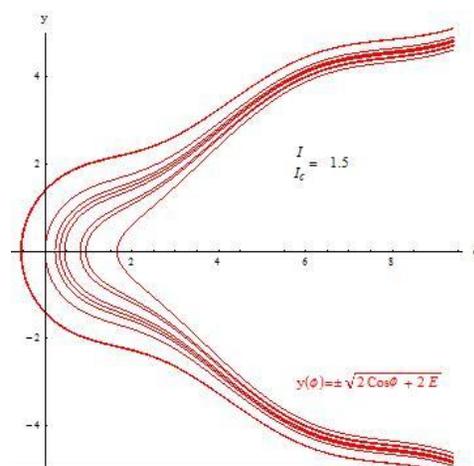


Figura 11 Plano fase del sistema

V. CASO AMORTIGUADO

El caso amortiguado es dado por la expresión (36), en el cual se está considerando todas las corrientes presentes en la unión túnel Josephson. Esta ecuación también puede escribirse como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \phi' &= y \\ y' &= \frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi - \alpha y \end{aligned} \quad (49)$$

E. Matriz jacobiana y puntos fijos

La matriz jacobiana A del sistema de ecuaciones (49) evaluada en los puntos fijos es:

$$A|_{\phi^*, y^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} & \frac{\partial \phi'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial \phi} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos \phi^* & \alpha \end{pmatrix}$$

Las condiciones que satisfacen los puntos fijos de las expresiones (49) son las mismas que en las presentadas en las expresiones (39) y la clasificación de estos puntos está determinada por $\text{tr}A = -\alpha < 0$ y $\text{det}A = \cos \phi^* = \pm [1 - (I/I_c)^2]^{1/2}$:

	$I/I_c < 1$	$I/I_c = 1$	$I/I_c > 1$
$\text{det}A > 0$	nodo estable, si $\text{tr}A - 4\text{det}A > 0$		No hay puntos fijos
$\text{det}A = 0$		punto semiestable	
$\text{det}A < 0$	punto silla		

F. Bifurcación nodo-silla

Igual que en el límite sobreamortiguado, también en este caso se presenta la bifurcación nodo-silla, es decir, conforme se varía el valor del parámetro, los puntos fijos se acercan hasta colisionar justo cuando $I/I_c = 1$, para posteriormente desaparecer. En la Fig. 12 se muestran los retratos fase para distintos valores de I/I_c y con α fijo, así como también las respectivas nulclinas⁷, las cuales son:

$$\begin{aligned} a) & y = 0 \text{ cuando } \phi' = 0; \\ b) & y = \alpha^{-1} \left(\frac{I}{I_c} - \text{sen}\phi \right) \text{ cuando } y' = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

La nulclina $y = \alpha^{-1}(I/I_c - \text{sen}\phi)$ va desplazándose de manera vertical a través del plano fase conforme varía I/I_c , cuando este es ligeramente mayor que 1, los puntos fijos ya no existen pero todavía existe una influencia de ellos sobre el flujo, dando origen al fenómeno de **cuello de botella**.

⁷ Las nulclinas son aquellas curvas que indican donde el flujo es puramente vertical ($\phi' = 0$) o puramente horizontal ($y' = 0$).

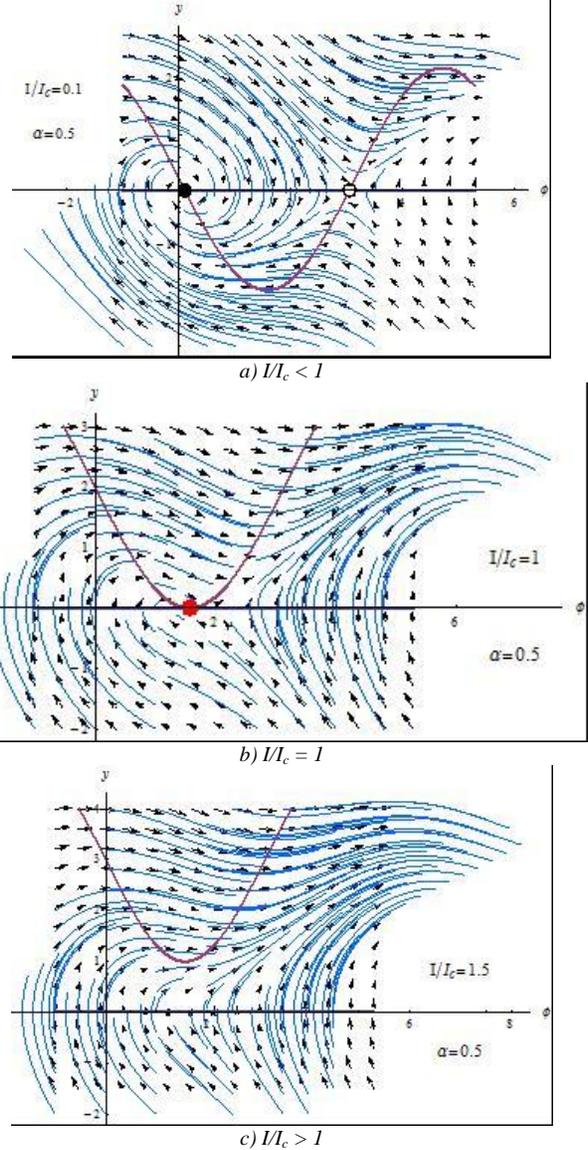


Figura 12 Diagrama fase

VI. CONCLUSIONES

A. Caso conservativo

Para este caso, la unión Josephson se comporta como un circuito LC, que en el caso en que $I = 0$ se reduce a un circuito tanque; parte de la energía se almacena en la unión, y parte en el condensador. Para encontrar cuanta energía se almacena en la inductancia, se considera un proceso en el cual un sistema externo realiza el siguiente trabajo provocando que la diferencia de fase cambie de ϕ_1 a ϕ_2 :

$$\begin{aligned} W &= \int_{t_1}^{t_2} I_s V dt = \frac{\hbar I_c}{2e} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \text{sen}\phi d\phi \\ &= \frac{\hbar I_c}{2e} (\cos \phi_1 - \cos \phi_2) = -\Delta U_s(\phi) \end{aligned} \quad (51)$$

donde se ha hecho uso de las relaciones Josephson (14) y (17). En la expresión (51) se puede observar que este trabajo solo depende de los valores inicial y final de la fase; además de sugerir que la energía potencial de la supercorriente es dada por

$$U_s(\phi) = \frac{\hbar I_c}{2e} (1 - \cos \phi) = E_c (1 - \cos \phi) \quad (52)$$

la cual se considera en la expresión (43) en su forma adimensional y teniendo como valor máximo de energía $E_c = \hbar I_c / e$.

La conservación y almacenamiento de energía en la unión apuntan a que se puede considerar la existencia de una reactancia no lineal en el dispositivo. Para explicar el carácter de esta reactancia, se considera un proceso arbitrario con una pequeña variación tal que $\phi \rightarrow \phi + \delta\phi$, al sustituir esto en las relaciones (14) y (17) se encuentra:

$$\delta\phi = \frac{2e}{\hbar} \delta V; \delta I_s = I_c \cos \phi \delta\phi$$

combinando estas ecuaciones se llega a la siguiente relación:

$$\frac{d\delta I_s}{dt} = \delta \dot{I}_s = \frac{2e I_c}{\hbar} \cos \phi \delta V = \frac{1}{L_s(t)} \delta V \quad (53)$$

mostrando que la unión se comporta como una inductancia no lineal, donde

$$\frac{1}{L_s} = \frac{1}{L_c} \cos \phi, \quad \text{con } L_c = \frac{\hbar}{2e I_c}$$

Con la expresión (54) se muestra que para una señal débil la supercorriente es equivalente a una inductancia L_s que depende de los procesos básicos en la unión. Una propiedad inusual en esta inductancia es su capacidad de adquirir valores negativos en los intervalos $\pi/2 + 2\pi n < \phi < 3\pi/2 + 2\pi n$.

B. Caso sobreamortiguado

El circuito equivalente para este caso consiste de una resistencia R y la supercorriente I_s . Al no ser despreciable el amortiguamiento, las oscilaciones eléctricas no son uniformes, provocando que en ciertas condiciones dejen de existir. El sistema no está almacenando energía y parte ella es disipada.

C. Caso amortiguado

En este caso, tenemos un circuito similar al RLC, donde hay disipación y almacenamiento de energía en la unión. Si el dispositivo está conectado a una fuente de potencial, esta

mantendrá el flujo de corriente y existirán oscilaciones eléctricas pero tenderán a desaparecer si la corriente administrada por la fuente llega a ser mayor a la supercorriente.

REFERENCIAS

- [1] Andranov A. A., Vitt A. A and S. E. Khaikin. *Theory of Oscillators*. Dover Publications Inc. New York. 1987.
- [2] Ashcroft N. W. and Mermin N. D. *Solid State Physics*, Harcourt College Publisher, 1976.
- [3] Borhani M. and Hadi Varahram M. *Simulation of Nonlinear Dynamics Effects for Josephson Junctions*. WSEAS Transactions on Systems Issue 7, Vol. 3, p. 2501, September 2004.
- [4] Couillet P., Gilli J. M. and Vandenberghe N. *A Damped Pendulum Forced with A Constant Torque*. American Journal of Physics Vol. 73, No. 12, pp. 1122-1128. Dec. 2005.
- [5] Feynman R. Física Vol. III, Mecánica Cuántica, Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- [6] Goldstein H. *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté. Barcelona. 1987.
- [7] Hansma P. K. and Rochlin G. I. *Josephson Weak Links: Shunted-Junction and Mechanical-model Results*. Journal of Applied Physics Vol. 43, No. 11, pp. 4721-4727, Nov. 1972.
- [8] Josephson B. D. *Possible New Effects in Superconductive Tunneling*. Physics Letters Vol. 1, No. 7, pp. 251-253, July 1962.
- [9] McCumber D. E. *Tunneling and Weak-Link Superconductor Phenomena Having Potential Device Applications*. Journal of Applied Physics Vol. 39, No. 6, pp. 2503-2508, May 1968.
- [10] McCumber D. E. Effect of ac Impedance on dc Voltage-Current Characteristics of Superconductor Weak-Link Junctions. Journal of Applied Physics Vol. 39, No. 7, pp. 3113-3118, June 1968.
- [11] Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*, 7th Edition, John Wiley & Sons, Inc. 1996.
- [12] Likharev, K. K. *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach Science Publishers. Glasgow. 1986.
- [13] Magaña Solís L. F. *Los Superconductores*. Fondo de Cultura Económica. México. 1988.
- [14] Marion J. B. *Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas*. Editorial Reverté. Barcelona. 1998.
- [15] Navarro Chávez O. y Baquero Parra R. *Ideas Fundamentales de la Superconductividad*. Universidad Nacional Autónoma de México. Morelia. 2007.
- [16] Prieto P. y Lopera W. *Junturas Josephson basadas en Superconductores de Alta Temperatura*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Vol. 25, No. 96, pp. 381-394. Septiembre 2001.
- [17] Posazhennikova A. *Josephson Effect in Superconductors and Superfluids*. arXiv.org. 2009. <http://arxiv.org/abs/0908.1761>
- [18] Stewart W. C. *Current-Voltage Characteristics of Josephson Junctions*. Applied Physics Letters Vol. 12, No. 8, pp. 277-280, 1968.
- [19] Strogatz S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [20] Van Duzer T. and Turner C. W. *Principles of Superconductive Devices and Circuits*. 2nd Edition. Prentice Hall. 1999.