



## **ANÁLISIS INELÁSTICO DE ELEMENTOS DE CONCRETO REFORZADO BASADO EN LA MECÁNICA DEL DAÑO**

**Juan Jesús Gutiérrez Trejo<sup>1</sup>, Jaime Retama Velasco<sup>2</sup> y A. Gustavo Ayala Mili'an<sup>3</sup>**

### **RESUMEN**

En este trabajo se presenta un modelo numérico, basado en el método de los elementos finitos y en conceptos de la mecánica del daño, para predecir el comportamiento no lineal de estructuras de concreto. Para simular el comportamiento no lineal del concreto, ocasionado por el agrietamiento que éste sufre, se utiliza una aproximación de discontinuidades interiores; conjuntamente con un modelo de daño cohesivo. La interacción entre el concreto y el acero se introduce mediante un modelo constitutivo basado en desplazamientos relativos entre ambos materiales, con el que es posible determinar el deslizamiento entre ellos, así como la disipación de energía asociada a la pérdida de adherencia. El modelo presentado ofrece ventajas sobre otros en aspectos tales como el mallado del dominio, la simulación del proceso de agrietamiento del concreto y el corrimiento de varillas de refuerzo. Para ilustrar la aplicación del modelo propuesto, se presenta un ejemplo con el cual es posible validar los resultados numéricos obtenidos comparándolos con resultados experimentales reportados por otros investigadores.

### **ABSTRACT**

In this paper a numerical model based on the finite element method and concepts of damage mechanics to predict the nonlinear behavior of concrete structures is presented. To simulate the non-linear behavior of the concrete, cracking caused by it undergoes, used an approximation of embedded discontinuities; together with a cohesive damage model. The interaction between concrete and steel is introduced via a constitutive model based on relative displacements between the two materials, it is possible to determine the slip between them as well as the energy dissipation associated with the loss of adhesion. The model presented provides advantages over other aspects such as the meshing domain, process simulation of cracking of concrete and reinforcing rods. To illustrate the application of the proposed model, examples that is possible to validate the numerical results obtained by comparing with experimental results reported by other researchers are presented.

### **INTRODUCCIÓN**

El comportamiento mecánico de elementos estructurales de concreto reforzado es afectado por la formación de grietas durante el proceso de carga. En muchas ocasiones se puede dar el caso en que la resistencia última de estos miembros estructurales esté determinada por un mecanismo de colapso, inducido por la formación de una o varias grietas, las cuales, en esta instancia ya han originado un daño considerable en el concreto reforzado (Oliver y otros, 2008). Por lo tanto, es de principal importancia disponer de herramientas numéricas capaces de reproducir adecuadamente la formación y propagación del agrietamiento en sólidos de concreto reforzado durante su evolución al colapso.

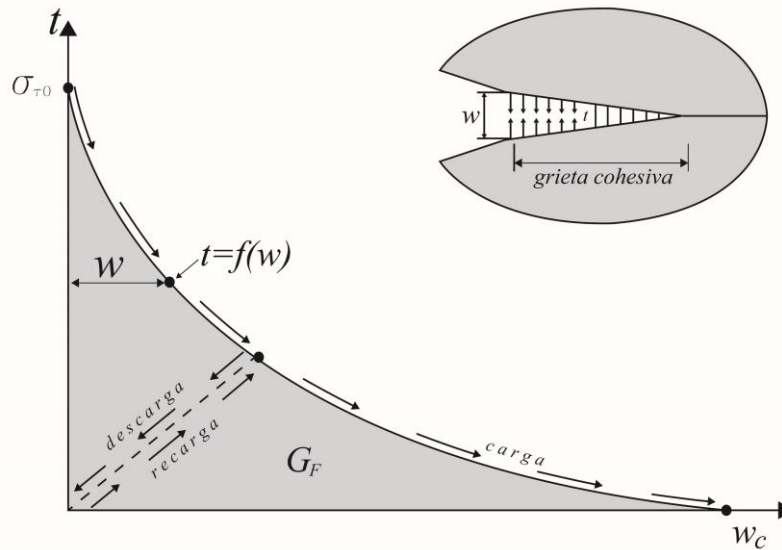
---

<sup>1</sup> Estudiante de Posgrado en Estructuras, Mecánica Aplicada, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Del. Coyoacán, México, D.F., C.P. 04510, Tel: (55) 562233600, Ext. 8352. [JGutierrezT@iingen.unam.mx](mailto:JGutierrezT@iingen.unam.mx).

<sup>2</sup> Investigador, Mecánica Aplicada, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Del. Coyoacán, México, D.F., C.P. 04510, Tel: (55) 562233600, Ext. 8352. [JRetamaV@iingen.unam.mx](mailto:JRetamaV@iingen.unam.mx).

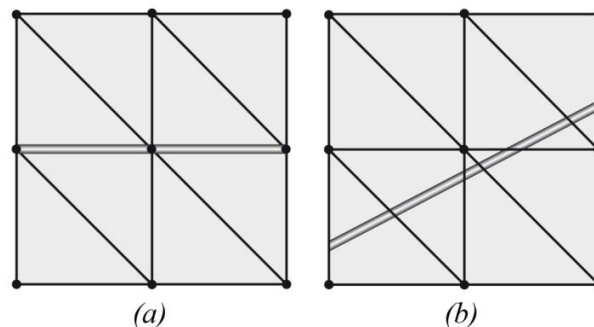
<sup>3</sup> Investigador, Mecánica Aplicada, Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Interior, Ciudad Universitaria, Del. Coyoacán, México, D.F., C.P. 04510, Tel: (55) 562233600, Ext. 8352. [GAyalaM@iingen.unam.mx](mailto:GAyalaM@iingen.unam.mx).

Usualmente el agrietamiento en materiales cuasi—frágiles, como el concreto, es modelado de forma distribuida, es decir, el material agrietado es tratado como un material continuo, simulando la pérdida de la capacidad de carga a través de una variable de daño que modifica las ecuaciones constitutivas continuas. No obstante, estos modelos presentan una respuesta demasiado rígida debido a que no son capaces de reproducir el comportamiento de una discontinuidad (Simone, 2003). Para reproducir de una forma más realista el proceso de falla en materiales cuasi—frágiles, durante los últimos años se han desarrollado técnicas numéricas que toman en cuenta discontinuidades físicas en sólidos, modificándose de forma natural el campo de desplazamientos y de deformaciones (Alfaiate y otros, 2002; Juárez, 2006; Retama, 2010a). Para relacionar el campo de desplazamientos discontinuo con el proceso de disipación de energía producido por el daño, se introduce una relación constitutiva del tipo tracción—salto en la superficie que forma la discontinuidad (Retama y otros, 2014), Fig. 1; a este modelo numérico que simula el proceso de daño se le conoce con el nombre de “*Discontinuidades Interiores*”.



**Figura 1. Proceso de ablandamiento del material**

Asimismo, es posible extender la metodología anterior a la aplicación del comportamiento del concreto reforzado, reproduciendo los posibles efectos mecánicos que le transmite el acero de refuerzo al concreto simple, *i.e.* resistencia y desarrollo de adherencia. Dentro de la simulación numérica, el acero de refuerzo puede ser modelado ya sea a escala mesoscópica o macroscópica (Retama y otros, 2014; Retama y Ayala, 2011). En la escala mesoscópica, el concreto reforzado es modelado empleando elementos homogéneos de concreto y acero, y su interacción es simulada introduciendo elementos de interface (de espesor cero). No obstante, en problemas de interés práctico, esta aproximación podría demandar un alto costo computacional, debido a que se necesitan mallas estructuradas para localizar al acero de refuerzo, Fig. 2a. Por el contrario, en la escala macroscópica, se puede considerar que el acero de refuerzo se encuentra embebido dentro del elemento de concreto, prescindiendo de mallas estructuradas, y reduciéndose la demanda computacional, Fig. 2b.



**Figura 2. a) Acero de refuerzo homogéneo, b) acero de refuerzo embebido.**

Con el fin de simular el comportamiento mecánico del concreto reforzado de una forma realista, incluyendo los fenómenos inelásticos que lo caracterizan en su evolución al colapso, en este artículo se presenta la formulación y la aplicación de un elemento finito de concreto reforzado, considerando:

- 1) El agrietamiento que sufre el concreto simple empleando el Modelo de Discontinuidades Interiores.
- 2) El comportamiento no lineal del acero de refuerzo mediante un modelo constitutivo elasto—plástico perfecto.
- 3) La adherencia entre el concreto y el acero a través de un modelo constitutivo adaptado para el acero de refuerzo.

## COMPORTAMIENTO CONSTITUTIVO DE LOS MATERIALES

### MODELO DE DAÑO DISCRETO

El comportamiento del concreto sano es modelado a través de un modelo constitutivo elástico lineal continuo, mientras que para la zona en proceso de agrietamiento se emplea una relación constitutiva discreta del tipo tracción—salto, (Retama, 2010a; Hillerborg y otros, 1976; Bazant y Planas, 1998).

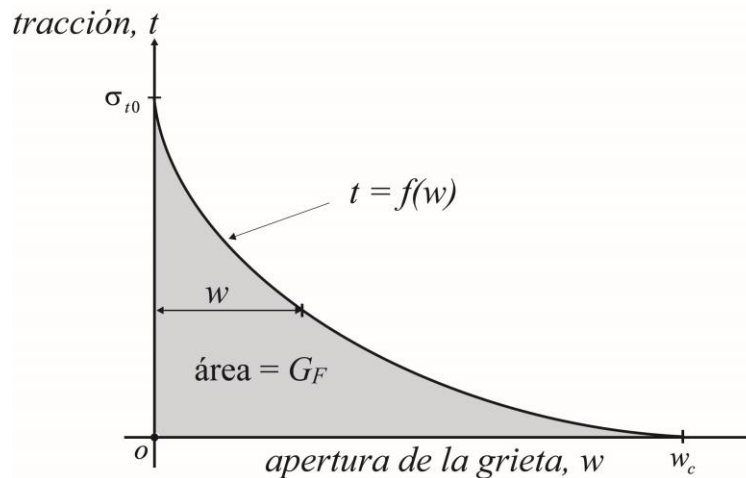


Figura 3. Relación constitutiva Tracción—salto

Para materiales cuasi—frágiles se asume que el inicio del agrietamiento ocurre de acuerdo al criterio de Rankine, *i.e.*, cuando el esfuerzo principal máximo alcanza la resistencia a tensión del material  $\sigma_{to}$ . Asimismo, se asume que la aparición de una grieta se presenta en una banda de ancho finito, conocida como zona de localización de deformaciones, orientada perpendicularmente a la dirección del esfuerzo principal máximo. La evolución del agrietamiento se modela despreciando las tracciones cortantes en la discontinuidad.

Las tensiones normales en la frontera de la discontinuidad se definen mediante la siguiente relación constitutiva tracción—salto:

$$t_n(\kappa) = \sigma_{to} \left[ 1 - \frac{\kappa}{w_c} \right]^n \quad (1)$$

donde

$$\kappa = \kappa(u_n) = \max\langle u_n \rangle \quad (2)$$

es una variable de daño escalar interna, equivalente al salto de la discontinuidad,  $u_n$  es la componente normal del vector salto de desplazamientos. El símbolo  $\langle \rangle$  corresponde a los corchetes de McAuley, e indican que únicamente se considera la parte positiva de  $u_n$ ;  $\sigma_{to}$  es la resistencia a tensión del concreto simple,  $w_c$  es el salto normal máximo que puede experimentar la grieta y  $n$  es una constante que define la forma de la curva de ablandamiento, ver Fig. 3.

El proceso irreversible causado por el daño en la frontera de la discontinuidad se define con la función de carga/descarga  $f$  :

$$f = \langle u_n \rangle - \kappa \leq 0 \quad (3)$$

Para relacionar la variación de las tracciones en la frontera de la discontinuidad con la energía de fractura liberada por unidad de área  $G_F$ , se calcula el tensor constitutivo tangente  $\mathbf{T}$  a través de la siguiente relación

$$G_F = \int_0^{w_c} t_n d\kappa \quad (4)$$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial t_n}{\partial \kappa} = -\frac{n \sigma_{to}}{w_c} \left[ 1 - \frac{\kappa}{w_c} \right]^{(n-1)} \quad (5)$$

Las condiciones iniciales para introducir una discontinuidad en el Modo—I de falla son las siguientes:

$$\kappa = \kappa_0 \quad (6a)$$

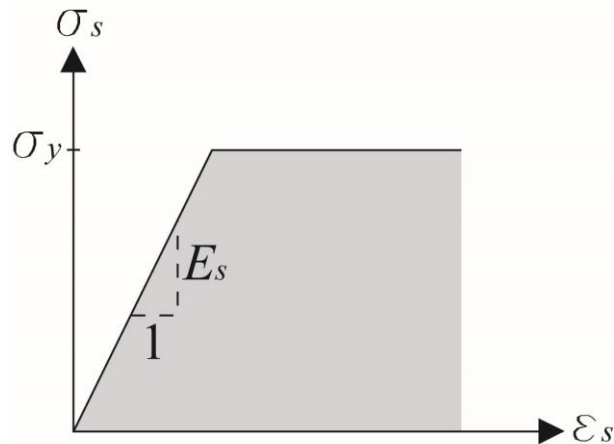
$$u_n = \kappa_0 \quad (6b)$$

$$t_n = \sigma_I = \sigma_{to} \quad (6c)$$

$$t_s = 0 \quad (6d)$$

## MODELO PARA EL ACERO DE REFUERZO

El modelo constitutivo empleado para determinar el comportamiento del acero de refuerzo es elasto—plástico perfecto, despreciando el endurecimiento por deformación cinemática e isotrópica, Fig. 4. En la simulación numérica de estructuras de concreto reforzado, este modelo ha demostrado tener convergencia y estabilidad numérica con un costo computacional razonable, sin afectar la exactitud de los resultados experimentales, siempre y cuando la energía de deformación del modelo analítico sea igual a la energía de deformación obtenida en pruebas de laboratorio (Ngo y Scordelis, 1967; Kwak y Filippou, 1990). A continuación se define el modelo constitutivo que define el comportamiento del acero de refuerzo:



**Figura 4. Modelo constitutivo para el acero de refuerzo**

Si el esfuerzo experimentado por el acero de refuerzo  $\sigma_s$  es menor al esfuerzo de fluencia  $\sigma_y$ ,

$$\sigma_s < \sigma_y \text{ entonces } \sigma_s = E \varepsilon_s \quad (7)$$

de lo contrario, si el esfuerzo interno es igual o mayor al de fluencia

$$\sigma_s \geq \sigma_y \text{ entonces } \sigma_s = E(\varepsilon_s - \varepsilon_p) \tag{8}$$

donde  $\varepsilon_s$  y  $\varepsilon_p$  son la deformación elástica y plástica respectivamente.

### MODELO DE ADHERENCIA

En estudios simplificados de estructuras de concreto reforzado, se asume una compatibilidad de deformaciones perfecta, sin embargo esta suposición es válida únicamente en aquellas regiones donde son despreciables los esfuerzos entre ambos materiales. En regiones de alta concentración de esfuerzos, por ejemplo, cerca de zonas agrietadas (ver Fig. 5), se presentan desplazamientos relativos entre el concreto y el acero de refuerzo, ocasionando el deslizamiento entre ellos (Meyer y Okamura, 1985). Asimismo, la capacidad de carga del concreto reforzado es influenciada por la interacción entre ambos materiales, y la transferencia mutua de rigidez entre el concreto y el acero se da principalmente a través de la adherencia entre ellos (Katz, 1999; Kwak y Filippou, 1990); si se prescinde de este fenómeno en el estudio del comportamiento del concreto reforzado se estaría sobrestimando la capacidad de carga del concreto reforzado (Park y Paulay, 1975), es por ello que la interacción entre ambos materiales no se debe excluir en el análisis del comportamiento del concreto reforzado cuando éste se estudia en su evolución a un estado de falla.

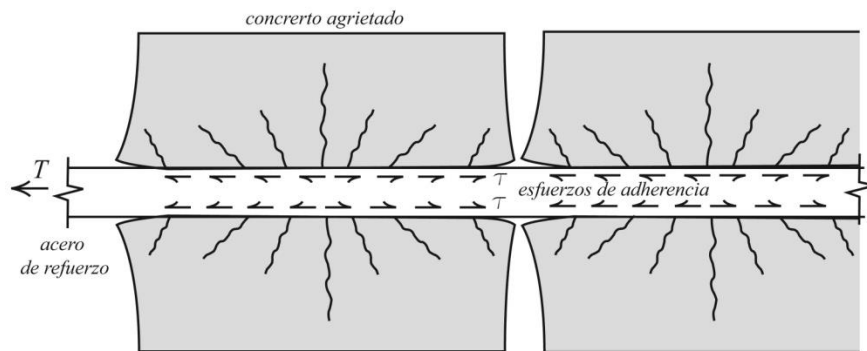


Figura 5. Concreto agrietado en zona de alta concentración de esfuerzos.

En esta investigación se considera el posible deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto que lo rodea, y para ello se emplea el modelo de adherencia CEB—FIP Model Code 1990, Fig. 6.

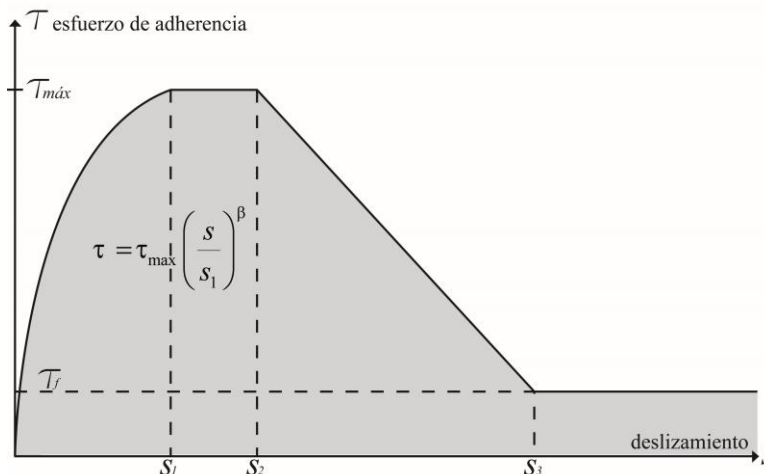


Figura 6. Relación esfuerzo de adherencia—deslizamiento para carga monótonica.

Las siguientes expresiones matemáticas corresponden al modelo de la Fig. 6 y permiten conocer el deslizamiento entre el acero y el concreto en función del desarrollo de los esfuerzos de adherencia.

$$\tau = \begin{cases} \tau_{max} \left(\frac{s}{s_1}\right)^\beta & \text{si } 0 \leq s \leq s_1 & (9a) \\ \tau_{max} & \text{si } s_1 \leq s \leq s_2 & (9b) \\ \tau_{max} - (\tau_{max} - \tau_f) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2}\right) & \text{si } s_2 \leq s \leq s_3 & (9c) \\ \tau_f & \text{si } s_3 < s & (9d) \end{cases}$$

$s$  es el deslizamiento entre el concreto y el acero. El parámetro  $\beta$  indica el grado de la curva inicial en el desarrollo de la adherencia, el cual depende de las características del concreto reforzado;  $s_1$ ,  $s_2$  y  $s_3$  indican los rangos de deslizamiento y  $\tau_f$  es el esfuerzo máximo de adherencia. En la Tabla 1 se especifican los valores de las variables anteriores.

**Tabla 1 Parámetros de adherencia CEB-FIP Model Code 1990.**

Parámetros	Concreto no confinado <sup>1</sup>		Concreto confinado <sup>2</sup>	
	Buenas cond.	Otras cond.	Buenas cond.	Otras cond.
	de adherencia	de adherencia	de adherencia	de adherencia
$s_1$ mm	0.6	0.6	1.0	1.0
$s_2$ mm	0.6	0.6	3.0	3.0
$s_3$ mm	1.0	1.0	<i>bc</i>	<i>bc</i>
$\beta$	0.4	0.4	0.4	0.4
$\tau_{max}$ Mpa	$2.0\sqrt{f_c}$	$1.0\sqrt{f_c}$	$2.5\sqrt{f_c}$	$1.25\sqrt{f_c}$
$\tau_f$ Mpa	$0.15 \tau_{max}$	$0.15 \tau_{max}$	$0.4 \tau_{max}$	$0.4 \tau_{max}$

*bc* indica la separación del corrugado.

<sup>1</sup>Falla por separación del concreto con el acero.

<sup>2</sup>Falla por cortante entre el concreto y el corrugado.

## FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA

La formulación variacional del problema descrito en los párrafos anteriores, se deriva de la desarrollada por Retama, (Retama, 2010a), en la que se aborda el problema de un sólido de concreto reforzado cruzado por una discontinuidad dentro de su dominio. Para desarrollar el funcional de energía potencial considérese el sólido de concreto reforzado de la Fig. 7.

El funcional asociado a este sólido de concreto reforzado con una discontinuidad en su interior se define como:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{dis} + \Pi_{ref} + \Pi_{adh} - \Pi_{ext} \quad (10)$$

donde la energía de deformación interna en el concreto simple está dada por

$$\Pi_{int} = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\epsilon}) d\Omega \quad (11)$$

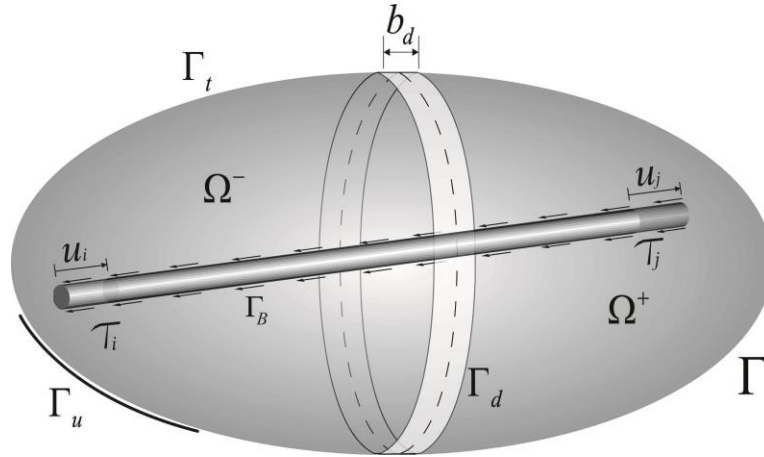


Figura. 7: Sólido cruzado por una discontinuidad con acero de refuerzo embebido.

la energía consumida durante el proceso de daño en la zona de la grieta

$$\Pi_{dis} = \int_{\Gamma_d} \Psi(\llbracket u \rrbracket) d\Gamma \quad (12)$$

la energía de deformación interna del acero de refuerzo

$$\Pi_{ref} = \int_{\Omega} \Theta d\Omega \quad (13)$$

la energía disipada por el desarrollo de adherencia

$$\Pi_{adh} = \int_{\Gamma_b} \phi d\Gamma_b \quad (14)$$

y el trabajo externo ocasionado por las cargas que actúan en el sólido es

$$\Pi_{ext} = - \int_{\Omega} u^T b_v d\Omega - \int_{\Gamma_t} u^T \bar{t} d\Gamma \quad (15)$$

## CINEMÁTICA DE LA DISCONTINUIDAD

En el sólido de la Fig. 7, la discontinuidad divide al dominio  $\Omega$  en dos sub—dominios,  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ . Considérese que el subdominio  $\Omega^+$  queda localizado en dirección normal a la discontinuidad. El campo de desplazamientos contiene una parte regular en  $\Omega$ ,  $\hat{u}$ , y una parte correspondiente al salto del desplazamiento  $\llbracket u \rrbracket$ , localizado en la superficie de la discontinuidad  $\Gamma_d$ , por lo que la cinemática del sólido queda representada mediante el campo el campo de desplazamientos continuo más el campo de desplazamientos que contiene el salto de la discontinuidad:

$$\mathbf{u} = N\hat{\mathbf{u}} + N_c\tilde{\mathbf{u}} \quad (16)$$

y diferenciando la ecuación anterior se obtiene el campo de deformaciones

$$d\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} = B\hat{\mathbf{u}} + B_c\tilde{\mathbf{u}} \quad (17)$$

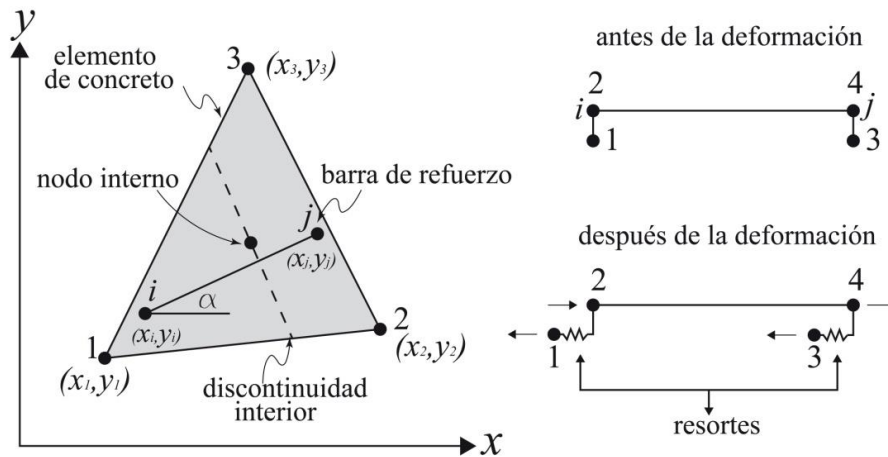
donde  $N$  contiene las funciones de forma estándar,  $N_c$  contiene las funciones de forma asociadas al subdominio  $\Omega^+$ ,  $B$  y  $B_c$  son sus respectivas derivadas.

**APROXIMACIÓN POR MEDIO DEL MEF**

Para aproximar el campo de desplazamientos del problema descrito en la sección anterior, se utiliza una formulación de elementos finitos que considera elementos sólidos 2D en los que el acero de refuerzo se encuentra dentro de su dominio, como se muestra en la Fig. 8.

A diferencia de otras formulaciones numéricas empleadas para simular el comportamiento del concreto reforzado, aquí se tiene que las varillas de acero pueden cruzar el elemento 2D. La ventaja de esta formulación, es que no es necesario utilizar mallas estructuradas de elementos finitos para localizar apropiadamente las varillas de acero dentro del sólido continuo.

En la Fig. 8, el nodo interno captura la cinemática de la discontinuidad, y su efecto sobre los grados de libertad estándar elemento es transmitido a través de la condensación estática, los nodos 2 y 4 corresponden a los extremos del elemento barra y los nodos 1 y 3 son los nodos internos correspondientes al elemento de concreto.



**Figura 8: Elemento finito con acero de refuerzo**

Al minimizar el funcional de energía dado por la ec.10 respecto al campo de desplazamientos e interpolar los campos mediante una aproximación de elemento finito, se obtiene, para el sólido triangular de la Fig. 8 la siguiente ecuación matricial de equilibrio del elemento

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^{ext} \tag{18}$$

donde  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez del elemento de concreto reforzado, definida como

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 \tag{19}$$

$\mathbf{K}_1$  es la matriz de rigidez del elemento finito que considera una discontinuidad en el concreto,  $\mathbf{K}_2$  es la matriz de rigidez correspondiente al acero de refuerzo embebido. La forma condensada de esta matriz es

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}} - \mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}}[\mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}}]^{-1}\mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}}^T \tag{20}$$

donde

$$\mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \tag{21}$$





$$\mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{k}_{\bar{u}\bar{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_c^T \mathbf{C} \mathbf{B}_c d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{T} d\Gamma \quad (23)$$

y la matriz de rigidez del acero de refuerzo

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{R}_n^T \mathbf{R}_\alpha^T \mathbf{k}_t \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_n \quad (24)$$

con

$$\mathbf{k}_t = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} n_1^i & 0 & n_2^i & 0 & n_3^i & 0 \\ 0 & n_1^i & 0 & n_2^i & 0 & n_3^i \\ n_1^j & 0 & n_2^j & 0 & n_3^j & 0 \\ 0 & n_1^j & 0 & n_2^j & 0 & n_3^j \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{R}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (27)$$

donde  $\mathbf{k}_t$  es la matriz correspondiente al elemento barra. La matriz de transformación  $\mathbf{R}_\alpha$  rota la matriz de rigidez elemental al sistema global y  $\mathbf{R}_n$  es una matriz de transformación que traslada el efecto de las varillas de refuerzo a los nodos del elemento sólido 2D. Los términos  $n_1^i, n_2^i$  y  $n_3^i$  son las funciones de forma del elemento sólido 2D evaluadas en las coordenadas el nodo  $i$  del elemento barra, ver Fig. 7; mientras que  $n_1^j, n_2^j$  y  $n_3^j$  son las mismas funciones evaluadas en las coordenadas del nodo  $j$ .

El planteamiento anterior corresponde a una formulación en la que se considera adherencia perfecta entre el concreto y las varillas de refuerzo. Para tomar en cuenta el efecto de la adherencia, del sólido de concreto reforzado de la Fig. 7 se plantea el estado de equilibrio entre los esfuerzos de adherencia, la fuerza interna que desarrolla el acero de refuerzo y las tracciones en el concreto, obteniéndose la siguiente ecuación matricial de rigidez equivalente para el acero de refuerzo

$$\mathbf{K}_t^* = \frac{k_s k_{bi} k_{bj}}{k_s (k_{bi} + k_{bj}) + k_{bi} k_{bj}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

donde  $k_s$  es la rigidez axial del acero de refuerzo  $EA/L$ ,  $k_{bi}$  y  $k_{bj}$  son factores que toman en cuenta el desarrollo de la adherencia a lo largo de la longitud de la varilla, y se definen de la siguiente forma:

$$k_{bi} = \tau_i \left( \frac{\pi d L}{2b} \right) \quad (29)$$

$$k_{bj} = \tau_j \left( \frac{\pi d L}{2b} \right) \quad (30)$$

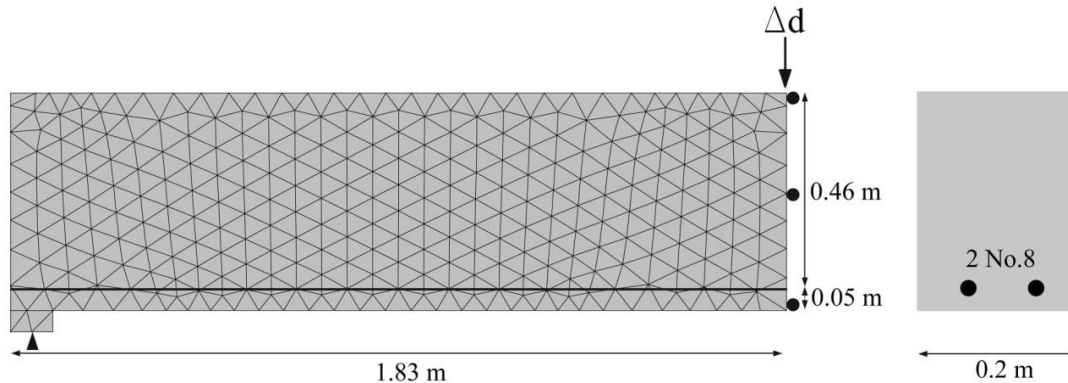
$\tau_i$  y  $\tau_j$  son los esfuerzos de adherencia desarrollados por los desplazamientos relativos de los nodos  $i$  y  $j$  de la varilla respecto al elemento sólido 2D, y se obtienen del modelo de adherencia CEB-FIP 1990;  $d$  es el diámetro de la varilla y  $L$  es su longitud,  $b$  es el ancho del elemento finito triangular de concreto. Remplazando  $\mathbf{K}_t^*$  en el término  $\mathbf{k}_t$  de la

ec.24 se obtiene la matriz de rigidez del acero de refuerzo que contempla el efecto de la adherencia producto del deslizamiento entre ambos materiales.

### EJEMPLO DE APLICACIÓN

Para validar el modelo propuesto anteriormente, el cual permite capturar la falla del concreto reforzado, en esta sección se reproduce numéricamente el comportamiento hacia el colapso de una viga simplemente reforzada sujeta a un control incremental de desplazamientos en el centro del claro, comparando la respuesta de la solución analítica con los resultados experimentales reportados por Burns y Siess (1962).

Las propiedades mecánicas del concreto simple son: módulo de elasticidad  $E_c=26,200$  Mpa, relación de Poisson  $\nu=0.167$ , resistencia a tensión  $\sigma_{t0}=2.482$  Mpa, energía de fractura  $G_f=8.755E-05$  MN/m; y las del acero de refuerzo: módulo de Young  $E_s=203,550$  Mpa y su esfuerzo de fluencia  $\sigma_y=310$  Mpa. Los parámetros del modelo de adherencia corresponden a las de un “concreto no confinado con otras condiciones de adherencia”, véase la Tabla 1. Las propiedades geométricas de la viga se muestran en la Fig. 9. La discretización del volumen de la viga se efectuó empleando elementos finitos triangulares de deformación constante. Con el fin de reducir la demanda computacional de la solución numérica del problema, se analizó únicamente la mitad de la viga debido a que ésta es simétrica respecto a la geometría y a las condiciones de frontera. Cabe desatacar que la malla es no—estructurada por lo que el acero de refuerzo cruza libremente a los sólidos de concreto. Esta técnica también reduce el costo numérico.

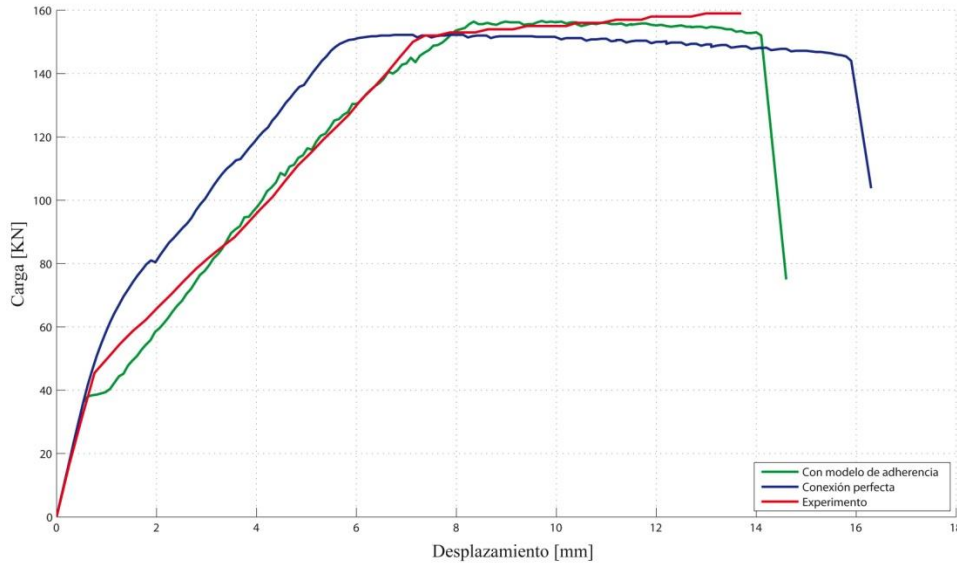


**Figura 9. Viga de concreto reforzado**

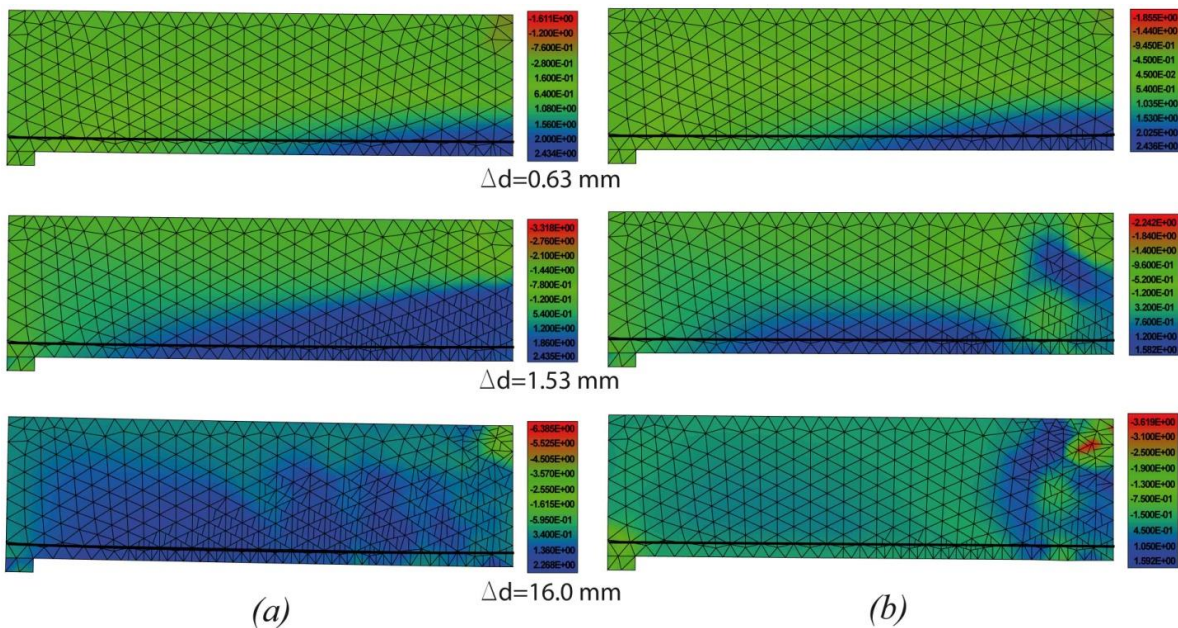
En la Fig. 10 se ilustra la respuesta de la simulación numérica considerando el daño por el agrietamiento en el concreto simple y su interacción con el acero de refuerzo. Se observa que la solución del modelo que toma en cuenta una compatibilidad perfecta de deformaciones entre ambos materiales sobrestima la capacidad de carga del elemento estructural; esto se debe a que al prescindir del ablandamiento causado por el agrietamiento del concreto existente en la periferia del refuerzo, producto de una alta concentración de esfuerzos, no se libera la energía que generan los esfuerzos de adherencia en dicha zona; contrario al caso en el que sí se toma en cuenta el ablandamiento del concreto. Sin embargo, a pesar de que en la simulación numérica donde sí se toma en cuenta el deslizamiento entre ambos materiales ofrece resultados aceptables, no se logra reproducir por completo el comportamiento del elemento en el rango elástico lineal; esto se debe a que el elemento sólido de tres nodos ofrece una respuesta mucho más rígida comparada, por ejemplo, con un elemento cuadrilátero bidimensional; esto, desde luego, origina que el modelo de daño imponga el ablandamiento del concreto prematuramente para disipar la energía de fractura en aquellas zonas donde la capacidad del material se ha sobrepasado, afectando no sólo a un elemento finito en un estado incremental de carga, sino a varios de los elementos que se encuentran en su periferia. Esto se puede observar en la Fig. 11b. Para eliminar esta desventaja se recomienda emplear una malla fina cuando se utilizan elementos finitos triangulares.

En la Fig. 11 se presenta el estado de esfuerzos principales y el patrón de agrietamiento de la viga simplemente reforzada. En la Fig. 11a se ilustra el comportamiento de elemento considerando el agrietamiento en el concreto y una compatibilidad perfecta de deformaciones entre éste y la varilla de refuerzo, mientras que en la Fig. 11b se presenta el resultado considerando el modelo de adherencia. En el primer caso se aprecia que al existir compatibilidad de deformaciones entre ambos materiales, la evolución del agrietamiento es uniforme, *i.e.* cuando el acero le transfiere su capacidad de carga al concreto en todas las etapas del proceso de carga, la disipación de energía es gradual; caso contrario al que se muestra en la Fig. 11b, donde se puede distinguir que la concentración de

esfuerzos de tensión en la parte inferior del centro de la viga ocasiona que el concreto se agriete, afectando la transferencia de la capacidad de carga del acero por medio de los esfuerzos de adherencia. En la práctica es de principal importancia buscar un diseño óptimo en el que, de ser posible, no se presente el deslizamiento entre el concreto y el acero, buscando una interacción mecánica uniforme entre ambos materiales; sin embargo, a pesar de ello, es difícil encontrar este punto cuando se estudia el comportamiento del concreto reforzado en su evolución al colapso, de allí que se deba tomar en cuenta este fenómeno, por lo que al prescindir de él se estaría sobrestimando la resistencia de este material compuesto. Asimismo se demuestra que al emplear mallas no—estructuradas para localizar al acero de refuerzo se obtienen resultados numéricos que tienen buena correlación respecto a las pruebas experimentales.



**Figura 10. Diagrama Carga—Desplazamiento**



**Figura 11. Estado de esfuerzos principales máximos y propagación del agrietamiento: (a) Sin considerar el deslizamiento entre el acero de refuerzo y el concreto, (b) Considerando el deslizamiento.**

## CONCLUSIONES

En este artículo se desarrolla un modelo numérico para reproducir el comportamiento del concreto reforzado en su evolución al colapso basado en el método de los elementos finitos y en la mecánica del daño. Para simular el inicio y la propagación del agrietamiento se empleó el modelo de discontinuidades interiores, el cual utiliza una ley constitutiva del tipo tracción—salto que gobierna el comportamiento de la discontinuidad. Para el acero de refuerzo se considera un modelo constitutivo elasto—plástico perfecto, así como una ley de ablandamiento para tomar en cuenta el desarrollo de la adherencia cuando el concreto que rodea al refuerzo se agrieta.

Para validar el modelo propuesto se presentó la simulación numérica del comportamiento de una viga simplemente reforzada, considerando adherencia perfecta y no perfecta entre ambos materiales. Los resultados numéricos resultaron ser consistentes con las pruebas experimentales, verificándose que el modelo de daño reproduce satisfactoriamente el ablandamiento del concreto debido a la presencia del agrietamiento. Asimismo se demostró la importancia de tomar en cuenta el corrimiento del acero de refuerzo dentro del concreto simple; al excluir este fenómeno del estudio mecánico del concreto reforzado en su evolución al colapso, se sobrestima la resistencia de los elementos estructurales, ya que la capacidad de carga del acero de refuerzo se transmite a través de la adherencia entre éste y el concreto que lo rodea.

Se demostró que emplear mallas no—estructuradas para localizar el acero de refuerzo es posible obtener resultados numéricos con una buena correlación respecto a los obtenidos en el laboratorio. Esta técnica reduce el costo computacional ya que el número de grados de libertad de la malla corresponde únicamente a los sólidos de concreto, eliminando los del acero de refuerzo, contrario al caso en el que sí se emplean mallas estructuradas.

## AGRADECIMIENTOS



## REFERENCIAS

- Alfaiate J, Wells G. N. y Sluys L. J. (2002), **“One the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-I and mixed-mode fracture”**, Enginnering Fracture Mechanics, Vol. 69, pp. 661—686.
- Burns N.H y Siess C. P. (1962), **“Load-Deformation Characteristics of Beam-Colum Conections in Reinforced Concrete”**. Civil Engineering Studies, SRS No, 234.
- CEB-FIP Model Code (1990). Informe técnico, Comité Euro—International du Beton, Suiza.
- Hillerborg A., Modeer M. y Petersson P. E. (1976), **“Fracture and size effect in concrete and other quiasibrittle materials”**, CRC Press, Boca Raton, FL, EUA.
- Juárez G. (2006), **“Modelado numérico de problemas de fractura en sólidos mediante discontinuidades interiores”**, Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Katz A. (1999), **“Bond mechanics of FRP rebars to concrete”**, Materials and Structures, Reporte Técnico, Vol. 32, pp. 761—768.
- Kwak H. G. y Filippou F. C. (1990), **“Finite elements Analysis of Reinforced Concrete Structures Under Monotonic Loads”**, Structural Enginnering Mechanics and Materials, Reporte No. UCB/SEMM-90/14, Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de California, Berkeley, CA, EUA.
- Meyer C. y Okamura H. (1985), **“Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures”**, ASCE, Tokio, Japón.
- Ngo B. y Scordelis C. (1967), **“Finite element analysis of reinforced concrete beams”**. ACI Journal, Vol. 64, Núm. 3, pp. 152—163.
- Oliver J., Linero D. L., Huespe A. E. y Manzoli O.L. (2008), **“Two—dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach”**, Computer methods in aplied mechanics and enginnering, Vol. 197, pp. 332—348.
- Park R. y Paulay T. (1975), **“Reinforced Concrete Structures”**. John Wiley & Sons, Inc., Nueva Zelanda.
- Retama V. J. (2010a), **“Formulation and approximation to problems in solids by embedded discontinuity models”**, Tesis de Doctorado”, Universidad Nacional Autónoma de México, México.
- Retama V. J. y Ayala M. G. (2011), **“Simulación de la pérdida de rigidez en estructuras de concreto armado, mediante el modelo de discontinuidades interiores”**, CMNE 2011, Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Coimbra, Portugal.
- Retama V. J., Ayala M. G. y Gutiérrez T. J. (2014), **“Modelado numérico del daño en estructuras de concreto reforzado”**, Concreto y Cemento, Investigación y Desarrollo, Vol. 5 No. 2, pp. 39—48.
- Simone G. (2003), **“Continuos—Discontinuos Modelling Failure”**. Tesis de Doctorado. Universidad Técnica de Delft, Holanda.