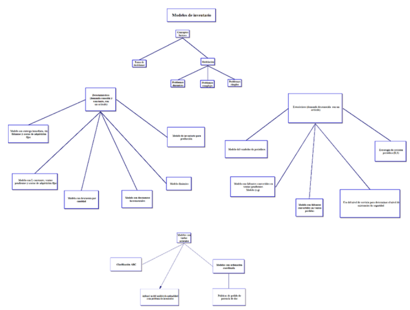
FACULTAD DE INGENIERÍA	NOTAS DE CLASE
DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA E INDUSTRIAL	TEORÍA DE INVENTARIOS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE SISTEMAS	SEMESTRE: 2024-2
PROGRAMA DE POSGRADO EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES	DRA. PATRICIA E. BALDERAS CAÑAS

Parte I
SISTEMAS DE INVENTARIOS

Figura 1: Estructura del curso Teoría de inventarios



1. Conceptos básicos de modelación y toma de decisiones

Un modelo es una abstracción y simplificación de un problema real, idealmente, incorpora los elementos y relaciones esenciales del mundo real. Usar un modelo significa obtener conclusiones lógicas que se derivan del mismo, estas conclusiones deben ser una guía efectiva para la toma de decisiones si el modelo está diseñado y resuelto adecuadamente. La toma de decisiones involucra la integración de información cuantitativa, obtenida del modelo, con el juicio intuitivo acerca de los factores cualitativos, como la moral y el liderazgo en una organización, las restricciones de empleo, las acciones afirmativas, la contaminación y otras áreas de responsabilidad social.[1]

Dado que la mente humana no puede considerar cada aspecto de un problema empírico, algunos atributos del problema deben ignorarse si una decisión se va a tomar. Esto es, los procesos de abstracción y simplificación son pasos necesarios en la solución de cualquier problema humano.

Después de que el tomador de decisiones ha seleccionado los factores críticos, o variables, de la situación empírica, se les combina de alguna manera lógica de modo que formen un modelo del problema. Un modelo es una representación simplificada de una situación empírica. Idealmente, le quita a un fenómeno natural su confusa complejidad y duplica la conducta esencial del fenómeno natural con algunas variables que están simplemente relacionadas. Entre más simple sea el modelo obtenido, lo mejor para el que toma decisiones, el modelo sirve como una razonable y confiable contraparte del problema empírico.

Ventajas de un modelo simple:

1. Es económico por cuanto al tiempo y pensamiento.
2. Puede ser entendido fácilmente por el que toma decisiones.
3. En caso necesario, el modelo puede modificarse rápida y efectivamente.

[1] Notas basadas principalmente en Love, S. (1979) Inventory Control.New York: McGraw-Hill Book Company

Después que el modelo se ha construido, se pueden derivar conclusiones acerca de su comportamiento por medio del análisis lógico. El que toma decisiones basa entonces sus acciones o decisiones en estas conclusiones.

Dos fuentes importantes de error en el uso de modelos para la toma de decisiones son la exclusión de variables importantes y los errores al definir las relaciones entre las variables. Por ejemplo, supóngase que puede esperarse una pérdida del 40de producción, debida a especificaciones restringidas inusuales. La omisión de este factor en el análisis daría por resultado que el modelo resultante no representaría la situación adecuadamente, para los propósitos de decisión, de hecho, podría tomarse una decisión equivocada.

La técnica apropiada para describir y relacionar las variables seleccionadas depende en gran medida de la naturaleza de las variables. Si las variables son susceptibles de alguna forma de medición, y particularmente si pueden dárseles una representación cuantitativa, entonces hay fuertes razones para seleccionar una representación matemática del modelo. Primero, porque hay una disciplina inherente rigurosa en las matemáticas que asegura un procedimiento metódico por parte del investigador. Se debe ser específico acerca de qué variables se han seleccionado y qué relaciones se asume que existen entre ellas. Segundo, la matemática es una poderosa técnica para relacionar variables y derivar conclusiones lógicas a partir de premisas dadas. Las matemáticas, combinadas con las modernas computadoras, hacen posible el manejo de los problemas que requieren modelos de gran complejidad y facilita el proceso de toma de decisiones, donde el análisis cuantitativo es aplicable.

El análisis cuantitativo se ha extendido a muchas áreas de las operaciones de negocios de las empresas y se ha vuelto un modo efectivo de enfocar ciertos problemas de decisión.

Para tomar una decisión, se establece el criterio, se seleccionan alternativas, se determina un modelo para evaluar las alternativas y seleccionar la mejor alternativa.

Las decisiones pueden caracterizarse conforme se toman bajo certidumbre o incertidumbre, dependiendo de si o no los factores principales se asumen como conocidos. La toma de decisiones bajo incertidumbre involucra el uso de probabilidades para expresar la probabilidad de eventos inciertos.

Los problemas de decisión pueden clasificarse como simples (si hay pocas variables importantes), complejos (si hay muchas), o dinámicos (si las decisiones se interrelacionan con el transcurso del tiempo).

A continuación se resume la clasificación anterior, para ubicar los modelos de inventario que se abordarán en este curso, respecto a si o no la demanda es conocida.

Variables principales en un problema de decisión		
Problema de decisión	Certidumbre	Incertidumbre
Simple	Modelos de caso	Análisis de decisión (árboles de decisión)
Complejo	Modelos de caso	Simulación
	Programación lineal y entera	
Dinámico	Modelos de inventario	Simulación
	Modelos PERT (trayectorias críticas)	Modelos de inventario
		Modelos de líneas de espera

1.1. Problemas simples

Todos los problemas son simplificados al construir un modelo para cualquier análisis. Si de esto resulta sólo un número pequeño de factores o variables y relativamente pocas alternativas, entonces el modelo se denomina simple.

Un modelo de caso o escenario es un modelo de un problema de decisión que se analiza ensayando una serie de casos (posibles resultados o escenarios) usando diferentes alternativas o supuestos. El modelo no está programado para encontrar directamente la mejor solución. En lugar de eso, el administrador usa el modelo en un proceso de ensayo y error.

Los modelos de optimización usan procedimientos matemáticos para encontrar la solución óptima e incorporan el uso de probabilidades en la toma de decisiones bajo incertidumbre.

1.2. Problemas complejos

Muchos problemas de decisión involucran una gran cantidad de factores o variables importantes, o pueden tener varias alternativas para considerar. Por ejemplo, el problema de decisión de programar el suministro de fábricas a consumidores, a fin de minimizar el costo, involucra cientos de variables y restricciones que pueden tener millones de soluciones.

Los modelos de programación lineal y entera son las técnicas más ampliamente utilizadas para resolver complejos problemas de negocios de este tipo. Usan las técnicas matemáticas para encontrar el máximo (o el mínimo) valor de un objetivo (función), sujeto a un conjunto de restricciones.

Simulación es una técnica para modelar problemas complejos que involucran situaciones con incertidumbre. Se diseña un modelo para reproducir el comportamiento de un sistema. Los modelos de simulación usualmente se analizan con el enfoque de estudio de caso por caso (en contraposición de la optimización).

1.3. Problemas dinámicos

Problemas de decisión dinámicos consideran un tipo particular de complejidad, cuando hay una sucesión de decisiones interrelacionadas a lo largo de varios periodos de tiempo. Algunos tipos son los modelos de inventario para determinar cuando solicitar un inventario y qué tantas existencias se deben tener; PERT o modelos de rutas críticas para la programación de proyectos y los modelos de líneas de espera para problemas que involucran tráfico o acumulación.

1.4. Sistemas de soporte para decisión

Un sistema de soporte para decisión (DSS por sus siglas en inglés), es un sistema computarizado integrado diseñado para ayudar en la toma de decisiones. Un DSS incorpora generalmente un modelo (alguno de los señalados arriba), y el sistema computarizado desempeña los cálculos necesarios para resolver el modelo. Generalmente, es más que un modelo, incluye además una base de datos que puede emplearse para proporcionar directamente información al administrador (o al modelo), mediante gráficas o diversos reportes que son fáciles de entender por el usuario. Desde luego que incorpora también tecnología computacional para facilitar el análisis que se requiere en el problema de decisión o para indagar en la base de datos la información requerida.

1.5. Modelación matemática

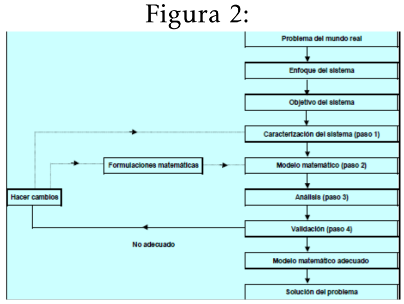
Es el proceso mediante el cual un sistema físico se traduce en un modelo matemático. Esta modelación considera la naturaleza de la modelación matemática y el enfoque del proceso de modelación.

1.5.1. Enfoque sistémico

Ofrece un marco teórico que permite ver el problema inmerso en un sistema. Se identifican claramente las características del sistema que son fundamentales para el problema. El proceso de construcción del modelo matemático puede verse de manera simple como un proceso iterativo de múltiples etapas. Las etapas principales en la traducción de un problema del mundo real a la descripción matemática según Murthy and Page (1990, 20) son las siguientes.

1. Formulación del problema
2. Descripción matemática
3. Análisis matemático
4. Interpretación del análisis para obtener una solución

Figura 2:



1.5.2. Flujos de efectivo y valor presente

[2]

En los problemas que involucran flujos de efectivo en varios años, como por ejemplo inversiones de capital que generan flujos en el tiempo, el periodo de tiempo en que se recibe el dinero es un aspecto importante, de su valor. No es lo mismo recibir 1,000 U.M. ahora que dentro de cinco años. Si no se necesita inmediatamente ese efectivo, se podría invertir y tener algo más que 1,000 U.M. dentro de cinco años.

Un enfoque general de los problemas relacionados con flujos de efectivo en el tiempo es convertirlos a sus equivalentes en valor presente, usando un descuento o tasa de interés y calcular el interés compuesto. El valor presente de 1,000 U.M. a cinco años, recibidos hoy usando una tasa de descuento del 6 es

$$\frac{1,000}{(1+0,6)^5}$$

Lo anterior significa que si se invierten 747.26 U.M. en una cuenta bancaria a una tasa de interés del 6 por ciento (compuesta anualmente), se tendrán 1,000 U.M. al final de los cinco años.

En general, el valor presente de una cantidad A, con una tasa de descuento r, recibido en n años es

$$\frac{A}{(1+r)^n}$$

Algunas ocasiones se tienen varios flujos a lo largo de cierto número de años, con la misma tasa. Por ejemplo, el valor presente de A recibidos al final del año 1, más B recibido al final del año 2 es

$$\frac{A}{(1+r)^1} + \frac{B}{(1+r)^2}$$

1.6. Análisis y construcción de modelos de inventario

[3]

A continuación se hace una definición de inventario, con el objetivo de hacer un control o manejo administrativo del mismo.

Definition 1 *Un inventario es la cantidad de bienes o materiales en el control de una empresa, que se mantienen por un tiempo en un estado relativamente ocioso o inproductivo, en espera de un uso posterior o a la venta.*

La definición anterior sugiere que la existencia de un inventario tiene que ver con dos procesos el *suministro* y la *demanda*. El primero, usualmente precede al segundo y contribuye con bienes al inventario, mientras que la demanda le sigue y reduce el nivel del inventario. Ambos procesos, suministro y demanda suelen ocurrir acompañadamente.

La definición anterior excluye a los oleoductos y gasoductos, porque no satisfacen una demanda mientras se encuentran en las tuberías. Los bienes se convierten en inventarios cuando se mantienen sin uso, lo cual no sucede con los ductos en general.

Las funciones de un inventario se pueden agrupar en cinco categorías:

1. Por razones de mercado. Por ejemplo cuando la disponibilidad de un bien proporciona una ventaja económica.

2. Para protegerse del faltante de un bien. Debido principalmente a que los procesos de suministro y demanda fluctúan arbitrariamente, se tiene el riesgo de que ocurran faltantes y ocasionar molestias a los clientes, por ejemplo.

3. Para tener operaciones sin contratiempos. Por ejemplo, con los cambios en la demanda de productos que se venden por temporadas.

4. Para tener un tamaño del pedido, económico. Lo cual supone hacer una decisión entre el tamaño de un pedido y el número de veces que se hace el pedido, en condiciones diversas, por ejemplo, cuando el precio de los bienes depende del volumen de compra.

[2] Adaptado del Apéndice, Capítulo 1, Bonini

[3] Bonini, et.al. 1997, capítulo 1.

5. Para tener un sistema de control del inventario, económico.

En el control de un inventario, como un proceso de decisión, se destacan las siguientes acciones.

1. Establecer el criterio a usarse. Por ejemplo, minimizar los costos por mantener un inventario.

2. Seleccionar un conjunto de alternativas para consideración.

3. Determinar el modelo a usarse y los valores de los parámetros del proceso. Por ejemplo, en una cadena de suministro, los costos variables por mantener una unidad en inventario son

$$\text{Costos variables} = K\,(\text{costo unitario por ordenar}) + h(\text{inventario promedio})$$

   Los parámetros K y h, deben determinarse para utilizar el modelo.

$$K = \textit{costo unitario por ordenar} \tag{1}$$
$$h = \textit{costo unitario por mantener} \tag{2}$$

4. Determinar qué alternativa optimiza (es decir, produce el mejor valor), según el criterio establecido en el punto 1.

1.7. Componentes básicas de un sistema de inventario

El inventario existe porque las tasas de suministro y demanda difieren, generalmente, y cuando se requiere disponer de los bienes involucrados, almacenados en algún lugar. Dichas tasas se representan como

$$s(t), d(t)$$

respectivamente. El nivel del inventario resultante, de los procesos de suministro y demanda, lo representamos con

$$Q(t)$$

Una manera de relacionar las tres cantidades anteriores es mediante la expresión

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t [s(\tau) - d(\tau)]\, d\tau$$

Los costos y beneficios relacionados con un inventario son los costos por almacenar una unidad de ese inventario h, por unidad de tiempo; los costos por faltantes p, por unidad de tiempo; los costos por colocar o hacer un pedido K, ordenar, o simplemente los costos por ordenar; los costos por comprar, cuando se tienen descuentos en función del volumen del pedido y los costos por el sistema de inventario, que dependen de la cantidad y calidad del esfuerzo realizado hacer administrar el inventario.

1.8. Clasificación de los sistemas de inventario

De acuerdo a la forma en cómo ocurren los procesos de suministro y demanda, se da la clasificación siguiente

Clase	Inventario $Q(t)$	Suministro $s(t)$	Demanda $d(t)$	Valor $\frac{porcentaje}{dolar}$
I	Materias primas	suministrador	producción	25
II	trabajo en proceso	producción	producción	25
III	bienes terminados	producción	mayorista	19
IV	mayoreo	manufacturador	minorista	12
V	menudeo	mayorista	consumidor	19

1.9. EJEMPLOS

[4]

- Computronics es un fabricante de calculadoras, actualmente fabrica 200 semanales. Una componente para todas las calculadoras es una pantalla de cristal líquido (PCL), que la compañía compra a Display, Inc. (DI), a 1 U.M. por PCL. La administración de Computronics quiere evitar cualquier escasez de PCL, ya que esto interrumpiría la producción, DI garantiza un tiempo de entrega de una semana en cada orden. La colocación de cada orden se estima que requerirá de una hora de tiempo de empleado, con un costo directo de 15 U. M. por hora más gastos indirectos de otras 5 U.M. por hora. Se ha hecho una estimación de que el costo anual por capital ocupado en el inventario de Computronics es 15 por ciento del valor del inventario. Otros costos asociados con el almacenamiento y protección de las PCL en inventario ascienden a 5 por PCL por año.

- Kenichi Keneko es el gerente de un departamento de fabricación que usa 400 cajas de remaches al año. Para mantener bajo su nivel de inventario, Kenichi ha estado pidiendo únicamente 50 cajas cada vez. Sin embargo, el proveedor de remaches le ofrece un descuento por pedidos de volúmenes más grandes de acuerdo con la siguiente lista de precios.

  Figura 3: Lista de precios descuentos por volumen

Categoría de Descuento	Cantidad Comprada	Precio (por caja)
1	1 a 99	8.50 U.M.
2	100 a 99	8.00 U.M.
3	1,000 ó más	7.50 U.M.

  La compañía usa una tasa anual de costo por mantener de 20 por ciento del precio del artículo. El costo total asociado con la colocación de un pedido es 80 U.M. por orden.

- Jennifer's Donut House vende una gran variedad de donas, una de las cuales es la dona suprema que es de tamaño gigante, está rellena de zarzamoras y está cubierta de chocolate con turrón. Esta es una dona gigante que comparte toda la familia. Puesto que la masa requiere de mucho tiempo para esponjarse, la preparación de estas donas comienza a las 4:00 de la mañana, de modo que la decisión de cuántas preparar tiene que tomarse antes de saber cuántas se van a necesitar. El costo de los ingredientes y de la mano de obra requerida para preparar cada una de estas donas es 1 U.M. Su precio de venta es 3 U.M. cada una. Todas las donas que no se venden ese día se venden a una tienda de descuento de la localidad en 0.50 U.M. Durante las últimas semanas, se registró el número de estas donas vendidas en 3 U.M. En la siguiente tabla se resumen estos datos.

  Figura 4: venta de donas

Número Vendido	*Porcentaje de Días*
0	10%
1	15
2	20
3	30
4	15
5	10

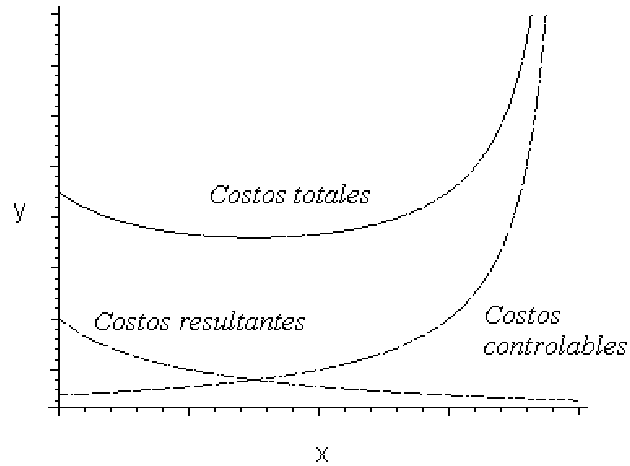
1.10. Modelación de decisiones para ordenar

Un modelo es una aproximación a una realidad, por lo que su valor se concentra en la medida en que nos permite hacer decisiones eficaces de manera eficiente. Para el logro de ese valor, un modelo debe captar suficientemente la esencia de esa realidad, sin demasiado esfuerzo y costo. Una medida de ese valor es la suma de los costos asociados con el uso del modelo. Estos costos caen naturalmente en dos categorías. Los *costos controlables*, aquellos en los que se incurre cuando se desarrolla, usa y mantiene un modelo, los cuales están relacionados con el tiempo de los analistas, la recolección de datos, el procesamiento de datos, entre otros. En la construcción de un modelo, se prefiere aproximar los costos controlables, de la manera más simple posible, para evitar que se nos escapen de la mano. Los *costos resultantes* son aquellos en los que se incurre como consecuencia del uso del modelo y ellos

[4] Tomados de Hillier, F., Hillier, M. and Lieberman, G. (2000)

incluyen costos relacionados con el inventario tales como los costos por mantener, por faltantes y por ordenar. Gráficamente, la relación entre los costos controlables, resultantes y totales, se muestra en la siguiente gráfica

Figura 5: Costos totales



1.11. Modelación del comportamiento del suministro y la demanda

La actividad más importante en el desarrollo de un adecuado modelo de control de inventario es describir las consecuencias físicas de tomar una decisión de control. El control principal sobre un inventario incluye una actividad de suministro, de modo que los términos *control* y *suministro*, se relacionan estrechamente. La diferencia es que el suministro ocurre como resultado de una decisión de control. De ahí que, en lo sucesivo se considerará una decisión de ordenar, como sinónimo de una *decisión de control*.

Para modelar el comportamiento del suministro es necesario relacional el suministro actual con la decisión de ordenar. Las dos cantidades generalmente difieren en magnitud y/o tiempo de realización. La mayoría de los modelos de inventario, asumen que la cantidad suministrada es igual a la ordenada. El tiempo de suministro o abasto generalmente tiene retraso con relación al tiempo de colocación de una orden o pedido, por dos razones, por la colocación de una orden y por la rapidez en que se realiza el suministro. Respecto a la primera razón, una orden o pedido se hace después de varias actividades se ejecutan, como hacer papeleo, tener los materiales a la mano, transportar materiales, entre otros. Todos los retrasos asociados a las actividades anteriores, se consideran juntos en una variable denominada tiempo de retraso, en el suministro de una orden, (L). Esta variable puede tratársele como constante o aleatoria o bién, ignorarse. Si el tiempo de retraso es apreciable, el tiempo para tomar la decisión de ordenar, puede considerarse como una decisión, dependiendo cuándo la orden de suministro solicitado debería llegar, en lugar de cuándo debería colocarse una orden. Esta convención no es del todo satisfactoria en los casos en que la demanda tiene una gran variabilidad aleatoria.

La segunda razón del porqué el sumistro no coincide, en tiempo, con una decisión de ordenar es que la rapidez del suministro es finita. Como el caso, en que la orden es una orden de producción en lugar de una orden de compra. De nuevo, los tiempos de retraso, entre la colocación de la orden de producción y el inicio de la producción, usualmente se ignoran, a pesar de que se pueden incluir en el modelo.

Mientras que el suministro se suele modelar como cantidades conocidas, es decir, con certidumbre y con base en la cantidad a ordenar, la demanda frecuentemente no se le trata de esa manera. En la siguiente sección, se aborda el tratamiento de la demanda como una cantidad conocida, esto es con certidumbre. Por ejemplo, la materia prima o los insumos que se requieren para las actividades de manufactura, tienen demanda conocida en la medida en que se conoce la calendarización de la producción. Aún en esta situación, hay que tener en cuenta la variación que podría deberse a diversos acontecimientos como problemas de calidad, tolerancia para los desechos y cambios en la ingeniería. El grado de predicción es el que determina las decisiones de modelación para manejar demandas futuras como conocidas o no. El grado de predicción no se pretende que sea una cantidad definida precisamente. En los casos en que se usan y monitorean, pronósticos de la demanda, un grado alto de predicción correponde a un bajo grado de error en el pronóstico y viceversa. Es importante dejar claro que la característica de no predicción o incertidumbre no es sinónimo de variabilidad. La demanda puede mostrar una gran variabilidad, sin embargo ser predecible, como en el caso de la demanda de la renovación de placas de circulación. Es la variación aleatoria en la demanda la que causa que las demandas futuras sean impredecibles.

De lo anterior, las demandas para periodos futuros, se consideren cantidades conocidas o variables aleatorias. Puesto que la demanda usualmente es la única cantidad, tratada como una variable aleatoria en un modelo de decisión para ordenar, o los posibles tiempos de retraso, los modelos de inventario correspondientes, se le denominan determinísticos si la demanda se le trata como conocida y probabilístico o estocástico si la demanda se modela como una variable aleatoria.

En un modelo determinista, la demanda puede considerarse constante o variable. En el caso variable, la demanda puede variar continuamente, en cada punto del tiempo considerado, o bien como variable periódicamente. En este último caso, el horizonte de estudio se divide en intervalos de tiempo, llamados periodos. Si la demanda se considera constante, la distinción entre la tasa de la demanda y la demanda por períodos, se reduce a una diferencia entre las unidades de tiempo consideradas. Obviamente, no hay diferencia entre una demanda semanal de diez unidades y una de 20 unidades por dos semanas.

En los modelos estocásticos, se prefiere el enfoque periódico para expresar la demanda, sobre el enfoque continuo de la tasa de la demanda. Lo anterior se debe a que conceptualmente es es mucho más directo, tratar la demanda por unidad fija de intervalo de tiempo o periodo, como una variable aleatoria en lugar de la tasa de la demanda Una tasa de demanda aleatoria con variación continua, puede generar cálculos de los niveles de inventario sumamente complejos. De ahí que en los modelos estocásticos de inventarios, se asigna a la demanda por periodos, una distribución de probabilidad, como una normal o una uniforme, por la disponibilidad de sus valores.

Parte II
MODELOS DETERMINÍSTICOS CON UN ARTÍCULO

Una decisión para ordenar cierta cantidad de un artículo, toma en cuenta políticas preestablecidas, por ejemplo que la cantidad a ordenar es de 20 unidades, y que la orden se hará o colocará, cuando el nivel del inventario llegue a 5 unidades. Entonces, si una medición u observación de ese inventario, produce una información de 10 unidades, en un momento determinado, no se hará una orden. Este tipo y otros de políticas de control de inventarios, suelen permanecer invariantes en períodos determinados y las decisiones de ordenar suelen cambiar conforme cambia el nivel del inventario, requerido.

Es importante subrayar las siguientes convenciones:

1. El gasto del inventario se muestra usualmente como si ocurriera continuamente. De ahí que, los retiros del inventario se suavizan, es decir, se convierte a una tasa de retiro. y las unidades del inventario se consideran divisibles tanto como sea necesario.

2. El inventario disponible se representa por una línea sólida, el inventario ordenado con una línea punteada. La cantidad ordenada es la distania vertical entre la línea sólida y la punteada.

A continuación se resumen varios modelos de inventario, de manera gráfica, en el eje horizontal se registra el tiempo y en el vertical, el nivel del inventario.

Los modelos deterministas también se pueden clasificar de acuerdo a la tasa de producción y a los supuestos sobre faltantes, como sigue

Modelo	Tasa de producción	Costo por faltante
I	Finita	Finito
II	Finita	Infinito
III	Infinita	Finito
IV	Infinita	Infinito

2. Modelo con entrega inmediata, sin faltantes y costos de adquisición fijos

El propósito del modelo de lote económico EOQ, es elegir la cantidad a ordinar que sea más económica. Bajo los supuestos de entrega inmediata, sin faltantes y costos de adquisición fijos, la única variable es la cantidad a

Figura 6: Demanda constante, sin faltantes, entrega inmediata

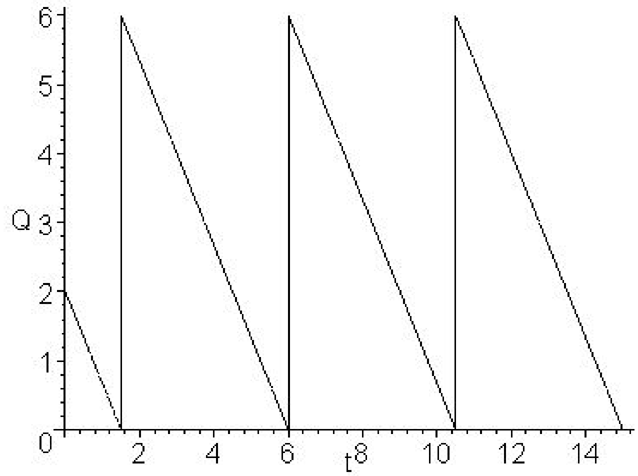


Figura 7: Reabastecimiento gradual, con faltantes planeados y acumulació de pedidos

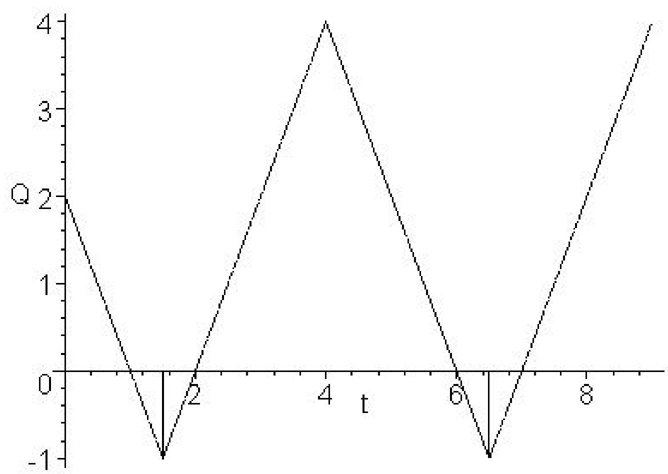


Figura 8: Demanda variable, entrega inmediata

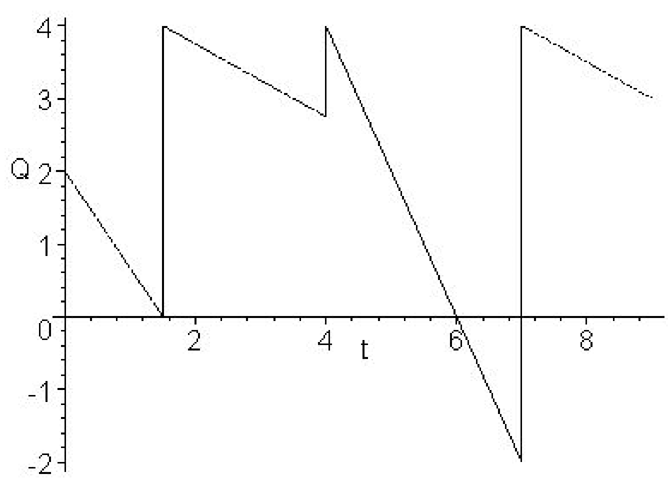


Figura 9: Con tiempos de retraso en el suministro

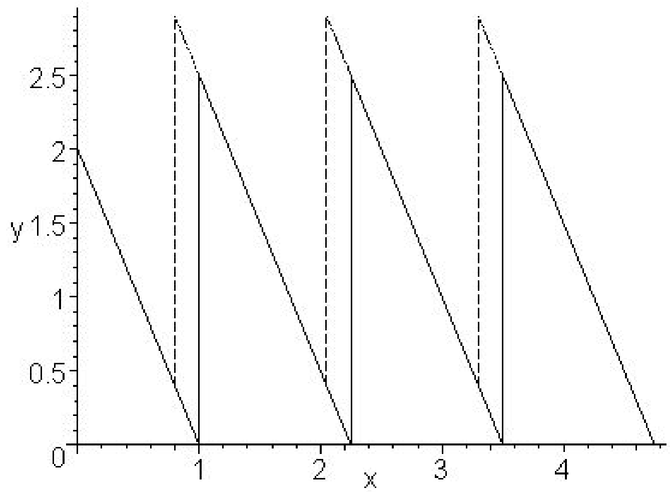
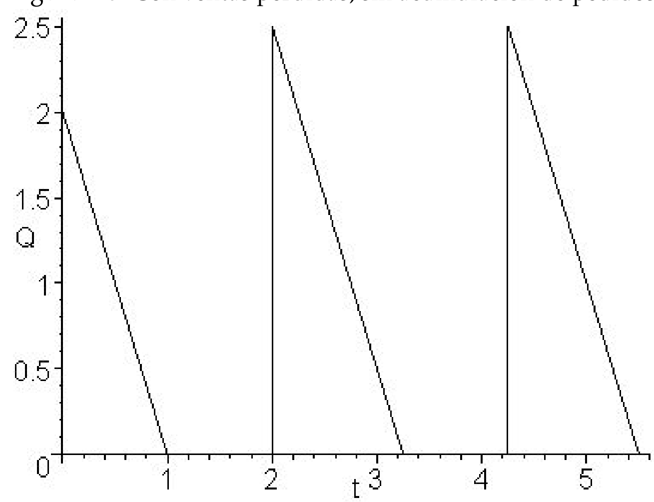


Figura 10: Con ventas perdidas, sin acumulación de pedidos



ordenar Q, el número de unidades ordenadas o pedidas, ya sea por medio de compra o producción, que abastece al inventario cuando se debe de reabastecer. Así, cuando el inventario llega a 0 y se reabastece inmediatamente, el nivel del inventario salta de 0 a Q.

Con una tasa de demanda constante, el nivel del inventario diminuye con el paso del tiempo, a esa tasa hasta que el nivel llegue a 0 y de nuevo se reabastece.

Entonces el objetivo es seleccionar Q de modo que se *minimice* el

$$\text{CTV} = \text{costo total variable}$$

En este costo se excluye el costo del producto, porque éste es un costo fijo. Tampoco incluye costos por faltantes, puesto que no se permiten faltantes. De ahí que

$$CTV = costoinicialanual + costopormanteneranual$$

donde

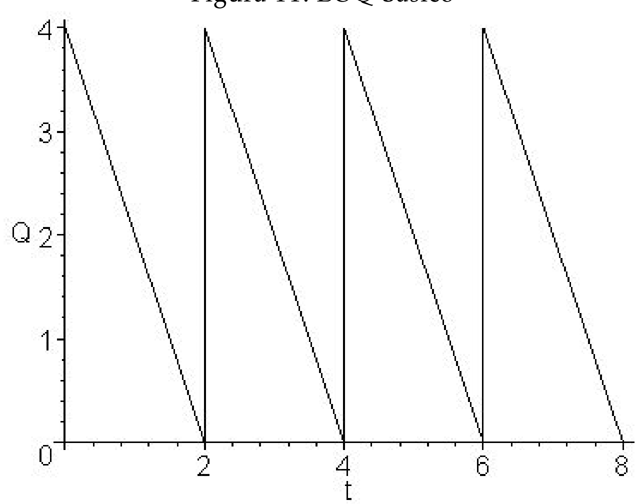
$$\begin{aligned} \textit{costo inicial anual} &= K \times \textit{ número de inicios o preparaciones anuales} && (3) \\ \textit{costo por mantener anual} &= h \times textitnivelpromediodelinventario && (4) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} K &= \textit{costo inicial cada vez que hace un pedido} && (5) \\ h &= \textit{costo unitario por mantener el inventario} && (6) \end{aligned}$$

El patrón de niveles de inventario a través del tiempo, supuesto para el modelo básico del EOQ, con Q la variable de decisión es

Figura 11: EOQ básico



Por ejemplo, el número de inicios o colocaciones de pedidos, es 6 en un año, cada dos meses y que el nivel promedio del inventario es 2, entonces

$$CTV = 6K + 2h$$

Si se cambia la cantidad ordenada $Q = 4$, cambiará el CTV, por lo que que se desea encontrar el Q óptimo que minimice el CTV.

En general, el número de inicios o colocaciones de pedidos es

Número de inicios por año $= \frac{\textit{tasa de demanda anual}}{\textit{cantidad a ordenar}} = \frac{D}{Q}$

y el nivel promedio del inventario

$$
\begin{aligned}
\textit{Nivel promedio del inventario} &= \frac{\textit{nivel máximo} + \textit{nivel mínimo}}{2} && (7)\\
&= \frac{Q+0}{2} && (8)\\
&= \frac{Q}{2} && (9)
\end{aligned}
$$

Por lo que, el costo total variable es

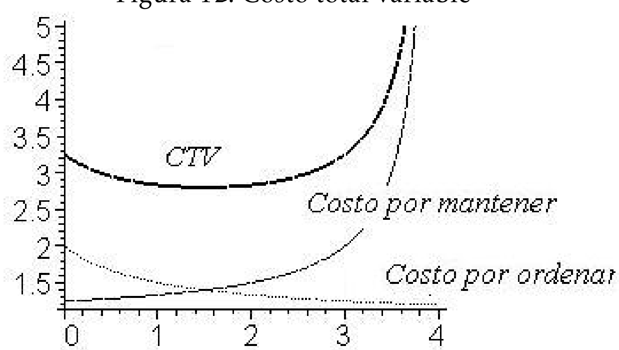
$$CTV = K\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2}$$

El lado derecho de la relación anterior expresa que el costo inicial anual y el costo por mantener anual varían con la cantidad Q a ordenar. El costo inicial disminuye conforme Q aumenta porque dicho costo es el producto de la constante KD y el factor variable $\frac{1}{Q}$.

En cambio, el costo por mantener anual aumenta proporcionalmente cuando Q aumenta, porque dicho costo es el producto de la constante $\frac{h}{2}$ y el factor variable Q.

La relación entre el costo total variable, el costo inicial anual y el costo por mantener anual, se muestra gráficamente como sigue

Figura 12: Costo total variable



Para cada valor de Q, el valor en la curva del CTV es la suma de los valores de las dos curvas inferiores, así que el valor de Q que da el valor mínimo del CTV, es el punto donde los costos por ordenar y por mantener son iguales, esto es en el punto de intersección de ambas curvas, a este valor se le representa por Q^* y se determina expresando algebráicamente la relación de igualdad.

$$h\frac{Q}{2} = K\frac{D}{Q}$$

resolviendo para Q

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

donde

$$
\begin{aligned}
D &= \textit{tasa de demanda anual} && (10)\\
K &= \textit{costo inicial por ordenar} && (11)\\
h &= \textit{costo unitario por mantener} && (12)
\end{aligned}
$$

esta es la fórmula de la raíz cuadrada para el cálculo del nivel óptimo del inventario.

También se obtiene Q^*, utilizando el criterio de la segunda derivada:

La segunda derivada de la función CTV, respecto de Q,

$$K\frac{D}{Q^3}$$

siempre es positiva, por ello la función CTV es convexa y alcanza su mínimo local y global en Q^* , el cual permite obtener el valor crítico que minimiza a la función CTV. Derivando al CTV, con respecto a Q

$$CTV^{=} - K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}$$

se encuentra el valor crítico de Q, resolviendo la ecuación

$$-K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0$$

es decir,

$$Q^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

La decisión de ordenar el $EOQ = Q^*$, produce el valor mínimo de los costos totales variables

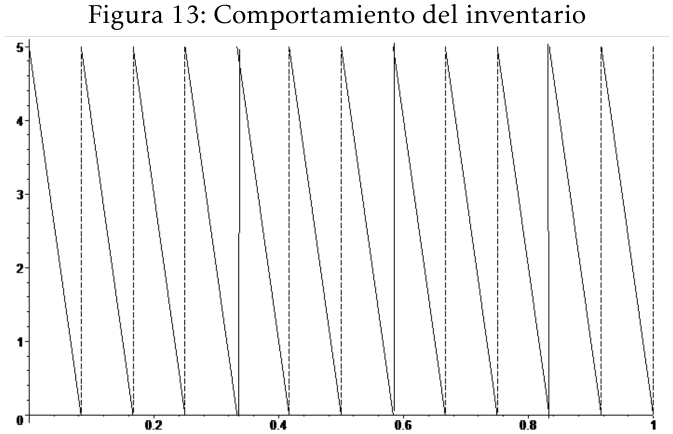
$$CTV^* = K\frac{D}{Q^*} + h\frac{Q^*}{2}$$

donde

$$\begin{aligned}
\text{costo inicial anual} &= K\frac{D}{Q^*}\ \text{U.M.} && (13)\\
\text{costo por mantener anual} &= h\frac{Q^*}{2}\ \text{U.M.} && (14)\\
\text{número de órdenes al año} &= \frac{D}{Q^*} && (15)\\
\text{periodo entre dos órdenes consecutivas} &= \frac{1}{\frac{D}{Q^*}} = \frac{Q^*}{D}\ \text{(fracción de un año)} && (16)
\end{aligned}$$

Example 2 *Considere una demanda de 60,000 unidades al año. La tasa de demanda mensual es de 5,000. La demanda anual se satisface con la acumulación de 5,000 unidades mensuales, durante doce meses. De ahí que se represente gráficamente la situación como sigue.*

Figura 13: Comportamiento del inventario

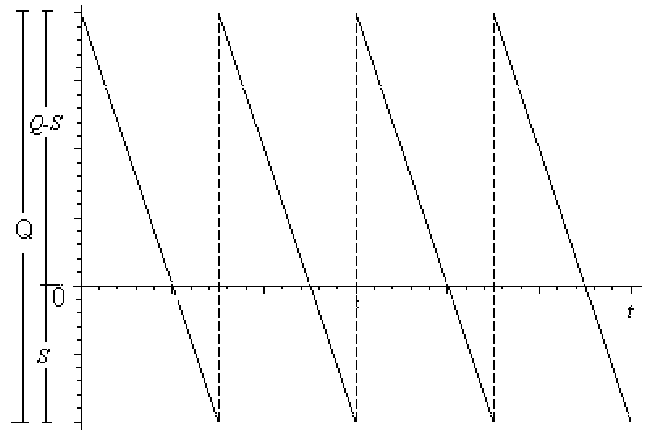


3. Modelo con L constante, ventas pendientes y costos de adquisición fijos

El comportamiento del inventario bajo los supuestos de demanda constante conocida y entrega inmediata, y con la política de que se aceptan faltantes convertidos en ventas pendientes, gráficamente es

Los componentes del costo total variable son tres, los costos anuales por ordenar, los costos anuales por mantener y los costos anuales por faltantes.

Figura 14: Inventario con faltantes planeados



$$
\begin{aligned}
\text{Costo anual por ordenar} &= K\frac{D}{Q} \\
\text{Costo anual por mantener} &= h\left(\frac{Q-S}{2}\right)\left(\frac{Q-S}{Q}\right) \\
&= h \times \text{nivel promedio del inventario positivo} \times \text{fracción de tiempo respectivo} \\
\text{Costo anual por faltantes} &= p\left(\frac{S}{2}\right)\left(\frac{S}{Q}\right) \\
&= p \times \text{nivel del faltante promedio} \times \text{fracci ón del tiempo cuando ocurre el faltante}
\end{aligned}
$$

De ahí que, la función del costo total variable, depende de las variables Q y S.

$$
CTV(Q,S) = K\frac{D}{Q} + h\frac{(Q-S)^2}{2Q} + p\frac{S^2}{2Q}
$$

Obtenemos el óptimo de CTV, derivando parcialmente respecto a Q y a S.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial CTV}{\partial Q} &= -K\frac{D}{Q^2} + \frac{h}{2}\frac{2(Q-S)Q-(Q-S)^2}{Q^2} - \frac{p}{2}\frac{S^2}{Q^2} = \frac{-2KD + hQ^2 - (h+p)S^2}{2Q^2} \\
\frac{\partial CTV}{\partial S} &= -h\frac{Q-S}{Q} + p\frac{S}{Q} = \frac{-h(Q-S)+pS}{Q} = \frac{-hQ+(h+p)S}{Q}
\end{aligned}
$$

Igualando a cero cada los lados derechos de las expresiones anteriores y simplificando, obtenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
hQ^2 - (h+p)S^2 &= 2KD \\
-hQ + (h+p)S &= 0
\end{aligned}
$$

De la segunda ecuación, resolvemos para S,

$$
S = \frac{h}{h+p}Q
$$

Sustituimos S en la primera ecuación y resolvemos para Q

$$\begin{aligned}
hQ^2 - (h+p)\left(\frac{h}{h+p}Q\right)^2 &= 2KD \\
hQ^2 - \frac{h^2Q^2}{h+p} &= 2KD \\
\left(h - \frac{h^2}{h+p}\right)Q^2 &= 2KD \\
\frac{hp}{h+p}Q^2 &= 2KD \\
Q^2 &= \frac{h+p}{hp}2KD \\
Q &= \sqrt{\frac{h+p}{p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}
\end{aligned}$$

Los valores críticos

$$Q^* = \sqrt{\frac{h+p}{p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}},\ S^* = \frac{h}{h+p}Q^*$$

son óptimos porque la matriz hessiana

$$\begin{bmatrix} \frac{2KD+(h+p)S^2}{Q^3} & -\frac{(h+p)S}{Q^2} \\ -\frac{(h+p)S}{Q^2} & \frac{h+p}{Q} \end{bmatrix}$$

es positiva definida, cuando $Q = Q^*$ y $S = S^*$.

El máximo nivel del inventario es

$$Q^* - S^* = \sqrt{\frac{p}{h+p}}\sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

4. Modelo con descuento por cantidad

Suponga que los costos totales de adquisición de las unidades de un pedido Q, consisten de costos fijos A y costos variables c_k, por categoría de descuento, entonces los costos totales de adquisición son

$$A + c_kQ$$

donde

$$c_k < c_{k-1}$$

y

$$b_{k-1} \leq Q < b_k$$

para $k = 1, \ldots, j$.

b_0 es la mínima cantidad que puede ordenarse y b_j, es la máxima cantidad a ordenar, la cual generalmente no es limitada. Una gráfica para la cantidad ordenada y los descuentos es la siguiente

Figura 15: Costos por descuento

$$CTV(Q) = \begin{cases} CTV_1(Q) = \frac{30(10^6)}{Q} + 300,000 + 0.70Q & si\ 0 < Q < 10,000 \\ CTV_2(Q) = \frac{90(10^6)}{Q} + 294,020 + 0.698Q & si\ 10,000 \leq Q < 30,000 \\ CTV_3(Q) = \frac{270(10^6)}{Q} + 288,080 + 0.696Q & si\ 30,000 \leq Q < 50,000 \\ CTV_4(Q) = \frac{570(10^6)}{Q} + 282,180 + 0.694Q & si\ 50,000 < Q \end{cases}$$

El costo anual promedio en función de la cantidad a ordenar, para cada categoría es

$$CTV_k(Q) = c_kD + K\frac{D}{Q} + ic_k\frac{Q}{2}$$

para

$$b_{k-1} \leq Q < b_k$$

y

$$k = 1, \ldots, j$$

Minimizando a $CTV_k(Q)$, obtenemos

$$Q_k^* = \sqrt{\frac{2KD}{ic_k}}$$

No todos los óptimos *relativos* pertenecen a la k -ésima categoría, $[b_{k-1}, b_k]$, de ahí que la regla de decisión es

Si	*Cantidad 'optima a ordenar*
$Q_k^* \leq b_{k-1}$	b_{k-1}
$b_{k-1} < Q_k^* < b_k$	Q_k^*
$b_k < Q_k^*$	b_k

El costo total anual promedio es

$$CTV(Q^*) = \min_k CTV_k(Q)$$

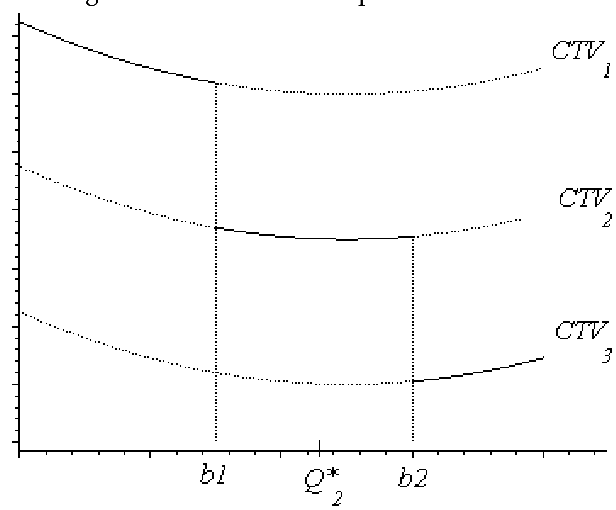
donde

$$Q^*$$

es el tamaño del lote óptimo global.

Example 3 *La gráfica de $CTV(Q)$, consiste de los segmentos de curvas sólidas, que corresponden a tres categorías de descuentos. Los puntos mínimos de la primera y tercera categoría, están en los extremos superior e inferior de la categoría, respectivamente. El CTV mínimo, para la segunda categoría, se encuentra en Q_2^**

Figura 16: Costos totales por descuento



$$Q_2^*$$

Example 4 *Un productor compra grandes cantidades de una pieza para un proceso de ensamblado. Quiere comprar un lote de tamaño constante y no quiere tener faltantes. Determine el tamaño óptimo del lote, conforme a la siguiente información.*

1. Demanda anual de 300,000 unidades
2. Costos por pedido de 80 U.M., del productor
3. Costos anuales por el interés, seguro e impuestos sobre la inversión por el promedio del inventario, de 20% del valor promedio del inventario
4. Costos por mantener, 10 centavos por mes, con base en la cantidad promedio retenida

5. Precio del vendedor por venta registrada, de un cargo fijo de 20 U.M. por orden, más un cargo por unidad de acuerdo al tamaño del pedido, conforme a la siguiente tabla de precios

Tamaño del pedido	Costo unitario variable (U.M.)
$0 < Q < 10,000$	1,00
$10,000 \leq Q < 30,000$	0,98
$30,000 \leq Q < 50,000$	0,96
$50,000 \leq Q$	0,94

Para resolver el problema, obtenemos la función de costo total anual, tomando en cuenta que los costos fijos por pedido son de 100 U.M., la suma de los costos del productor y del cargo fijo del vendedor, y los costos por mantener de 1.20 U.M., por año por unidad, de inventario promedio.

Cuando

$$b_{k-1} \leq Q < b_k$$

el precio es c_k y el costo promedio anual es

$$CTV_k(Q) = (80+20)\frac{300,000}{Q} + (300,000)c_k + [(0,20)c_k + 1,20]\frac{Q}{2}$$

donde

$$k = 1,2,3,4,$$

El Q óptimo en la categoría k es

$$\begin{aligned} Q_k^* &= \sqrt{\frac{2(100)(300,000)}{1,20+0,20c_k}} \\ &= 1,000\sqrt{\frac{60}{1,20+0,20c_k}} \end{aligned}$$

Substituyendo los datos por categoría se obtiene

c_k	Condición	Cantidad óptima a ordenar
1,00	$Q_1^* = 6546{,}536707 < b_1 = 10,000$	6,547
0,98	$Q_2^* = 6555{,}908990 < b_1 = 10,000$	10,000
0,96	$Q_3^* = 6565{,}321643 < b_2 = 30,000$	30,000
0,94	$Q_4^* = 6574{,}774955 < b_3 = 50,000$	50,000

Ahora, calculamos los costos para los lotes óptimos

Q_k^*	$CTV\left(Q_k^*\right)$ $U.M.$	
6,547	309,165,15	
10,000	303,980,00	mínimo
30,000	309,880,00	
50,000	317,300,00	

Por lo tanto, el lote óptimo es $Q^* = 10,000$ unidades.El tiempo promedio entre dos órdenes consecutivas es de

$$\frac{Q^*}{D} = \frac{10,000}{30,000} = ,0\overline{3} \text{ de año}$$

es decir,

$$8.\overline{3} \text{ días}$$

5. Modelo con descuentos incrementales

El modelo con descuentos anterior se aplica el descuento a todas las unidades, porque el precio asociado con el intervalo se aplicó a todo el nivel del inventario Q, de unidades compradas. Otra situación se da cuando se tiene una tabla de descuentos que se aplican solo a las unidades que están en un determinado intervalo. Es decir, si $b_0 = 0$, las primeras b_1 unidades tienen un costo de c_1 U.M., cada una, las siguientes $(b_2 - b_1)$ unidades, un costo de c_2 cada una y así sucesivamente, con $c_1 > c_2 > \cdots > c_j$, este comportamiento con descuentos se denomina incremental (Hadley, et. al., 1963)

El costo total variable por adquisición de Q unidades, es

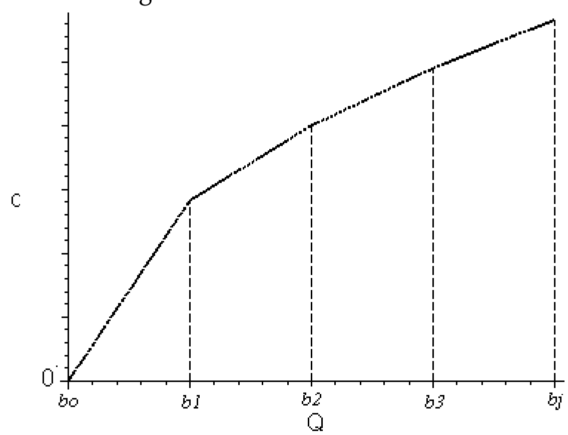
$$\begin{aligned} C(Q) &= \sum_{k=1}^{j-1} c_k (b_k - b_{k-1}) + c_j \left(Q - b_{j-1}\right) \\ &= C\left(b_{j-1}\right) + c_j \left(Q - b_{j-1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$b_{j-1} \leq Q < b_j$$

Gráficamente, el costo total variable, de adquisición, se comporta como:

Figura 17: Descuentos incrementales



El costo total anual promedio es

$$CTV(Q) = CTV_j(Q)$$

si

$$b_{j-1} \leq Q < b_j$$

donde

$$\begin{aligned} CTV_j(Q) &= [A + C(Q)] \frac{D}{Q} + i \left[\frac{C(Q)}{Q}\right] \frac{Q}{2} & (17) \\ &= \left[A + C\left(b_{j-1}\right) + c_j \left(Q - b_{j-1}\right)\right] \frac{D}{Q} + \frac{i}{2} \left[C\left(b_{j-1}\right) + c_j \left(Q - b_{j-1}\right)\right] & (18) \end{aligned}$$

con A costos fijos e i la tasa de interés sobre el valor promedio del inventario.

La cantidad $\frac{C(Q)}{Q}$, representa el precio unitario promedio y se usa para encontrar el valor promedio del inventario. La relación anterior, asume que no hay faltantes y que es posible adquirir cualquier cantidad de unidades.

El costo total anual promedio se comporta como

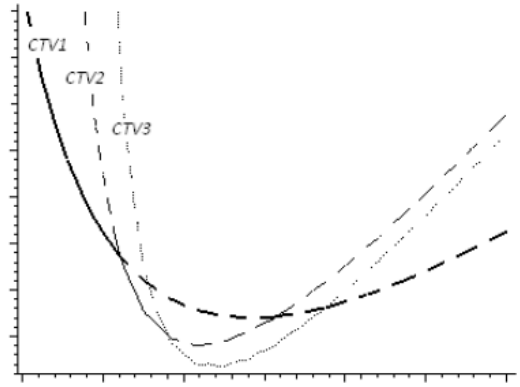
Para encontrar el tamaño óptimo del lote a ordenar, se calcula para cada $k = 1, \ldots, j$

$$Q_k^0 = \sqrt{\frac{2D\left[A + C(b_{k-1}) + c_k b_{k-1}\right]}{i c_k}}$$

Si $b_{k-1} \leq Q_k^0 < b_k$, calcule $CTV_k\left(Q_k^0\right)$.

Escoja el tamaño óptimo del lote Q^*, como Q_k^0 que produce el mínimo $CTV_k\left(Q_k^0\right)$.

Figura 18: CTV con descuemtos incrementales



Example 5 *Suponga que la lista de precios*

Tamaño del pedido	*Costo unitario variable (U.M.)*
$0 < Q < 10,000$	1,00
$10,000 \leq Q < 30,000$	0,98
$30,000 \leq Q < 50,000$	0,96
$50,000 \leq Q$	0,94

es una del tipo de descuentos incrementales. Con un costo unitario mensual, por mantener de 0.10 U.M. Entonces el costo total anual es CTV_j, cuando $b_{j-1} \leq Q < b_j$, donde

$$\begin{aligned} CTV_j(Q) &= \left[100 + C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)\right]\frac{300,000}{Q} + \\ &\quad \frac{0{,}20}{2}\left[C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)\right] + 1{,}20\frac{Q}{2} \end{aligned}$$

El último término, es el costo por almacenar, calculado sobre el inventario promedio. Para cada j, se obtiene

j	c_j	b_j	$C\left(b_j\right) = \sum_{k=1}^{j-1} c_k\left(b_k - b_{k-1}\right)$	$C(Q)l = C\left(b_{j-1}\right) + c_j\left(Q - b_{j-1}\right)$—
1	1,00	10,000	$C(b_1) = c_1(b_1 - b_0) = 10,000$	$0 + 1Q = Q$
2	0,98	30,000	$C(b_2) = c_1(b_1 - b_0) + c_2(b_2 - b_1)$	$[0 + 1b_1] + 0{,}98[Q - b_1] = 200 + 0{,}98Q$
			$= 10,000 + 0{,}98(20,000) = 29,600$	
3	0,96	50,00	$C(b_3) = \sum_{k=1}^{3} c_k(b_k - b_{k-1}) = 48,800$	$[200 + 0{,}98b_2] + 0{,}96[Q - b_2] = 800 + 0{,}96Q$
4	0,94	-	-	$[800 + 0{,}96b_3] + 0{,}94[Q - b_3] = 1800 + 0{,}94Q$

Usando los datos, obtenemos los óptimos de cada función CTV_j, para $j = 1,2,3,4$, usando la derivada de cada función.

Figura 19: Costos por descuento

$$CTV(Q) = \begin{cases} CTV_1(Q) = \frac{30\left(10^6\right)}{Q} + 300,000 + 0.70Q & si\ 0 < Q < 10,000 \\ CTV_2(Q) = \frac{90\left(10^6\right)}{Q} + 294,020 + 0.698Q & si\ 10,000 \leq Q < 30,000 \\ CTV_3(Q) = \frac{270\left(10^6\right)}{Q} + 288,080 + 0.696Q & si\ 30,000 \leq Q < 50,000 \\ CTV_4(Q) = \frac{570\left(10^6\right)}{Q} + 282,180 + 0.694Q & si\ 50,000 < Q \end{cases}$$

$$Q_1^* = 6,547 \tag{19}$$
$$Q_2^* = 11,355 \tag{20}$$
$$Q_3^* = 19,696 \tag{21}$$
$$Q_4^* = 28,659 \tag{22}$$

Las curvas $CTV_j(Q)$, para cada $j = 1,2,3,4$ son

Los óptimos Q_3^* y Q_4^*, no pertenecen a la categoría donde los $CTV_3(Q)$ y $CTV_4(Q)$, se aplican, respectivamente, de ahí que no se les tome en cuenta para determinar el tamaño del lote óptimo. El lote óptimo se determina con Q_1^* y Q_2^*. Los costos anuales promedio, de esos lotes óptimos, son

Figura 20: CTV anual con descuentos incrementales

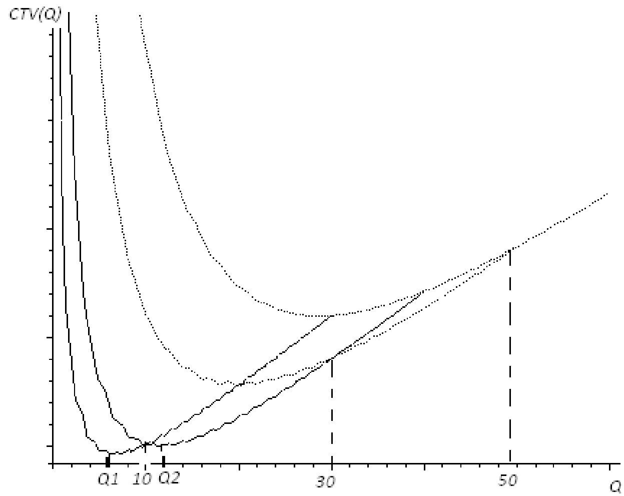


Figura 21: CTV por categoría

$$\begin{aligned} CTV_1(6,547) &= \frac{30\,(10^6)}{6,547} + 300,000 + 0.70\,(6,547) = 309,165.15\ (U.M.) \\ CTV_2(Q) &= \frac{90\,(10^6)}{11,355} + 294,020 + 0.698\,(11,355) = 309,871.81\ (U.M.) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tamaño del lote óptimo es $6,547$ *unidades. El número de órdenes es* 46*, el tiempo óptimo entre dos órdenes consecutivas es* $0{,}022$ *de año, esto es, cada* 8 *días (año de* 365 *días).*

6. Modelo de inventario para producción

Una de las suposiciones del modelo básico EOQ es que la cantidad a ordenar que abastecerá al inventario se recibe toda en un momento dado, lo cual suele presentarse con minoristas o mayoristas. Sin embargo, una situación diferente se encuentra en la producción de artículos, cuando se reabastecen sus productos terminados y los inventarios de artículos intermedios se reabastecen gradualmente al completarse corridas intermintentes de producción interna. Suponiendo que una corrida de producción toma un periodo de tiempo significativo y que los artículos producidos se transfieren al inventario conforme son terminados, en lugar de que se transfieran todos juntos, al final de la corrida. El modelo EOQ con reabastecimiento gradual es adecuado para esta situación.

Este modelo supone que el patrón del nivel del inventario a lo largo del tiempo es como el de la figura siguiente

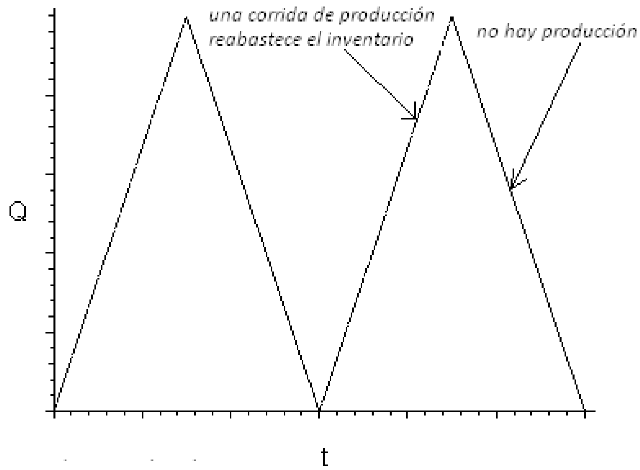
Cuando una corrida de producción está en ejecución, el inventario se reabastece gradualmente conforme a la tasa de producción R mientras que el inventario se reduce, conforme a la tasa de demanda D. Cuando el inventario llega a cero, se inicia otra corrida de producción, y así sucesivamente. En este contexto, la cantidad a ordenar Q, es el número de unidades a producirse durante la corrida, denominado tamaño del lote de producción. Los supuestos del modelo básico EOQ, se mantienen con excepción del reabastecimiento:

1. Demanda con tasa constante
2. Una corrida de producción se programa para que inicie cada vez que el nivel del inventario llega a cero, para reabastecer el inventario con una tasa constante a lo largo de la corrida
3. No se permiten faltantes planeados

Sea $R \geq D$, en caso contrario no se podría satisfacer la demanda, entonces en el instante $\frac{Q}{R}$ se habrán producido Q unidades. En este momento, la corrida de producción se completa y el inventario disminuye a una tasa de D, unidades por año hasta que el inventario es cero, lo que ocurre cuando el tiempo es $\frac{Q}{D}$. Suponiendo que los costos de producción son independientes del tamaño de la corrida, se quiere determinar el valor de Q que minimiza

$$CTV = \frac{\text{costo de preparación}}{\text{año}} + \frac{\text{costo por mantener}}{\text{año}}$$

Figura 22: Inventario con reabastecimiento gradual



El costo de preparación anual es

$$\left(\frac{\text{costo por pedido}}{\text{ciclo}}\right)\left(\frac{\text{ciclo}}{\text{año}}\right) = \frac{KD}{Q}$$

Dado que la demanda ocurre a una tasa constante, el nivel del inventario promedio es un medio del nivel de inventario máximo, lo cual ocurre en el instante $\frac{Q}{R}$ y es $\frac{Q}{R}(R-D)$, entonces

$$\text{nivel del inventario promedio} = \frac{1}{2}\frac{Q}{R}(R-D)$$

y

$$\frac{\text{costo por mantener}}{\text{año}} = h\frac{(R-D)Q}{2R}$$

Por lo tanto,

$$CTV = \frac{KD}{Q} + h\frac{(R-D)Q}{2R}$$

y

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{2KD}{\frac{h(R-D)}{R}}\right)^{1/2} = \left(\frac{2KDR}{h(R-D)}\right)^{1/2}$$

Se ejecutan $\frac{D}{Q}$ corridas al año para satisfacer la demanda anual de D unidades.

La expresión anterior se reformula usando la fórmula básica $EOQ = \left(\frac{2KD}{h}\right)^{1/2}$, como

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{R}{R-D}\right)^{1/2} EOQ$$

Lo que expresa que conforme se incrementa R, la producción ocurre a una tasa más rápida. De ahí que, para R grande, el modelo de tasa continua para el reabastecimiento, tiende a la situación de entrega inmediata del modelo EOQ, puesto que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R}{R-D} = 1$$

es decir, que el tamaño óptimo de corrida de producción para el modelo de reabastecimiento continuo o gradual tiende a EOQ.

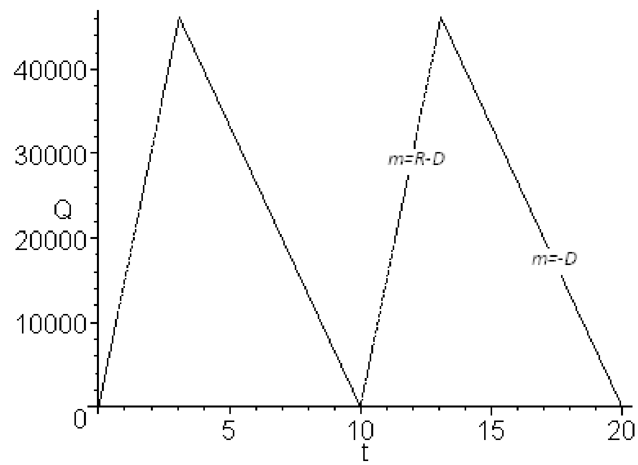
Example 6 *Una empresa produce 10,000 unidades para un proceso de producción. Cada una con un costo de 2,000 U.M. La planta de la empresa tiene la capacidad de producir 25,000 unidades por año. El costo de preparación de una corrida es de 200 U.M. El costo anual por mantener es de 25 centavos, por U.M. de inventario. Determine el tamaño óptimo de la corrida de producción ¿Cuántas corridas de producción se hacen al año? (Winston, 2005, p. 867)*

Solution 7 *Los datos relevantes son*

$$\begin{aligned} R &= 25,000 \text{ unidades por año} \\ D &= 10,000 \text{ unidades por año} \\ h &= 0{,}25(2,000) = 500 \text{ U.M./unidad/año} \\ K &= 200 \text{ U.M. por corrida de producción} \end{aligned}$$

Suponiendo que una corrida de producción inicia en el tiempo 0*, la variación del inventario con respecto al tiempo se describe con en la siguiente gráfica*

Figura 23: Ejemplo inventario reabastecimiento gradual



Usando la expresión para el tamaño óptimo de corrida y los datos del ejemplo, se obtiene

$$\text{Tamaño óptimo de corrida} = \left(\frac{2(200)(10,000)(25,000)}{500(25,000-10,000)}\right)^{1/2} = 115{,}4700539$$

Por tanto se harán

$$\frac{D}{Q} = \frac{10,000}{115{,}4700539} = 86{,}60254033 \text{ corridas de producción cada año}$$

7. Modelo dinámico

[5]

Cuando la demanda cambia conforme el tiempo transcurre, el problema de planeación del inventario asociado, se dice que es dinámico. Los casos anteriores se trataron de manera estática, bajo el supuesto de que la tasa de la demanda es constante y conocida. Ahora se analiza el problema de determinar el tamaño óptimo a ordenar, con demanda determinista y dinámica.

Sea T la duración del horizonte de planeación, finito, en el cual los lotes se agregan al inventario en tiempos arbitrarios durante ese periodo. Considérese una política de faltantes no permitidos. Cuando la tasa de la demanda en el tiempo t, $\delta(t)$, no es constante a lo largo del tiempo, ya no es óptimo tener todos los lotes del mismo tamaño, por lo que se introduce una nueva variable que contabiliza los lotes que ocurren en un periodo

$$n = \text{número de lotes suministrados durante el periodo } [0, T]$$

[5] Tomado de Johnson, et. al.(1974), pp 71-74

Los parámetros y variables relevantes son

$$\begin{aligned} Q_j &= \text{tamaño del lote por agregarse al inventario en el tiempo } t_j \\ A &= \text{costo fijo asociado con el suministro de un lote} \\ c &= \text{costo unitario variable de adquisición} \\ h &= \text{costo unitario por mantener por unidad de tiempo} \\ D(t) &= \text{demanda acumulada en el intervalo } [0,t] \\ I(t) &= \text{nivel del inventario en el tiempo } t \end{aligned}$$

El problema consiste en escoger n lotes de tamaños $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, los cuales se agregan al inventario, en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, respectivamente, para minimizar

$$CTV_n = nA + cD(t) + H_n$$

donde

nA	total de costos fijos asociados al suministro
$cD(t)$	costo total variable por suministrar
H_n	costo total por mantener el inventario en el horizonte de planeación

Nótese que n es una variable de decisión, así como $\left\{t_j\right\}$ y $\left\{Q_j\right\}$, respecto a estas variables el término $cD(t)$, es constante, por lo que se omite de la discusión siguiente.

El nivel del inventario, en el tiempo t, está dado por la expresión

$$I(t) = I(0) + \sum_{i=1}^{j} Q_i - D(t)$$

donde

$$t_j \leq t \leq t_{j+1}$$

para

$$j = 0, 1, \ldots, n$$

$$t_0 = 0 \text{ y } t_n = T$$

Con una política óptima se tendrá inventario cero en los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$, porque si consideramos el tiempo t_j, antes de que el lote se agregue al inventario, $I\left(t_j\right) > 0$ y el costo del inventario H_n, se podría reducir por

$$h\left(t_j - t_{j-1}\right) I\left(t_j\right)$$

disminuyendo el tamaño del lote, en el tiempo t_{j-1}, en $I\left(t_j\right)$ unidades.

Ningún otro costo, se verá afectado, de ahí que

$$I\left(t_j\right) = 0$$

para

$$j = 1, \ldots, n$$

bajo una política óptima. Usando este hecho junto con la restricción $I\left(t_j\right) \geq 0$, se tiene que

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta(t)\, dt = D\left(t_{j+1}\right) - D\left(t_j\right)$$

para todo

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

y

$$D(t_1) = I(t_0) = I(0)$$

de modo que

$$t_1 = D^{-1}(I(0))$$

El nivel del inventario en el instante t es

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - \int_{t_0}^{t} \delta(u)\,du & , 0 \le t \le t_1 \\ Q_j - \int_{t_j}^{t} \delta(u)\,du & , t_j \le t \le t_{j+1} \quad , j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

O, en términos de la función de demanda acumulada

$$I(t) = \begin{cases} I(0) - D(t) & , 0 \le t \le t_1 \\ D\left(t_{j+1}\right) - D(t) & , t_j \le t \le t_{j+1} \quad , j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

El costo total por mantener el inventario es

$$H_n = h \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} I(t)\,dt$$

sustituyendo a $I(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} H_n &= h \int_0^{t_1} [I(0) - D(t)]\,dt + h \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[D\left(t_{j+1}\right) - D(t)\right] dt \\ &= h \left[t_1 I(0) - \int_0^{t_1} D(t)\,dt \right] + h \sum_{j=1}^{n} \left[D\left(t_{j+1}\right)\left(t_{j+1} - t_j\right) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)\,dt \right] \\ &= h \left[t_1 I(0) + \sum_{j=1}^{n} \left(t_{j+1} - t_j\right) D\left(t_{j+1}\right) \right] - h \sum_{j=0}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} D(t)\,dt \end{aligned}$$

pero, $D(t_1) = I(0)$, de donde

$$H_n = h \sum_{j=0}^{n} \left(t_{j+1} - t_j\right) D\left(t_{j+1}\right) - h \int_0^{T} D(t)\,dt$$

Para un n dado, H_n se miminiza, seleccionando $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tales que se cumple el sistema (S)

$$\begin{aligned} D(t_1) &= I(0) \\ \frac{\partial H_n}{\partial t_j} &= 0 \\ D(t_{n+1}) &= D(T) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{\partial H_n}{\partial t_j} = \left(t_j - t_{j-1}\right) \frac{\partial D\left(t_j\right)}{\partial t_j} + D\left(t_j\right) - D\left(t_{j+1}\right)$$

y

$$\frac{\partial D\left(t_j\right)}{\partial t_j} = \delta\left(t_j\right)$$

sustituyendo se tiene

$$\left(t_j - t_{j-1}\right) \delta\left(t_j\right) + D\left(t_j\right) - D\left(t_{j+1}\right) = 0 \text{ para } j = 2, 3, \ldots, n$$

lo que implica que

$$D\left(t_{j+1}\right) = D\left(t_j\right) + \left(t_j - t_{j-1}\right) \delta\left(t_j\right)$$

con

$$j = 2, 3, \ldots, n$$

En síntesis, los siguientes tres pasos forman un método para completar la solución.

1. Para n dado, resolver para $\left\{t_j^*\right\}$, los valores de $\left\{t_j\right\}$ que satisfacen el sistema (S). Si $D(t)$ es una función simple de t y n es pequeño, el sistema puede resolverse directamente. En caso contrario, use la ecuación $D(t_1) = I(0)$, para encontrar t_1^*, entonces escoja el valor de t_2 y resuelva para $t_3, t_4, \ldots, t_n$, al satisfacer $n-2$ ecuaciones

$$D\left(t_{j+1}\right) = D\left(t_j\right) + \left(t_j - t_{j-1}\right)\delta\left(t_j\right)$$

   La última relación dará probablemente, $D(t_{n+1}) \neq D(t)$, así que intente diferentes valores para t_2, hasta que

$$D(t_{n+1}) = D(t)$$

   Evalúe CTV_n, para el conjunto $\left\{t_j^*\right\}$ y n, para obtener CTV_n^*.

2. Varíe n y repita el paso 1. Escoja la política que minimice CTV_n^*.

3. Determine los tamaños óptimos de los lotes, con la ecuación

$$Q_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \delta(t)\,dt = D\left(t_{j+1}\right) - D\left(t_j\right)$$

   usando $\left\{t_j^*\right\}$.

Example 8 *Durante el próximo año, la tasa de demanda para un producto, se espera que varie de acuerdo a la función*

$$\delta(t) = 1000 - 400t, 0 \leq t \leq 1$$

donde t se mide en años. Esto es

$$D(T) = D(1) = 1000$$

El precio de adquisición por artículo es 20 U.M., por unidad y el costo fijo de obtención es de 200 U.M., por orden. El costo unitario anual, por mantener en inventario, es de 20 por ciento sobre el costo de adquisición. No se permiten faltantes. El inventario inicial es 192 unidades. El inventario final debe ser cero. El problema es determinar cuándo y en qué cantidades, ordenar durante el próximo año[6].

Solution 9 *Analicemos tres situaciones:*

1. Suponga que, solamente una orden será colocada. Esto, debe hacerse cuando el inventario inicial se haya agotado. Como

$$D(t) = 1000t - 200t^2$$

   los requerimientos acumulados, serán iguales a 192, en el tiempo

$$t_1 = 0{,}20$$

   que es la solución de la ecuación

$$1000t - 200t^2 = 192$$

   que satisface

$$0 < t_j < 1$$

   Entonces, la cantidad a ordenar es

$$Q_1 = D(T) - I(0) = 800 - 192 = 608$$

   unidades en ese momento. Para calcular el costo por mantener, sustituimos en la ecuación

$$H_n = h\sum_{j=0}^{n}(t_{j+1} - t_j)D(t_{j+1}) - h\int_0^T D(t)dt$$

   los datos

[6]Tomado de Jonhson y Montgomery (1974), p. 73

$$
\begin{aligned}
n &= 1\\
t_0 &= 0\\
t_1 &= 0{,}2\\
t_2 &= 1\\
h &= iC = 4\\
D(t_1) &= 192\\
D(t_2) &= 800
\end{aligned}
$$

para obtener

$$
\begin{aligned}
H_1 &= 4\sum_{j=0}^{1}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1}) - 4\int {}_0{}^1(1000t-200t^2)dt\\
H_1 &= 4[(0{,}2-0)(192)+(1-0{,}2)(800)] - \frac{5200}{3}\\
H_1 &= 980{,}266667
\end{aligned}
$$

El costo total variable correspondiente es

$$CTV_1^* = A + H_1 = 1180{,}266667 \text{ U.M}$$

2. Ahora, suponga que dos órdenes se van a colocar, es decir, $n = 2$. La primera en $t_1 = 0{,}20$. Hay que encontrar t_2, para el cual se satisfaga la ecuación

$$D(t_{j+1}) = D(t_j) + (t_j - t_{j-1})\delta(tj)$$

con $j = 2$. Esto es,

$$D(t_3) = D(t_2) + (t_2 - t_1)\delta(t_2)$$

Pero,

$$D(t_3) = D(T) = 800$$

Así se obtiene la ecuación

$$800 = 1000t_2 - 200{t_2}^2 + (t_2 - 0{,}20)(1000 - 400t_2)$$

Resolviendo la ecuación para t_2, y tomando en cuenta que

$$0 < t_2 < 1$$

obtenemos

$$t_2 = {,}576709895$$

Calculamos ahora los tamaños de los lotes

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= D({,}576709895) - D(0{,}200) = 510{,}1910344 - 192 = 318{,}1910345\\
Q_2 &= D(1) - D({,}576709895) = 800 - 510{,}1910344 = 289{,}8089655
\end{aligned}
$$

Comprobamos que la suma de los lotes es igual a la diferencia $800 - 192$.

$$318{,}1910345 + 289{,}8089655 = 608$$

Con los tiempos y lotes encontrados, calculamos el costo por mantener y el costo total, cuando se hacen dos órdenes.

$$
\begin{aligned}
H_2 &= 4\sum_{j=0}^{2}(t_{j+1}-t_j)D(t_{j+1}) - 4\int_0^T D(t)dt\\
H_2 &= 4[(t_1-t_0)D(t_1)+(t_2-t_1)D(t_2)+(t_3-t_2)D(t_3)] - \frac{5200}{3}\\
H_2 &= 4[(0{,}2-0)(192)+({,}576709895-0{,}2)(510{,}1910344)+(1-{,}576709895)(800)] - \frac{5200}{3}\\
H_2 &= 543{,}571047 \text{ U.M.}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$CTV_2^* = 2A + H_2 = 943{,}571047 \text{ U.M.}$$

Comparamos los costos totales variables, con una y dos órdenes, recuérdese que $CTV_1^* = 1180$, de ahí que

$$CTV_2^* < CTV_1^*$$

Dado que el costo total variable con dos órdenes es menor que el costo total variable con una orden, la política óptima con dos órdenes es mejor que con una.

3. Ahora, suponga que tres órdenes se van a colocar, es decir, $n = 3$. La primera en $t_1 = 0{,}20$. Hay que encontrar los valores de t_2 y t_3, para los que se cumplan las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} D(t_3) &= D(t_2) + (t_2 - 0{,}2)(1000 - 400t_2) \\ D(t_4) &= D(t_3) + (t_3 - t_2)(1000 - 400t_3) \equiv D(T) = 800 \end{aligned}$$

Sustituimos las expresiones para las demandas $D(t_2)$ y $D(t_3)$, con lo que se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} 1000t_3 - 200t_3^2 &= 1000t_2 - 200t_2^2 + (t_2 - 0{,}2)(1000 - 400t_2) \\ 1000t_3 - 200t_3^2 + (t_3 - t_2)(1000 - 400t_3) &= 800 \end{aligned}$$

Cuya solución

$$t_2^* = {,}4475716412 \text{ y } t_3^* = {,}7122035760$$

satisface

$$0 < t_j < 1$$

para $j = 2, 3$. Calculamos los tamaños de los lotes para esos tiempos

$$\begin{aligned} Q_1 &= D({,}4475716412) - D(0{,}200) = 407{,}5075664 - 192 = 215{,}5075664 \\ Q_2 &= D({,}7122035760) - D({,}4475716412) = 610{,}7567893 - 407{,}5075664 = 203{,}2492229 \\ Q_3 &= D(1) - D({,}7122035760) = 800 - 610{,}7567893 = 189{,}2432107 \end{aligned}$$

Comprobamos que la suma de los lotes es $800 - 192$.

$$215{,}5075664 + 203{,}2492229 + 189{,}2432107 = 608$$

La política de tres órdenes da un costo por mantener de

$$\begin{aligned} H_3 &= 4\sum_{j=0}^{3}(t_{j+1} - t_j)D(t_{j+1}) - 4\int_0^T D(t)dt \\ H_3 &= 4\left[(t_1 - t_0)D(t_1) + (t_2 - t_1)D(t_2) + (t_3 - t_2)D(t_3) + (t_4 - t_3)D(t_4)\right] - \frac{5200}{3} \\ H_3 &= 4\left[(0{,}2 - 0)(192) + ({,}4475716412 - 0{,}2)(407{,}5075664) + ({,}7122035760 - {,}4475716412)(610{,}7567893)\right] \\ & \quad 4\left[(1 - {,}7122035760)\,800\right] - \frac{5200}{3} \\ H_3 &= 391{,}267495 \text{ U.M.} \end{aligned}$$

El costo total variable correspondiente es

$$\begin{aligned} CTV_3^* &= 3A + H_3 \\ CTV_3^* &= 991{,}267495 \text{ U.M.} \end{aligned}$$

Como

$$CTV_3^* > CTV_2^*$$

decidimos terminar el análisis y utilizar la política de doble lote.

8. Aplicación del análisis de optimalidad a un problema de inventarios

[7]

Considere el siguiente problema de inventarios

Min: $CTV(Q)$

Sujeta a:

$\sum_{i=1}^{n} c_i Q_i \leq P$

$\sum_{i=1}^{n} f_i Q_i \leq F$

$Q_i \geq 0$

Reformulamos el problema como

Min: $CTV(Q)$

Sujeta a:

$\sum_{i=1}^{n} c_i Q_i - P \leq 0$

$\sum_{i=1}^{n} f_i Q_i - F \leq 0$

$Q_i \geq 0$

Las condiciones de Kuhn-Tucker, se cumplen para $Q^* = (Q_1, \ldots, Q_n)$.

$$\begin{aligned} \nabla CTV(Q^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(Q^*) &= 0 \\ \lambda_j g_j(Q^*) &= 0,\ j = 1, \ldots, m \\ \lambda_j &\geq 0\ , j = 1, \ldots, m \\ g_j(Q^*) &\leq 0\ ,\ j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Example 10 *El departamento de compras de una empresa compra los componentes tipo con undeterminado proveedor. El costo fijo de realizar un pedido para cualquiera de los tres tipos de componentes es de* $100. *El factor de costo de mantenimiento de inventario es* 0,20. *Otros datos relevantes se presentan en la siguiente tabla.*

Artículo	1	2	3
Tasa demanda anual	10000	30000	20000
Costo unitario	350	125	210
Requisito de espacio $\frac{ft^2}{unit}$	10	15	12

El CEO ha establecido un límite de 75,000 *sobre el valor promedio de los inventarios en stock. Además, hay un límite en la cantidad de espacio disponible para almacenar el inventario de* 10,000 ft^2.

Encuentre la cantidad de pedido óptima para cada tipo de artículo, para minimizar el promedio total de los costos fijos anuales por ordenar y mantener, sujetos a las restricciones.

Solution 11 *La solución generada por Solver, en hoja de excel, sin considerar la restricción de variables de decisión enteras:*

Figura 24: Solución generada en excel.

	Q1	Q2	Q3	TOTALES		LD	
R1	$ 350.00	$ 125.00	$ 210.00	$ 75,000.00	<=	$ 75,000.00	
R2	10	15	12	5159.97043	<=	10000	ft^2/u
FO	$ 12,096.10	$ 12,520.65	$ 13,250.62	$ 37,867.37			
SOL.	136.90	396.77	249.94				

Solution 12 *Si se considera la restricción de variables de decisión enteras, la solución generada por Solver es*

Exercise 13 *Formule las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema anterior.*

Solution 14 *Condiciones de Kuhn-Tucker. Dado el problema (I)*

Minimizar: $CTV(Q)$

Sujeta a: $g_1(Q) \leq 0$

$g_2(Q) \leq 0$

[7] Ver el anexo para una discusión del análisis de optimalidad en general

Figura 25: Solución con variables enteras

	Q1	Q2	Q3	TOTALES		LD	
R1	$ 350.00	$ 125.00	$ 210.00	$ 75,000.00	<=	$ 75,000.00	
R2	10	15	12	5,159.97	<=	10000	ft^2/u
FO	$ 11,832.16	$ 12,247.45	$ -	$ 24,079.61			
SOL.	169	490	250				

y una solución factible Q^*, que satura a las restricciones con índices en

$$I = \{i = 1,2 | g_i(Q^*) = 0\}$$

Suponemos, además, que CTV y g_i, con $i \in I$, son diferenciables, que las restantes g_i, con $i \notin I$, son continuas y que los vectores

$$\nabla g_i(Q^*) \text{ , con } i \in I$$

son linealmente independientes. Entonces, si Q^*, es un óptimo local del problema (I), por lo que existen escalares λ_i con $i \in I$, tales que:

$\nabla CTV(Q^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(Q^*) = 0$ $\lambda_i \geq 0$	$i \in I$
$g_j(Q^*) \leq 0$	$j = 1,2$

Si se supone además, que las funciones g_i son diferenciables en Q^* para $i \notin I$, las condiciones de Kuhn-Tucker se reformulan en el siguiente sistema equivalente

$$\nabla CTV(Q^*) + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \nabla g_j(Q^*) = 0 \quad (23)$$

$$\lambda_j g_j(Q^*) = 0, \; j = 1,2 \quad (24)$$

$$\lambda_j \geq 0 \; , j = 1,2 \quad (25)$$

$$g_j(Q^*) \leq 0 \; , \; j = 1,2 \quad (26)$$

Parte III

MODELOS ESTOCÁSTICOS CON UN ARTíCULO

[8]

Si se desconoce cuándo los clientes acuden a comprar algún nuevo artículo, se tiene una situación de incertidumbre respecto a la demanda de ese nuevo artículo o desde la perspectiva de las ventas , cuando estas fluctúan considerablemente, por ejemplo mes a mes, se tiene incertidumbre acerca de la demanda. Para estas situaciones, se requiere hacer alguna clase de pronósticos sobre la demanda esperada y la variabilidad que podría presentar. Por ejemplo, el enfoque de tres estimaciones con PERT, la más probable, la optimista y la pesimista, da lugar a una distribución de probabilidad (beta), con la cual se analizan los costos involucrados en el inventario. Las probabilidades consideradas en una situación, podrían ser subjetivas, como sucede con las probabilidades a priori, y en ese caso, es pertinente usar la teoría de decisiones. Cuando las estimaciones se basan en datos empíricos históricos, se supone que es posible hacer una estimación de la distribución de probabilidad de la demanda en un periodo dado.

Una consecuencia importante de tener incertidumbre en la demanda es que se tiene un gran riesgo de incurrir en faltantes, a menos que se maneje cuidadosamente el inventario. Se necesita colocar una orden de reabastecimiento del inventario antes de agotarse, debido principalmente al retraso en el suministro. De hecho, el tiempo de retraso en el suministro puede ser incierto. Sin embargo, si se reabastece demasiado inventario demasiado pronto,

[8]Retomar la discusión, a partir de tercer párrafo de la página 16, Love

un corto alto se paga debido al costo por mantener un inventario grande. Por ello, frecuentemente se busca el mejor intercambio o trueque entre las consecuencias de tener demasiado y escaso inventario.

El análisis de los inventarios con demanda desconocida, se suelen dividir de acuerdo al tipo de productos en cuestión, perecederos o no, es decir artículos estables. En el caso de los primeros, el inventario se mantiene durante periodos cortos; los segundos, son suceptibles de venderse de manera indefinida.

9. Modelo del vendedor de periódicos

Los periódicos o diarios, se consideran productos perecederos, porque su venta se reduce a un día, periodo de tiempo, después del cual se regresan a la editorial, o no tienen vigencia, como los productos lácteos.

El problema del vendedor de periódicos consiste en estimar diariamente el número de ejemplares de una publicación, para optimizar sus ganancias. Generalmente, el vendedor adquiere cada ejemplar a un costo fijo, lo vende a un precio fijo y consigue un reembolso por ejemplar no vendido. En el ejemplo siguiente, el vendedor asigna una distribución de probabilidad (probabilidades subjetivas) a las ventas, con base en su experiencia, en un periodo fijo. Este vendedor, vende

9 ejemplares el 30% de los días

10 ejemplares el 40% de los días

11 ejemplares el 30% de los días

Una forma de abordar esta situación de decisión, sobre qué cantidad de ejemplares solicitar diariamente para maximizar las ganancias, es con la regla de decisión de Bayes. Se calculan los rendimientos en cada una de las situaciones, considerando la distribución empírica anterior, como se muestra en la siguiente tabla.

Figura 26: Regla de Bayes para decisión

Ganancias	Estado de la naturaleza (solicitudes de compra)			Rendimiento	
Aternativas	9	10	11	esperado	
Ordenar 9	9	9	9	9	
Ordenar 10	8	10	10	9.4	mayor
Ordenar 11	7	9	11	9	
Probabilidades a priori	0.3	0.4	0.3		

El modelo del vendedor de periódicos es un modelo de inventario para un producto perecedero. Los supuestos que se hacen para este tipo de inventarios son los siguientes.

9.1. Modelo probabilístico de un solo periodo

[9]

Suposiciones del modelo. En la aplicación del modelo se

1. Involucra sólo un producto perecedero.
2. Incluye sólo un periodo dado, el producto no puede venderse después.
3. Tiene la posibilidad de disponer del inventario final, con un valor de recuperación.
4. Toma la decisión sobre cuántas unidades (cantidad a ordenar) se solicitan al inicio, para formar parte del inventario.
5. Tiene incertidumbre en la demanda, de las unidades a retirar del inventario, para venderlas o con cualquier otro propósito. Pero, se conoce o estima la distribución de probabilidad de la demanda.
6. Incurre en un costo por subordenar, cuando la demanda excede la cantidad a ordenar, es decir, hay disminución de la ganancia que resulta por no ordenar una cantidad suficiente, que pudiera haberse vendido, en el periodo.

$$c_{abajo} = \text{costo unitario por subordenar (costo por unidad faltante)}$$

[9]Winston, p. 888

7. Incurre en un costo por sobreordenar, cuando la cantidad a ordenar excede a la demanda, hay disminución en la ganancia que resulta de ordenar una unidad, que no pudo venderse, durante el periodo.

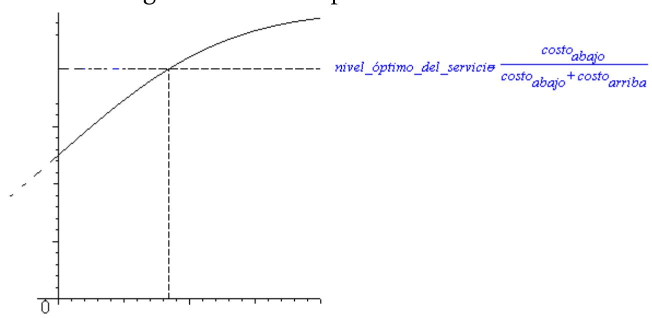
$$c_{arriba} = \text{costo unitario por sobreordenar (costo por cada unidad excedente)}$$

Definition 15 *El nivel óptimo del servicio es la razón*

$$\frac{c_{abajo}}{c_{abajo} + c_{arriba}}$$

Gráficamente, el nivel óptimo de servicio se alcanza con una cantidad óptima del pedido.

Figura 27: Nivel óptimo de servicio



Regla de pedidos para el modelo de productos perecederos

1. Calcular el nivel óptimo de servicio
2. Elegir la menor cantidad de pedido que proporciona al menos, ese nivel de servicio.

9.2. Aplicación del modelo de periodo único

La función objetivo se expresa por lo regular como una ganancia esperada o un costo esperado, en términos de la variable de decisión q. Se determina el máximo o el mínimo de la manera clásica, si se trata de una función derivable cóncava o convexa.

Example 16 *Modelo de licitación. Una empresa constructora C, participa en una licitación de una obra importante, la cual costará, de principio a fin, 2 millones de U.M. Otra empresa contrincante D, presenta también una licitación para la misma obra. En la empresa C, se piensa que la licitación de la empresa D, se encuentra entre dos y cuatro millones de U.M. Si la empresa C quiere maximizar la ganancia esperada, ¿cuál debe ser el monto de su licitación?*

Solution 17 *Definimos las variables*

$$\begin{aligned} B &= \textit{variable aleatoria que representa la oferta de la empresa D} \\ b &= \textit{oferta actual de la empresa D} \end{aligned}$$

Sea f, la función de densidad para la variable aleatoria B, dada por

$$f(b) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{1}{2(10^6)} & si\ 2\left(10^6\right) \le b \le 4\left(10^6\right) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{array} \right\}$$

Sea q la oferta de la empresa C. Se tienen tres casos:

1. Si $b > q$, la empresa C ofrece más que su contrincante D y obtiene una ganancia de

$$q - 2\left(10^6\right)$$

2. Si $b < q$, la contrincante ofrece más que la empresa C y ésta no gana nada.

3. El evento $b = q$, tiene una probabilidad casi nula de que ocurra y se puede ignorar.

Sea $E(q)$, la ganancia esperada de la empresa C, cuando oferta q, entonces

$$
\begin{aligned}
E(q) &= \int_{2(10^6)}^{q} 0 \cdot f(b)\,db + \int_{q}^{4(10^6)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) f(b)\,db \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \int_{q}^{4(10^6)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) db \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \left(q - 2\left(10^6\right)\right) b \Big|_{q}^{4(10^6)} \\
&= \frac{1}{2\left(10^6\right)} \left[4\left(10^6\right) - q\right]\left[q - 2\left(10^6\right)\right]
\end{aligned}
$$

Encontramos el valor óptimo q^*, que maximiza el valor de $E(q)$, resolviendo

$$
\begin{aligned}
E'(q) &= 0 \\
\frac{1}{2(10^6)} \left[\left[4\left(10^6\right) - q\right] - \left[q - 2\left(10^6\right)\right]\right] &= 0 \\
6\left(10^6\right) - 2q &= 0 \\
q^* &= 3\left(10^6\right)
\end{aligned}
$$

y, observando que la función es cóncava, debido a que

$$
E''(q) = -\frac{1}{10^6} < 0
$$

Por tanto, la empresa C debe ofertar $3\left(10^6\right)$, con una ganancia esperada de

$$
\begin{aligned}
E(q^*) &= \frac{1}{2(10^6)} \int_{q^*}^{4(10^6)} \left(q^* - 2\left(10^6\right)\right) db \\
&= \frac{1}{2(10^6)} \left[q^* - 2\left(10^6\right)\right] b \Big|_{q^*}^{4(10^6)} \\
&= 500,000 \text{ U.M.}
\end{aligned}
$$

10. Modelo con faltantes convertidos en ventas pendientes

10.1. Modelo (r, q)

Es una modificación del modelo básico EOQ, que se usa cuando el plazo de entrega (demora en la entrega o tiempo de espera), no es cero y la demanda durante cada plazo de entrega es aleatoria. Se supone, además, que toda la demanda se puede acumular, que se hace revisión contínua, de tal modo que los pedidos se pueden hacer en cualquier momento.

El problema consiste en determinar a q y r, de tal manera, que se minimice el costo total anual esperado (sin incluir al costo por adquisición).

Los parámetros del modelo son

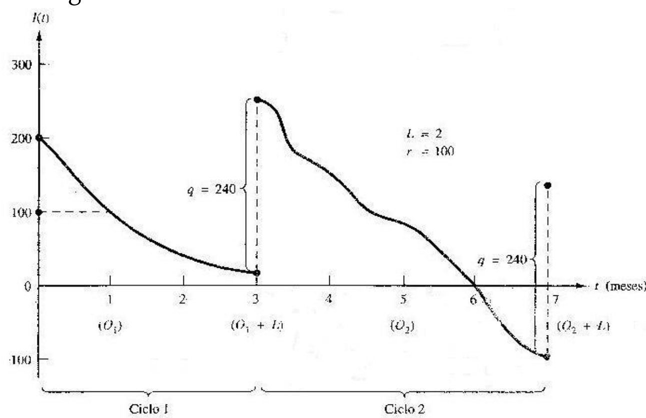
$$
\begin{aligned}
K &= \text{costo por hacer un pedido} && (27) \\
h &= \text{costo por almacenar/unidad/año} && (28) \\
L &= \text{plazo de entrega de cada pedido (se supone conocido con certeza)} && (29) \\
q &= \text{cantidad ordenada cada vez que se hace un pedido} && (30)
\end{aligned}
$$

Las varibles del modelo son

$$\begin{aligned}
D &= \text{variable aleatoria que representa la demanda anual (se supone continua),} && (31)\\
& \text{con media } E(D)\text{,varianza } varD \text{ y desviación estándar } \sigma_D && (32)\\
c_B &= \text{costo generado por cada unidad faltante, que no depende de cuánto tome agotar existencias} && (33)\\
ID(t) &= \text{inventario disponible (existencias) en el tiempo } t && (34)\\
B(t) &= \text{cantidad de pedidos pendientes en el tiempo } t && (35)\\
I(t) &= \text{nivel neto de existencias en el tiempo } t = ID(t) - B(t) && (36)\\
r &= \text{nivel de existencias en el cual se hace el pedido (punto de reorden)} && (37)
\end{aligned}$$

La evolución de un inventario respecto al tiempo en este modelo y el punto de reorden, se ilustra gráficamente en seguida.

Figura 28: Inventario con demanda desconocida



De la gráfica se determinan los siguientes niveles del inventario disponible:
$ID(0) = 200$
$ID(1) = 100$
$ID(3) = 20$
$ID(5) = 100$
$ID(6) = 0$
$ID(7) = -100$
La cantidad de pedidos pendientes es

$$B(t) = \begin{cases} 0 & \text{cuando } 0 \leq t \leq 6 \\ 100 & \text{cuando } t = 7 \end{cases}$$

De ahí que, algunos niveles de inventario netos son
$I(0) = 200 - 0 = 200$
$I(3) = 260 - 0 = 260$
$I(6) = 0 - 0 = 0$
$I(7) = 0 - 100 = -100$
Introducimos además, la variable

$$X = \text{variable aleatoria continua que representa la demanda durante el plazo de entrega}$$

con función de densidad

$$f(x)$$

media, varianza y deviación estándar

$$
\begin{aligned}
E(X) &= L \times E(D) \\
varX &= LvarD \\
\sigma_X &= \sigma_D \sqrt{L}
\end{aligned}
$$

bajo el supuesto de que las demandas, en puntos distintos del tiempo, son independientes. Si D es normalmente distribuida, entonces X también sigue una distribución normal.

Cuando la demora en la entrega L es una variable aleatoria, con media $E(L)$, vaianza $varL$ y desviación estándar σ_L y el plazo de entrega es independientes de la demanda por unidad de tiempo, durante el plazo de entrega, entoces se cumplen las siguientes igualdades

$$
\begin{aligned}
E(X) &= E(L)E(D) \\
varX &= E(L) \times varD + E(D)^2 \times varL
\end{aligned}
$$

Con relación a la gráfica anterior, describimos la evolución del inventario conforme al tiempo, como sigue. Un pedido $q = 240$ unidades llega justo en el tiempo 0 y que $L = 2$ meses. Los pedidos de tamaño q, se jacen en los tiempos $O_1 = 1$ y $O_2 = 5$ meses. Esos pedidos se reciben en los tiempos $O_1 + L = 3$ y $O_2 + L = 7$, respectivamente.

Un ciclo se define como el tiempo que transcurre entre la recepción consecutiva de dos pedidos. Así, un primer ciclo ocurre desde la llegada del pedido en el tiempo 0 y $O_1 + L = 3$. El segundo ciclo ocurre desde $O_1 + L = 3$ hasta $O_2 + L = 7$.

En el ciclo 1, la demanda durante el plazo de entrega es menor que r, el punto de reorden, de modo que no hay faltantes o déficit. Durante el ciclo 2, la demanda en el plazo de entrega excede a r, así que se agotan las existencias entre el tiempo 6 y el tiempo $7 = O_2 + L$. Es claro que, si se incrementa r es posible reducir el déficit de existencias. Pero, el aumento de r obliga a mantener un mayor inventario, por lo que aumenta el costo de mantenerlo. Por lo que, un valor óptimo de r tiene que representar algún tipo de transacción entre los costos por mantener los artículos y los costos generados por agotarse las existencias.

La situación en la cual toda la demanda debe satisfacerse a la larga y no perder venta alguna, es el caso de pedidos pendientes, para la cual se determina el punto de reabastecimiento r y la cantidad q que minimice el costo anual esperado.

Suponiendo que el costo de adquisición unitario es fijo, el costo anual esperado variable $CTV(q, r)$, que se genera, si cada pedido es por q unidades y se hace cuando el punto de reabastecimiento es r, se tiene un modelo de inventario (q, r), donde

$$
\begin{aligned}
CTV(q,r) &= \text{costo anual esperado por mantener } + \\
&\quad \text{costo anual esperado por ordenar } + \\
&\quad \text{costo anual esperado por déficit}
\end{aligned}
$$

Para determinar a q^* y r^*, suponemos que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en comparación con el nivel promedio de existencias disponibles. Esta suposición es razonable, la mayoría de las veces, porque la falta de existencias (si es que se presentan), por lo regular ocurren durante sólo una pequeña parte del ciclo.

Una variable intermedia es el inventario neto, definida como

$$I(t) = ID(t) - B(t)$$

donde $B(t)$, es la cantidad de pedidos pendientes en el tiempo t. Entonces,

$$\text{valor esperado de } I(t) = \text{valor esperado de } ID(t)$$

Así, una aproximación al costo anual esperado por mantener es

$$
\begin{aligned}
\text{costo anual esperado por mantener} &= h \times \text{valor del nivel de existencias disponibles} \\
&= hI(t)
\end{aligned}
$$

El valor esperado de $I(t)$, es igual al valor esperado en un ciclo. La tasa media a la cual se presenta la demanda es constante, de ahí que

$$
\begin{aligned}
\text{valor esperado de } I(t) \text{ en un ciclo} &= \frac{1}{2}[\text{valor esperado de } I(t) \text{ al principio del ciclo}+ \\
&\quad \text{valor esperado de } I(t) \text{ al final del ciclo}]
\end{aligned}
$$

Esto es, la media aritmética de los valores de $I(t)$, al principio y final del ciclo.

Al final del ciclo, un instante antes de que llegue el pedido, el nivel de existencias es igual al nivel de existencias en el punto de reorden r menos la demanda X (en el plazo de entrega). Por lo tanto, el valor esperado de $I(t)$, al final del ciclo es $r - E(X)$.

Al principio del ciclo, el nivel de existencias al final del ciclo anterior aumenta con la recepción de una orden, de tamaño q. De donde, el valor esperado de $I(t)$ al principio del ciclo es igual a $r - E(X) + q$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\text{valor esperado de } I(t) \text{ en un ciclo} &= \frac{1}{2}\left[r - E(X) + r - E(X) + q\right] \\ &= \frac{q}{2} + r - E(X)\end{aligned}$$

Así, el costo anual esperado por mantener es aproximadamente

$$\text{costo anual esperado por mantener} = h\left[\frac{q}{2} + r - E(X)\right]$$

Ahora, para determinar el costo anual esperado por faltantes o pedidos pendientes, se define

B_r = variable aleatoria que representa el agotamiento de existencias o la acumulación de pedidos pendientes durante un ciclo, cuando el punto de reorden es r

entonces,

$$\text{costo anual esperado por faltantes} = \left[\frac{\text{costo esperado por faltante}}{\text{ciclo}}\right]\left[\frac{\text{ciclos esperados}}{\text{año}}\right]$$

pero

$$\frac{\text{costo esperado por faltante}}{\text{ciclo}} = c_B E(B_r)$$

y la demanda se cumple a la larga, un promedio de

$$\frac{E(D)}{q}$$

órdenes se hará cada año.

Entonces,

$$\text{costo anual esperado por faltantes} = \frac{c_B E(B_r) E(D)}{q}$$

Finalmente,

$$\text{costo anual esperado por ordenar} = K\left[\frac{\text{cantidad de órdenes esperada}}{\text{año}}\right] = \frac{KE(D)}{q}$$

El total de los costos anuales esperados por mantener, por déficit y por ordenar es

$$CTV(q,r) = h\left[\frac{q}{2} + r - E(X)\right] + \frac{c_B E(B_r) E(D)}{q} + \frac{KE(D)}{q}$$

Para optimizar, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial CTV(q,r)}{\partial q} &= 0 \\ \frac{\partial CTV(q,r)}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

obteniendo q^* y r^*.

En la mayor parte de los casos, el valor q^* que satisface el sistema anterior, está muy cercano a la EOQ.

$$\left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2}$$

es decir $q^* \approx EOQ$.

10.2. Análisis marginal

Para determinar el punto de reabastecimiento o de reorden, r^*, que minimiza $CTV(q,r)$, dado un valor de q, el término

$$\frac{KE(D)}{q}$$

no es relevante, así que nos concentramos en los primeros sumandos, los costos anuales esperados por mantener y por déficit, para encontrar a r^*.

Si se incrementa el punto de reorden de r a $r+\triangle$, manteniendo a q fija, el costo anual esperado por mantener se incrementaría a

$$h\left[\frac{q}{2}+r+\triangle-E(X)\right]-h\left[\frac{q}{2}+r-E(X)\right]=h\triangle$$

Además, cuando $r\to r+\triangle$, los costos por déficit se reducen en $c_B\triangle$ durante la fracción $\Pr(X\geq r)$, de todos los ciclos. En promedio hay

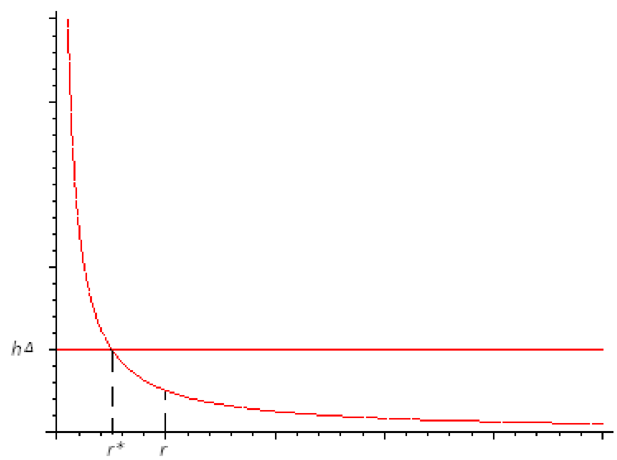
$$\frac{E(D)}{q}$$

ciclos al año, luego el costo anual esperado por déficit se reduce en

$$\frac{\triangle E(D)c_B\Pr(X\geq r)}{q}$$

Observe que, conforme r aumenta, $\Pr(X\geq r)$ disminuye, de modo que cuando r se incrementa, disminuye la reducción esperada en el costo anual esperado por déficit, que resulta de dar un incremento $\triangle$ al punto de reabastecimiento. Gráficamente, el comportamiento anterior es

Figura 29: Análisis marginal



Aumento en el costo anual esperado, por mantener, cuando $r\to r+\triangle$.

Sea r^*, el valor de r para el cual el beneficio marginal es igual al costo marginal, es decir, cuando se cumple

$$\frac{\triangle E(D)c_B\Pr(X\geq r^*)}{q}=h\triangle$$

lo que implica

$$\Pr(X\geq r^*)=\frac{hq}{c_BE(D)}$$

Si

$$\frac{hq}{c_BE(D)}>1$$

no hay solución y r se establece en el punto más bajo aceptable. Cuando $r^*<0$, se procede igual.

De la gráfica, observamos que si

$$r<r^*$$

es decir, aumentamos de r a r^*, ahorramos más en el costo por déficit de lo que perdemos en el costo por mantener.

En cambio, si

$$r > r^*$$

se ahorra más en el costo por almacenamiento de lo que perdemos en el costo incrementado por el déficit.

Por tanto, r^*, es la transacción óptima entre el costo por déficit y el costo por almacenar. En resumen, si suponemos que la cantidad ordenada se puede aproximar por

$$EOQ = \left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2}$$

entonces tenemos que el punto de reorden óptimo r^* y el tamaño óptimo de la orden q^*, en el caso de acumulación de pedidos, ventas pendientes, cumplen

$$\begin{aligned} q^* &= \left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2} \\ \Pr(X \geq r^*) &= \frac{hq^*}{c_B E(D)} \end{aligned}$$

Example 18 *Una empresa que distribuye cajas con CD's, desea determinar*

1. la cantidad a ordenar
2. el punto de reorden

que minimice los costos anuales esperados por déficit, mantener y ordenar, y

3. el stock de seguridad
4. la probabilidad de que se agoten las existencias durante el plazo de entrega

Se supone que la demanda anual de esas cajas tiene una distribución normal con media $1,000$ *y desviación estándar* $40{,}8$. *En resumen, datos relevantes son los siguientes:*

$$\begin{aligned} E(D) &= 1,000 && (38) \\ L &= 2 \text{ semanas} = \frac{2}{52} \text{ de año} && (39) \\ K &= 50 \text{ U.M.} && (40) \\ h &= 10 \text{ U.M./caja/año} && (41) \\ c_B &= 20 \text{ U.M.} && (42) \end{aligned}$$

1. La estimación de q^* es

$$EOQ = \left(\frac{2(50)(1,000)}{10}\right)^{1/2} = 100$$

2. Para encontrar r^*, primero hay que determinar el valor esperado de X y la desviación de X.

$$\begin{aligned} E(X) &= LE(D) = \frac{1}{26}1,000 = 38{,}46 && (43) \\ \sigma_X &= \sigma_D\sqrt{L} = 40{,}8\sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{40{,}8}{\sqrt{26}} = 8 && (44) \end{aligned}$$

Entonces, de

$$\Pr(X \geq r^*) = \frac{hq^*}{c_B E(D)} = \frac{10(100)}{20(1,000)} = 0{,}05$$

encontramos

$$r = NORMINV(0{,}95, 38{,}46, 8) = 51{,}62$$

3. El stock de seguridad es

$$r - E(X) = 51{,}62 - 38{,}46 = 13{,}16$$

Pero, si el plazo de entrega es aleatorio, r y $r - E(X)$, se determinan como sigue.
Suponga que L, tiene una media de 2 semanas, $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$ y desviación estándar de una semana, esto es $\frac{1}{52}$ de año. Entonces,

$$\begin{aligned} varX &= E(L)\,varD + E(D)^2\,varL \\ \sigma_X^2 &= \frac{1}{26}(40{,}8)^2 + (1,000)^2\left(\frac{1}{52}\right)^2 \\ &= 64{,}02 + 369{,}82 \\ &= 433{,}84 \end{aligned}$$

y

$$\sigma_X = \sqrt{433{,}84} = 20{,}83$$

De ahí que, el punto de reorden es

$$\begin{aligned} r &= E(X) + z_{\alpha/2}\sigma_X \\ &= 38{,}46 + 1{,}644853627\,(20{,}83) \\ &= 72{,}83 \end{aligned}$$

y el stock de seguridad

$$r - E(X) = 72{,}83 - 38{,}46 = 34{,}37$$

bajo el supuesto de que la demanda en el plazo de entrega se distribuye normalmente. Nótese que, la variabilidad del plazo de entrega, da más del doble de stock de seguridad.

11. Modelo con faltantes convertidos en ventas perdidas

En este caso se supone que el agotamiento de existencias ocasiona pérdida de ventas y que se genera un costo de c_{LS} unidades monetarias (UM), por cada venta que se pierde, además de las penalizaciones por la pérdida de clientes se incluye la pérdida de ganancias derivada de las ventas que se pierden. El inventario esperado en este caso, es igual al inventario esperado en el caso de pedidos inclumplidos más la cantidad esperada por faltante por ciclo. En el caso de ventas perdidas, durante cada ciclo, un promedio de pocos pedidos se surtirán del inventario, es decir, con lo cual se eleva el nivel promedio del inventario por una cantidad igual a los faltantes esperados por ciclo. La suposición de ventas perdidas genera una probabilidad de agotamiento de las existencias menor, un punto de reorden y un nivel de existencias de seguridad mayores que en el caso de acumulación de pedidos.

La cantidad óptima ordenar, se aproxima de manera apropiada mediante la EOQ y el punto de reorden, en el caso de ventas perdidas son

$$\begin{aligned} q^* &= \left(\frac{2KE(D)}{h}\right)^{1/2} \\ \Pr(X \geq r^*) &= \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)} \end{aligned}$$

Example 19 *Con relación al ejemplo anterior, suponemos que se vende cada caja de discos en 50 UM y que el precio de adquisición es de 30 UM. Bajo el supuesto de que el costo por faltante,de 20 UM, representa el costo por cliente que se pierde, c_{LS}, se obtiene sumando, además, la pérdida por la venta es*

$$c_{LS} = 20 + 20 = 40$$

Si $E(D) = 1000$ cajas por año, $h = 10$ UM/caja/año, $K = 50$ UM y $EOQ = 100$ cajas, entonces

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq r^*) &= \frac{hq^*}{hq^* + c_{LS}E(D)} && (45) \\ &= \frac{10(100)}{10(100)+40(1000)} && (46) \\ &= 0{,}024 && (47) \end{aligned}$$

De donde

$$r^* = NORINV(0{,}976, 38{,}46, 8) = 54{,}28$$

con un stock de seguridad de

$$r^* - E(X) = 54{,}28 - 38{,}46 = 15{,}82$$

12. Uso del nivel de servicio para determinar el nivel de existencias de seguridad

Debido a la dificultad para estimar el costo por faltante, el control de los faltantes suele hacerse usando un nivel de servicio específico.

Definition 20 *Medida 1 del nivel de servicio. La fracción esperada, expresada generalmente como porcentaje, de toda la demanda que se cumple a tiempo, se denota por*

$$SLM_1$$

Definition 21 *Medida 2 del nivel de servicio. El número esperado de ciclos al año durante los cuales se presenta déficit, se denota por*

$$SLM_2$$

Bajo el supuesto de que los faltantes se acumulan, a continuación se ilustra el uso de los dos niveles de servicio definidos.

Example 22 *Determine SLM_1 y SLM_2, cuando la demanda anual promedio es de 1,000 unidades, la EOQ es* 100 *para un punto de reorden de* 30 *unidades. La demanda durante el plazo de entrega es aleatoria, con la siguiente masa de probabilidad*

Demanda en el plazo de entrega	*Probabilidad*
20	$\frac{1}{5}$
30	$\frac{1}{5}$
40	$\frac{1}{5}$
50	$\frac{1}{5}$
60	$\frac{1}{5}$

Solution 23 *De la distribución se tiene que la demanda esperada durante un plazo de entrega es*

$$\frac{1}{5}(20) + \frac{1}{5}(30) + \frac{1}{5}(40) + \frac{1}{5}(50) + \frac{1}{5}(60) = \frac{1}{5}(200) = 40$$

Si el punto de reorden es de 30 *unidades, se reabastecerá el inventario, cada ciclo, cuando el gasto llegue a ese punto. Si la demanda en el plazo de entrega, durante un ciclo, es de 20 o30 unidades, no se presentará déficit. En las restantes situaciones habrá faltantes, esto es,* 10, 20 *ó* 30 *unidades faltantes, de ahí que la cantidad esperada de unidades faltantes, por ciclo, es*

$$\frac{1}{5}(0+0+10+20+30) = \frac{60}{5} = 12$$

El número promedio de pedidos, dado que la demanda se cumple a la larga y el $EOQ = 100$, es

$$\frac{E(D)}{q} = \frac{1000}{100} = 10$$

Entonces, el promedio de faltantes en el periodo es

$$12(10) = 120$$

unidades. De donde,

$$1000 - 120 = 880$$

es la cantidad de unidades cumplidas a tiempo, cada año. Por lo que

$$SLM_1 = \frac{880}{1000} = 0{,}88$$

esto es, se cumple la demanda en un 88%. *Aunque el punto de reorden es menor que la demanda media, de* 40 *unidades, durante el plazo de entrega, se obtuvo un nivel de servicio relativamente alto; como consecuencia de que el agotamiento de las existencias sólo se presenta durante el plazo de entrega, el cual cual es una parte pequeña de cada ciclo.*
Para determinar a SLM_2*, con un punto de reorden de* 30 *unidades, nótese que el agotamiento puede ocurrir en cualquier ciclo en el cual la demanda en el plazo de entrega exceda ese valor, de ahí que, la probabilidad de que se agoten las existencias durante un ciclo es*

$$P(X = 40) + P(X = 50) + P(X = 60) = \frac{3}{5}$$

Como hay en promedio 10 ciclos por año, el número esperado de ciclos por año, en el que se tendrá déficit es

$$10\left(\frac{3}{5}\right) = 6$$

Por lo tanto, un punto de reorden de 30 *unidades genera una* $SLM_2 = 6$ *agotamientos de existencias al año.*

El problema inverso, al planteado en el ejemplo anterior, trata de determinar el punto de reorden y el stock de seguridad para un nivel de servicio deseado.

13. Estrategia de revisión periódica (R,S)

[10]

Definition 24 *Nivel de inventario en pedido es la suma del inventario disponible y del inventario pedido.*

13.1. Funcionamiento de la estrategia de inventario (R, S)

Cada R unidades de tiempo (años), se revisa el inventario disponible y se hace un pedido para llevar el nivel del inventario en pedido hasta S.

Example 25 *La estrategia* $(0{,}25, 100)$*, significa hacer una revisión del inventario al final de 0.25 años (al final de cada trimestre).Si la existencia fuera* $i < 100$*, entonces el tamaño del pedido será de* $100 - i$ *unidades.*

En general, una estrategia (R, S) generará costos más altos que la estrategia (r, q), que minimiza costos, pero una estrategia (R, S) es más fácil de administrar que una estrategia de revisión continua.
Con una estrategia (R, S) es posible determinar con certeza las veces que se hace un pedido, permite también, coordinar el abastecimiento.

Example 26 *Revisar cada* $R = 1$ *mes, todos los productos de un mismo proveedor y luego pedir todos los productos de ese proveedor, el primer día de cada mes.*

Bajo los supuestos:

1. R se determinó, el valor de S que minimizará los costos anuales esperados, se calcula como sigue.
2. Los faltantes se acumulan
3. La demanda es una variable continua cuya distribución permanece sin cambio en el tiempo

[10]Winston, p. 907

4. El precio unitario de adquisición es constante

5. Los costos anuales de compra no dependen de la elección de R y S

Definimos las siguientes variables

R : tiempo en años, entre revisiones
D : demanda (aleatoria) durante un periodo (año)
$E(D)$: demanda media durante un periodo (año)
K : costo por hacer un pedido
J : costo por revisar el nivel de inventario
h : costo unitario anual por mantener en inventario
c_B : costo generado por cada unidad faltante, en el caso de acumulación de pedidos suponemos que es independiente del tiempo de entrega
L : plazo de entrega de cada pedido (suponemos conocido y constante)
D_{L+R} : demanda aleatoria durante el periodo $L+R$
$E(D_{L+R})$: media de D_{L+R}
$\sigma_{D_{L+R}}$: desviación estándar de D_{L+R}

Dado un valor de R, es posible determinar un valor de S que minimice los costos anuales esperados:

$$\begin{aligned}&\text{costos anuales esperados de compra} + \text{costos anuales de revisión}\\&+\text{costos anuales por hace pedidos} + \text{costos anuales esperados por}\\&\text{mantener una unidad} + \text{costos anuales esperados por faltantes}\end{aligned}$$

Dado que, el número de revisiones al año es

$$\frac{1}{R}$$

los costos anuales por revisión son

$$\frac{J}{R}$$

Si S es el nivel del inventario en pedido, $D_{L+R} = 0$, significa que no se hace pedido en el correspondientes punto de revisión.

Pero, D_{L+R} es una variable aleatoria continua, con $P(D_{L+R} = 0) = 0$. De ahí que, se hace un pedido en el próximo punto de revisión o en cualquier punto de revisión.

El costo anual por hacer pedidos es

$$\frac{K}{R}$$

Los dos costos anteriores, son independientes de S, de ahí que el valor de S que miminiza los costos anuales esperados será el valor de S que minimiza a la suma

$$(\text{costos anuales esperados por mantener}) + (\text{costos anuales esperados por faltantes})$$

Definition 27 *Un ciclo es el intervalo de tiempo entre llegadas consecutivas de dos pedidos.*

Cuando es posible determinar el valor esperado del nivel promedio del inventario en un ciclo, entonces el costo anual esperado por mantener una unidad de inventario es justamente

$$h \times (\text{valor esperado del nivel del inventario disponible en el ciclo})$$

Suponiendo que la cantidad promedio de pedidos pendientes es pequeña en relación con el nivel promedio de inventario disponible, entonces

$$\text{valor esperado de } I(t) \simeq \text{valor esperado de } OHI(t)$$

donde $OHI(t)$ es el inventario disponible (existencias) en el tiempo t. Luego el valor esperado de $I(t)$ en un ciclo se aproxima mediante

$$\begin{gathered} 0{,}5 \left(\text{valor esperado de } I(t) \text{ justo antes de que llegue un pedido}\right) + \\ 0{,}5 \left(\text{valor esperado de } I(t) \text{ justo después de la llegada del pedido}\right) \end{gathered}$$

Justo antes de que llegue un pedido, el nivel del inventario máximo en pedido S se ha reducido por un promedio de $E(D_{L+R})$. Por tanto, el valor esperado de $I(t)$ justo antes de que llegue el pedido es

$$S - E(D_{L+R})$$

Como se hacen $\frac{1}{R}$ pedidos y se tiene que pedir cada año un promedio de $E(D)$ unidades, el tamaño promedio de un pedido es

$$\frac{E(D)}{R}$$

Así que, el valor esperado de $I(t)$ justo después de que llega un pedido es

$$S - E(D_{L+R}) + E(D)R$$

Por lo tanto,

$$\text{valor esperado de } I(t) \text{ en un ciclo} = S - E(D_{L+R}) + \frac{E(D)R}{2}$$

Luego,

$$\text{costo unitario\_anual, esperado, por mantener } = h\left[S - E(D_{L+R}) + \frac{E(D)R}{2}\right]$$

Usando la expresión anterior, se concluye que, al incrementar S hasta $S+\Delta$, los costos unitarios anuales esperados por mantener aumentarán en $h\Delta$.

Ahora, se analiza el modo como un incremento desde S hasta $S+\Delta$, afecta los costos anuales esperados por déficit o faltantes. La suma de todos los faltantes será igual a la suma de los faltantes asociados con todos los pedidos. Además, la recibir un pedido el nivel se eleva hasta S, de modo que si hay faltantes, la magnitud es

$$D_{L+R} - S$$

De un análisis marginal, se halla el valor de S que minimiza la suma de los costos anuales esperados por mantener y por faltantes. Al aumentar S hasta $S+\Delta$,para un R fijo, los faltantes esperados se reducirán

$$\left(\frac{1}{R}\right)c_B \Delta P(D_{L+R} \geq S)$$

De ahi que, el costo anual esperado por faltantes satisface

$$\begin{aligned} h\Delta &= \left(\frac{1}{R}\right)c_B \Delta P(D_{L+R} \geq S) \\ P(D_{L+R} \geq S) &= \frac{Rh}{c_B} \end{aligned}$$

En el caso de que se acumulen los pedidos.

En el caso en que se pierdan los pedidos, el valor de S que minimiza la suma del costo anual esperado por mantener un producto y el costo anual esperado por faltante, que genera una pérdida, se obtiene de

$$P(D_{L+R} \geq S) = \frac{Rh}{Rh + c_{LS}}$$

Example 28 *Una empresa abastece su stock de un producto, tres veces al año. Cada pedido tarda en llegar* $\frac{1}{9}$ *año. La demanda anual de ese producto se comporta como*

$$N(990, 40)$$

El costo anual por mantener una unidad de inventario es de 100 *U.M. Si se acumulan los faltantes, a un costo unitario de* 150 *U.M. ¿Cuál es el inventario en pedido óptimo?*

Solution 29 *Del enunciado anterior se desprende la siguiente formulación*

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{3}\ \textit{año} \\
L &= \frac{1}{9}\ \textit{año} \\
R+L &= \frac{4}{9}\ \textit{año} \\
h &= 100\ \textit{U.M.} \\
c_B &= 150\ \textit{U.M.} \\
& \ D \textit{ sigue una distribución } N(990, 40) \\
D_{L+R} \textit{ sigue una distribución } N\left(\frac{4}{9}990, \sqrt{\frac{4}{9}}40\right) &= N(440, 26{,}6667)
\end{aligned}$$

Entonces, S se calcula de

$$\begin{aligned}
P(D_{L+R} \geq S) &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)100}{150} \\
P(D_{L+R} \geq S) &= 0{,}22 \\
S &= NORMINV(0{,}78, 440, 26{,}6667) \\
S &= 460{,}59
\end{aligned}$$

Lo que significa que, al hacer un pedido se debe lleval el nivel en pedido a $S = 461$, así que el pedido será la diferencia entre S y las existencias, al momento de hacer la revisión.

La determinación de R, se fija a menudo como

$$\frac{EOQ}{E(D)}$$

si se usa el modelo simple, para determinar el tamaño del pedido. Pero, cada pedido está acompañado por una revisión, aun costo unitario J, el costo por hacer un pedido es $K+J$, de ahí que

$$EOQ = \sqrt{\frac{2(K+J)E(D)}{h}}$$

En el ejemplo anterior, si $J = 500$ U.M. y $K = 5000$ U.M., entonces

$$\begin{aligned}
EOQ &= \sqrt{\frac{2(5500)(990)}{100}} \\
EOQ &= 330
\end{aligned}$$

Dando un intervalo de revisión

$$R = \frac{330}{990} = \frac{1}{3}\ \text{año}$$

14. Modelos de simulación de inventarios

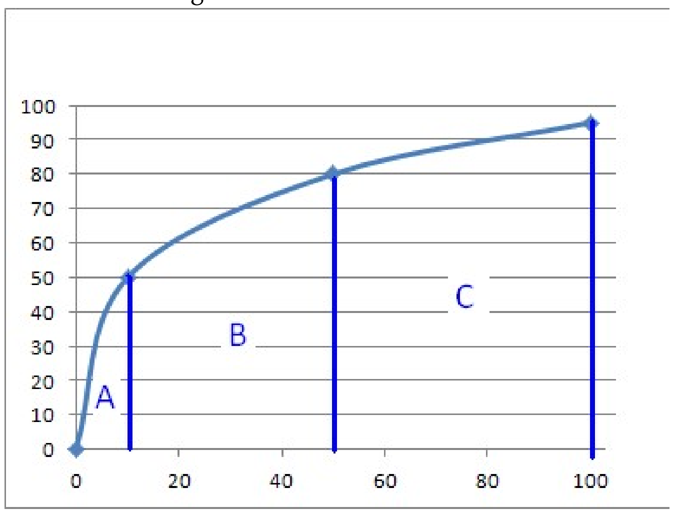
La gestión de inventario debe lidiar con el agotamiento aleatorio o los tiempos de uso y los tiempos de entrega aleatorios, los cuales se manejan fácilmente con simulación. Para modelar un sistema de control de inventario, solo es necesario definir el patrón de uso, el patrón de demanda y las políticas de uso (prioridades de ciertas demandas, compromiso en lote o incremental de inventarios, etc.). La tasa de demanda se puede modelar utilizando distribuciones y un comando ORDER que puede generar un inventario adicional cuando cae por debajo de un nivel particular.

Un modelo de simulación de un sistema de inventarios es útil para comparar diversas alternativas de políticas de pedidos.

Parte IV
MODELOS CON VARIOS ARTÍCULOS

15. Clasificación ABC

Figura 30: Clasificación ABC



Example 30 *Una empresa manufacturera tiene en existencia 10 artículos, registrados con los códigos A1, A2,..,A10. En la tabla se indica el costo unitario y la demanda anual de cada uno.*

Artículo	*Costo* *Costo unitario (U.M.)*	*Demanda* *Costo anual*
A_1	0,05	2,500
A_2	0,20	1,500
A_3	0,10	6,700
A_4	0,15	120,000
A_5	0,75	50,000
A_6	0,35	3,500
A_7	0,45	20,000
A_8	0,95	8,500
A_{91}	0,10	6,500
A_{10}	0,60	80,000

Elabore un análisis ABC a esta situación de inventarios. Indique una política óptima para los artículos en la categoría A y B.

Example 31 *Una muestra de 10 artículos se ha tomado de un inventario de 40,000 artículos (diez es una muestra demasiado pequeña, pero se mantiene la media aritmética simple). La venta de los artículos en dólares es: 350, 600,120, 30, 175, 1100, 5, 50, 200, 90.*

1. *Representar gráficamente los datos ordenados en una curva ABC.*
2. *b. Basado en la muestra. ¿Cuál es el porcentaje total vendido para el inventario de 40,000 artículos que estarían representados por los primeros 4000 artículos?*
3. *¿Cuál es el porcentaje de artículos que representa el primer 25% de lo vendido?*
4. *Suponga que la administración desea que los artículos A representen el primer 50% de las ventas, el último 50% de las ventas están representadas por los artículos C, y en medio se encuentran los artículos B. ¿Cuál es la tasa de venta en dólares que se usa para representar los rangos de A, B y C?*

16. Modelos con ordenación coordinada. Políticas de pedido de potencia de dos

[11]

Suponga que una empresa ordena tres artículos o productos y las correspondientes *EOQ*, para cada artículo producen tiempos entre pedidos de 3,5, 5,6 y 9,2 días. Por lo que rara vez los pedidos para diferentes artículos llegarían en un mismo día. La sincronización o coordinación de los intervalos de reabastecimiento, de modo que se reciban en un mismo día, puede reducir los costos de coordinación. Por ejemplo, se necesitarían menos camiones para entregar los pedidos, si se logra sincronizar su llegada.

Del artículo *98 % Effective Integer Rate Lot-Sizing for One-Warehouse Multi-Retailer Systems* se tomó el diseñó del M

Sea

$$Q^* = EOQ$$

entonces el intervalo de reabastecimiento óptimo para un producto es

$$t^* = \frac{Q^*}{D}$$

por lo menos es de un día. Entonces para algún entero $m \geq 0$, se cumple

$$2^m \leq t^* \leq 2^{m+1}$$

Si

$$t^* \leq 2^{m+0,5} = \sqrt{2}2^m$$

se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^m.

Si

$$t^* \geq \sqrt{2}2^m$$

se elige una cantidad de reabastecimiento que corresponde a un intervalo de reabastecimiento de 2^{m+1}. Roundy demostró que el uso de este método para redondear el intervalo de reabastecimiento a una potencia cercana a 2, incrementa, el total de los costos, a lo más en 6 %.

La ventaja de una política de potencia de dos es que artículos diferentes frecuentemente llegan al mismo tiempo, con lo que generalmente se reducen los costos de coordinación.

Para los tiempos entre pedidos de 3.5, 5.6 y 9.2 días, la política de potencia de dos de Roundy, eligiría pedir las cantidades óptimas a periodos de reabastecimiento de 4, 4 y 8 días, ya que

$$\begin{aligned} 2 &\leq 3,5 \leq 2^2 \\ 2^2 &\leq 5,6 \leq 2^3 \\ 2^3 &\leq 9,2 \leq 2^4 \end{aligned}$$

Así, los artículos 1 y 2 llegarían siempre juntos, la mitad del tiempo el artículo 3 llegaría junto con el 2. En la mayoría de los casos, esta política reduciría los costos de coordinación por más del incremento máximo posible del 6 %, en el costo total. Este hecho se enuncia y demuestra en el siguiente teorema.

Remark 32 *Recordemos que el costo total expresado como una función de la cantidad a ordenar q es*

$$TC(q) = \frac{KD}{q} + \frac{hq}{2}$$

[11] Winston, p. 857-858

entonces, la proporción de este costo con el óptimo es

$$
\begin{aligned}
\frac{TC(q)}{TC(q^*)} &= \frac{\frac{KD}{q}+\frac{hq}{2}}{\sqrt{2KhD}} \\
&= \frac{1}{q}\sqrt{\frac{K^2D^2}{2KhD}}+\frac{q}{2}\sqrt{\frac{h^2}{2KhD}} \\
&= \frac{1}{2q}\sqrt{\frac{2KD}{h}}+\frac{q}{2}\sqrt{\frac{h}{2KD}} \\
&= \frac{q^*}{2q}+\frac{q}{2q^*} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{q^*}{q}+\frac{q}{q^*}\right)
\end{aligned}
$$

Pero

$$
\begin{aligned}
t^* &= \frac{q^*}{D} \\
t &= \frac{q}{D}
\end{aligned}
$$

así que

$$\frac{TC(q)}{TC(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{t}+\frac{t}{t^*}\right)$$

Theorem 33 *Si $t^* \le 2^m\left(\sqrt{2}\right)$, entonces la política de pedidos de costo mínimo de potencia de dos es*

$$t = 2^m$$

Si $t^* \ge 2^m\left(\sqrt{2}\right)$, entonces la política de pedido de costo mínimo de potencia de dos es

$$2^{m+1}$$

En cualquier caso, el costo total de la política de pedidos óptima de potencia de dos nunca será más de 6% mayor que el costo total de la EOQ.

Proof 34

$$TC'(q) = 2\frac{KD}{q^3}+\frac{1}{2}>0$$

la función de costo total es convexa, de ahí que, el intervalo de tiempo de reabastecimiento óptimo de potencia de dos es 2^m o 2^{m+1}. Usando la expresión

$$\frac{TC(q)}{TC(q^*)} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{t}+\frac{t}{t^*}\right)$$

tenemos que, 2^m será el intervalo de tiempo de reabastecimiento ótimo de potencia de dos si y sólo si

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{2^m}+\frac{2^m}{t^*}\right) \le \frac{1}{2}\left(\frac{t^*}{2^{m+1}}+\frac{2^{m+1}}{t^*}\right)$$

Pero esta desigualdad se cumplirá, si y sólo si

$$\frac{t^*}{2^{m+1}} \le \frac{2^m}{t^*}$$

o

$$t^* \le \left(\sqrt{2}\right)2^m$$

En resumen, se ha demostrado que si $t^* \le \left(\sqrt{2}\right)2^m$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es establecer $t = 2^m$.

Similarmente, si $t^* \ge \left(\sqrt{2}\right)2^m$, entonces la política de pedidos de potencia de dos de costo mínimo es establecer $t = 2^{m+1}$.

Este resultado muestra que la política de pedidos óptima de potencia de dos debe elegir un tiempo de reabastecimiento en el intervalo. Nótese que el extremo izquierdo del intervalo se obtiene de lo siguiente:

$$\begin{aligned} t^{*} &\leq \left(\sqrt{2}\right)2^{m} && (48) \\ \frac{t^{*}}{\sqrt{2}} &\leq 2^{m} && (49) \end{aligned}$$

El extremo derecho se calcula

$$\begin{aligned} t^{*} &\geq \left(\sqrt{2}\right)2^{m} && (50) \\ 2t^{*} &\geq \left(\sqrt{2}\right)2^{m+1} && (51) \\ \frac{2t^{*}}{\sqrt{2}} &\geq 2^{m+1} && (52) \\ \sqrt{2}t^{*} &\geq 2^{m+1} && (53) \end{aligned}$$

$$\left[\frac{t^{*}}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}t^{*}\right]$$

Para encontrar la discrepancia máxima entre el costo total para la política de pedidos de potencia de dos y el costo total para t^{*}, usamos la expresión

$$\frac{TC(q)}{TC(q^{*})} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{*}}{t} + \frac{t}{t^{*}}\right)$$

cuando el intervalo de reabastecimiento de potencia de dos es $\frac{t^{*}}{\sqrt{2}}$ o $\sqrt{2}t^{*}$.

$$\frac{TC\left(\frac{t^{*}}{\sqrt{2}} \text{ o } \sqrt{2}t^{*}\right)}{TC(t^{*})} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{2} \simeq 1{,}060660172$$

De donde, una política de potencia de dos no puede causar un incremento en el costo total de más del 6 %.

Parte V

Anexo

17. Análisis de optimalidad

17.1. Problemas con restricciones de igualdad

En estos problemas la región factible es el conjunto de soluciones del sistema constituido por el conjunto de restricciones. Aunque este tipo de problemas se considera poco realista, su estudio es importante en distintas áreas de conocimiento, como economía y estadística entre otras disciplinas.

El método de solución denominado sustitución, ilustra el porqué cada restricción en el problema, reduce un grado la libertad en la elección de los valores de las variables de decisión.

Planteamiento y resolución por sustitución La formulación general de un problema de programación no lineal con restricciones de igualdad es

$$\begin{aligned} \textit{llOptimizar}: \quad & f(x) && (54) \\ \textit{Sujeta a:} \quad & g_{1}(x) = 0 && (55) \\ & \vdots && (56) \\ & g_{m}(x) = 0 && (57) \end{aligned}$$

con $m < n$, donde

$$f : E^n \to \mathfrak{Re} \tag{58}$$

$$g_i : E^n \to \mathfrak{Re} \tag{59}$$

para toda $i = 1, \ldots, m$.

Example 35 *Resolver el siguiente problema por el método de sustitución*

Maximizar: $f(x) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3$

Sujeta a: $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

$2x_2 + x_3 = 0$

Solution 36 *Es fácil expresar el sistema de restricciones por un sistema equivalente en términos de x_2.*

$$x_1 = -4x_2 \tag{60}$$

$$x_3 = -2x_2 \tag{61}$$

asi, el problema se convierte en un problema con una sola variable de decisión:

Maximizar: $f(x) = -(-4x_2)^2 + x_2^2 + (-2x_2) = -15x_2^2 - 2x_2$

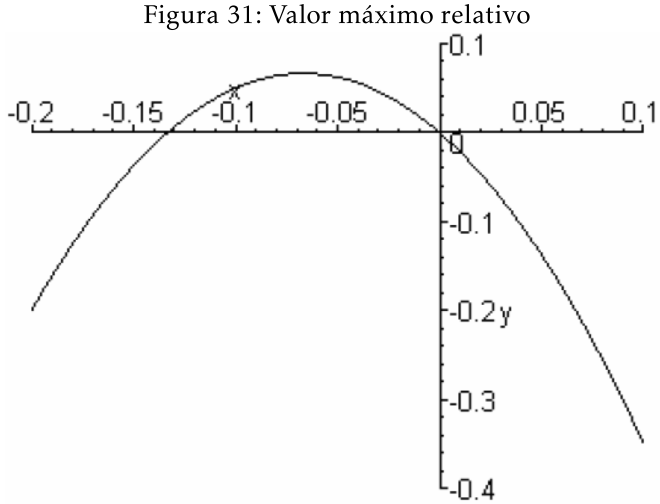
$x_2 \in \mathfrak{Re}$

El único punto crítico de la función objetivo modificada es

$$x_2 = -\frac{1}{15}$$

que corresponde a un máximo, porque la segunda derivada es negativa.

Figura 31: Valor máximo relativo



La solución óptima del problema original es

$$\left(\frac{4}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

El valor óptimo de la función objetivo es $\frac{1}{15}$

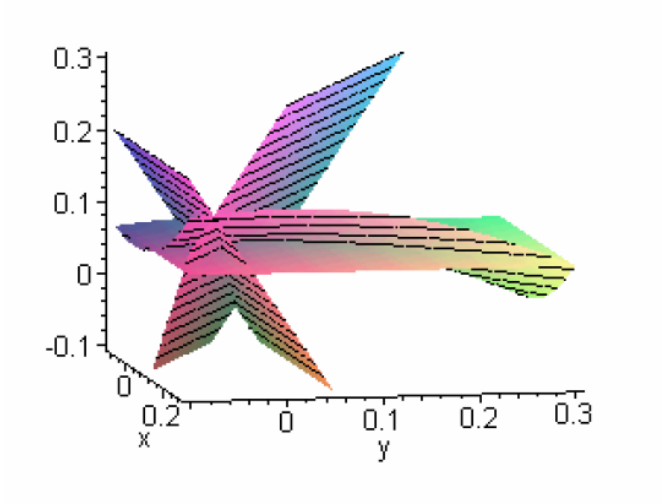
El método de sustitución consiste en expresar m de las variables de decisión en función de las $n - m$ variables restantes, cuando el sistema de restricciones lo permite, de modo que el problema generado por esa sustitución es un problema no restringido.

Si el sistema de restricciones

$$g_i(x) = 0$$

con $i = 1, \ldots, m$, permite expresar a

Figura 32: Valor óptimo de la función objetivo



$x_1 = h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n)$
$\vdots$
$x_m = h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)$

entonces el problema de programación restringido se trasforma en

Figura 33: Problema transformado

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar:} & f\left(h_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_{m+1}, \ldots, x_n)\right) \\ & (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in E^{n-m} \end{array}$$

La solución óptima del problema trasformado

$$x^* = (x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n)$$

da lugar a la solución óptima del problema original,

$$x^* = \left(h_1(x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n), \ldots, h_m(x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n), x^*_{m+1}, \ldots, x^*_n\right)$$

Definition 37 *La función Lagrangiana asociada al problema de PNL*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar:} & f(x) \\ \textit{Sujeta a:} & g_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{array}$$

con $m < n$ y $f, g_1, \ldots, g_n$ funciones reales de clase C^1 en E^n, para toda $i = 1, \ldots, m$, es la función de $n+m$ variables

$$mathit\lambda(\lambda, x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

donde

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

y

$$g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))$$

Definition 38 *Los puntos estacionarios x^* del problema de PNL, con multiplicadores de Lagrange asociados λ^*, son las soluciones del sistema*

$$\nabla(\lambda^*, x^*) = 0$$

Remark 39 *Los puntos estacionarios del problema de PNL tienen asociado un vector $\lambda^* \in E^m$, cuyas componentes, tantas como restricciones, se denominan multiplicadores de Lagrange.*

En la solución óptima, el inverso aditivo de cada multiplicador mide la variación aproximada del valor óptimo de la función objetivo ante una pequeña modificación del término independiente de la restricción asociada a dicho multiplicador.

El método de sustitución no siempre es aplicable, por ello se usan las condiciones necesarias de primer orden de Lagrange, con funciones diferenciables, que permiten encontrar los puntos estacionarios entre los que se encuentran los posibles óptimos.

Una vez determinados los posibles óptimos, se utilizan las condiciones de segundo orden, expresadas en términos del hessiano de la función Lagrangiana. Este método sólo permite encontrar óptimos locales, pero si el problema es convexo entonces los óptimos locales serán globales, en ese caso las condiciones necesarias de primer orden son condiciones suficientes.

Definition 40 *El problema de programación no lineal (PNL) a resolver*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar:} & f(x) \\ \textit{Sujeta a:} & x \in \Omega \subset E^n \end{array}$$

es convexo para mínimo, si Ω es convexa y f es una función convexa en Ω.

Definition 41 *El problema no lineal anterior es convexo para máximo si Ω es convexa y f es una función cóncava en Ω.*

17.1.1. Condiciones necesarias de primer orden de óptimo local

Proposition 42 *Condición necesaria de Lagrange. Sea D un subconjunto abierto de E^n. Consideremos el siguiente problema de Programación No Lineal (PNL), con restricciones de igualdad*

$$\begin{array}{ll} \textit{Optimizar:} & f(x) \\ \textit{Sujeta a:} & g_1(x) = 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x) = 0 \end{array}$$

con $m < n$, donde $f, g_1, \dots, g_n$ son funciones reales de clase C^1 en D, para toda $i = 1, \dots, m$.
Además, sea

$$B = \{x \in D | g_i(x) = 0,\ i = 1, \dots, m\}$$

el conjunto de soluciones factibles.
Entonces, se verifica que si x^* es un óptimo local del problema del PNL tal que la matriz jacobiana de

$$g = (g_1, \dots, g_m)$$

evaluada en x^*,

$$Jg(x^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

de dimensión $m \times n$, tiene un menor de orden m distinto de cero, lo que significa que

$$\det(Jg(x^*)_m) \neq 0$$

existen m número reales

$$\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$$

que son solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \textit{(II)}$$

Definition 43 *Las soluciones factibles del problema (I), que son soluciones del sistema de ecuaciones (II), se denominan puntos estacionarios del problema.*

Definition 44 *Los m números reales*

$$\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*$$

que se obtienen al resolver el sistema (II), se conocen como los multiplicadores de Lagrange asociados a las m restricciones (de igualdad), en el punto x^*.

Definition 45 *Dado el problema de PNL con restricciones de igualdad de la proposición anterior, se dice que en la solución factible x^*, se verifica la condición de regularidad o la restricción de cualificación, si*

$$\det(Jg(x^*)_m) \neq 0$$

es decir, si los vectores

$$\nabla g_1(x^*), \ldots, \nabla g_m(x^*)$$

son linealmente independientes.

Proposition 46 *Bajo las hipótesis de la condición necesaria de Lagrange, se verifica que todo punto crítico*

$$(\lambda^*, x^*)$$

de la función Lagrangiana asociada al problema de PNL (con restricciones de igualdad), es un punto estacionario x^* de ese problema, con multiplicadores de Lagrange asociados λ^*.

Example 47 *Considere el problema*
Minimizar: $f(x) = x_1^2 + 2x_2$
Sujeta a: $x_1 + x_2 = 1$

Encuentre los multiplicadores de Lagrange asociados a la restricción, resuelva e interprete geométricamente la respuesta.

Solution 48 *El conjunto de soluciones factibles es*

$$B = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 1\}$$

la recta con pendiente -1 y ordenada al origen 1.
Las curvas de nivel de la función objetivo, son parábolas de la forma

$$x_1^2 + 2x_2 = k$$

con multiplicadores de Lagrange λ_* asociados al problema de PNL restringido por igualdad son soluciones del sistema

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0 \tag{62}$$

$$(2x_1, 2) + \lambda_1^*(1, 1) = 0 \tag{63}$$

lo que equivale simplemente a

$$2x_1 + \lambda_1^* = 0 \tag{64}$$

$$2 + \lambda_1^* = 0 \tag{65}$$

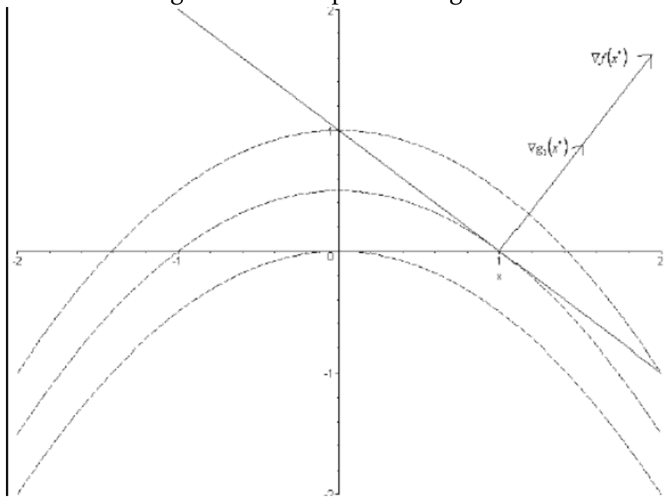
El multiplicador de Lagrange asociado es $\lambda_1^* = -2$. La solución óptima se obtiene de la condición de ser solución factible y de la proporción entre las componentes de los vectores gradientes

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{66}$$

$$\frac{2x_1}{1} = \frac{2}{1} \tag{67}$$

Por lo que, la función objetivo se minimiza en $x^* = (1, 0)$ y el valor mínimo es $f(x^*) = 1$.

Figura 34: Interpretación gráfica



Remark 49 *Es importante resaltar el significado de la expresión*

$$(2x_1, 2) + \lambda_1^* (1, 1) = 0$$

cuando se reescribe como

$$(2x_1, 2) = -\lambda_1^* (1, 1)$$

que nos dice que el vector $(2x_1, 2)$ *está en la dirección del vector* $(1, 1)$ *y que las coordenadas son proporcionales con factor de proporcionalidad* $-\lambda_1^* = 2$.

Exercise 50 *Resuelva gráficamente el siguiente problema y muestre que no se cumplen las condiciones de Lagrange de primer orden.*

Minimizar: $f(x) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2$
Sujeta a: $x_1^2 + x_2^2 = 1$
$x_2 = 1$

Exercise 51 *Use las condiciones necesarias de primer orden para determinar los candidatos a ser óptimos locales, del problema de PNL siguiente. Además, interprete geométricamente su respuesta.*

Optimizar: $f(x) = x_1 + x_2$
Sujeta a: $x_1^2 + x_2^2 = 1$

17.1.2. Condiciones necesarias y suficientes de segundo orden

Definition 52 *Dado el siguiente problema de PNL*

Optimizar: $f(x)$
Sujeta a: $g_1(x) = 0$ *(I)*

$\vdots$

$g_m(x) = 0$

con $m < n$*, donde* f*,* $g_1, \ldots, g_n$ *son funciones de clase* C^2 *en* E^n*, se define el hessiano orlado asociado al problema anterior, como el hessiano de su función Lagrangiana, es decir*

Figura 35: Lagrangeano

$$\nabla^2(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & & \vdots & Jg(x) \\ 0 & \cdots & 0 & \\ & Jg(x)^T & & \nabla_x^2(\lambda, x) \end{bmatrix}$$

siendo la Matriz Jacobiana de orden $m \times n$ *con* $g = (g_1, \ldots, g_m)$ *y*

$$\nabla_x^2(\lambda, x) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x) \tag{68}$$

Proposition 53 *Condiciones necesarias de Lagrange de segundo orden. Consideremos el problema (I), con* $m < n$*,* f*,* $g_1, \ldots, g_n$ *funciones de clase* C^2 *en D, un subconjunto abierto de* E^n *y*

$$B = \{x \in E^n | g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\} \subset D$$

Si $x^* \in B$*, es un punto estacionario del problema I, con multiplicadores de Lagrange asociados*

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$$

y

$$M(x^*) = \{p \in E^n | Jg(x^*) p = 0\}$$

entonces
(1) Si x^* *es un mínimo local de (I), la forma cuadrática siguiente, es no negativa*

$$p^T \nabla_x^2(\lambda^*, x^*) p \geq 0$$

para todo $p \in M(x^*)$*, con* $p \neq 0$*.*
(2) Si x^* *es un máximo local de (I), la forma cuadrática, es no positiva*

$$p^T \nabla_x^2(\lambda^*, x^*) p \leq 0$$

para todo $p \in M(x^*)$*, con* $p \neq 0$*.*

Example 54 *Clasificar los puntos estacionarios del siguiente problema, usando las condiciones necesarias de Lagrange de segundo orden.*

$$\text{ccMinimizar:} \quad x_3 \tag{69}$$
$$\text{Sujeta a:} \quad x_1^2 + x_2^2 = 4 \tag{70}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \tag{71}$$

Solution 55 *Las funciones reales*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_3 \tag{72}$$
$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \tag{73}$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 - 5 \tag{74}$$
$$\tag{75}$$

evaluadas en E^n, son de clase C^2. Para determinar los puntos estacionarios del problema de PNL, los cuales deben ser soluciones factibles, resolvemos el sistema

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \tag{76}$$
$$g_1(x) = 0 \tag{77}$$
$$\vdots \tag{78}$$
$$g_m(x) = 0 \tag{79}$$

En este caso, se trata del sistema

$$[0,0,1] + \lambda_1 [2x_1, 2x_2, 0] + \lambda_2 [1,1,1] = 0 \tag{80}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \tag{81}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \tag{82}$$

Que equivale al sistema

$$2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 = 0 \tag{83}$$
$$2\lambda_1 x_2 + \lambda_2 = 0 \tag{84}$$
$$\lambda_2 + 1 = 0 \tag{85}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \tag{86}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \tag{87}$$

Claramente se tiene

$$\lambda_2 = -1$$

Así, el sistema se reduce a

$$2\lambda_1 x_1 - 1 = 0 \tag{88}$$
$$2\lambda_1 x_2 - 1 = 0 \tag{89}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \tag{90}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \tag{91}$$

Despejando λ_1 de la primera ecuación,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x_1}$$

con $x_1 \neq 0$, sustituímos en la segunda, con lo que obtenemos un sistema con tres ecuaciones y tres desconocidas

$$x_2 - x_1 = 0 \tag{92}$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \tag{93}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - 5 = 0 \tag{94}$$

De nuevo, con la primera ecuación podemos reducir el número de variables y de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - 4 &= 0 && (95)\\ 2x_1 + x_3 - 5 &= 0 && (96)\end{aligned}$$

De la primera ecuaciones concluimos

$$\begin{aligned} x_1 &= \pm\sqrt{2} && (97)\\ x_2 &= \pm\sqrt{2} && (98)\end{aligned}$$

y

$$x_3 = 5 \mp 2\sqrt{2}$$

Entonces, se tienen dos puntos estacionarios con sus respectivos multiplicadores de Lagrange, como se muestra en la tabla

$$\begin{aligned} cccx_1^* &= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2}\right) \quad \lambda_1^* = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \lambda_2^* = -1 && (99)\\ x_2^* &= \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}\right) \quad \lambda_1^* = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \lambda_2^* = -1 && (100)\end{aligned}$$

Para clasificarlos, calculemos primero la matriz hessiana

$$\nabla^2(\lambda, x) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 g_i(x) \qquad (101)$$

$$(102)$$

Figura 36: Para clasificarlos

$$\begin{aligned}\nabla_x^2(\lambda, x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Evaluando en el primer punto estacionario, $x_1^* = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2}\right)$, con multiplicador $\lambda_1^* = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, se obtiene

$$\nabla_x^2(\lambda^*, x_1^*) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Expresamos

$$M(x_1^*) = \left\{p \in E^3 | Jg(x_1^*)p = 0\right\} = \left\{p \in E^3 | p_1 + p_2 = 0, p_3 = 0\right\}$$

con $p = (p_1, -p_{1,} 0) \in M\left(x_1^*\right)$, porque

$$Jg(x_1^*)p = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1\\ -p_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}p_1 - 2\sqrt{2}p_1\\ p_1 - p_1\end{bmatrix} = 0$$

Entonces, en $x_1^* = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 5 - 2\sqrt{2}\right)$*, la función objetivo tiene un mínimo local estricto, puesto que la forma cuadrática correspondiente es positiva, es decir*

$$p^T \nabla_x^2 (\lambda^*, x^*) p > 0$$
$$p^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p = \frac{2}{\sqrt{2}} \|p_1\|^2 > 0$$

para todo vector $p \in M\left(x_1^*\right)$*, no nulo.*
En forma análoga, en el segundo punto estacionario factible, $x_2^* = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 5 + 2\sqrt{2}\right)$*, la función objetivo tiene un máximo local estricto, puesto que la forma cuadrática correspondiente es negativa, es decir*

$$p^T \nabla_x^2 (\lambda^*, x^*) p < 0 \tag{103}$$
$$p^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p = -\frac{2}{\sqrt{2}} \|p\|^2 < 0 \tag{104}$$

para todo vector $p \in M\left(x_1^*\right)$*, no nulo.*

Proposition 56 *Condiciones suficientes de Lagrange de segundo orden. Bajo las hipótesis de las condiciones necesarias de Lagrange de segundo orden, si* $x^* \in B$ *es un punto estacionario del problema (I) con multiplicadores de Lagrange asociados*

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$$

y

$$M(x^*) = \{p \in E^n | Jg(x^*) p = 0\}$$

entonces
(1) Si, para todo $p \in M(x^*)$*, con* $p \neq 0$

$$p^T \nabla_x^2 (\lambda^*, x^*) p > 0$$

se verifica que x^* *es un mínimo local estricto del problema (I).*
(2) Si, para todo $p \in M(x^*)$*, con* $p \neq 0$

$$p^T \nabla_x^2 (\lambda^*, x^*) p < 0$$

se verifica que x^* *es un máximo local estricto del problema (I).*

Las condiciones suficientes anteriores, se reformulan en término del hessiano orlado, como sigue.

Proposition 57 *Para el problema de PNL con restricciones de igualdad (I), con* $m < n$ *;* $f, g_1, \ldots, g_n$ *funciones de clase* C^2 *en* $D \subset E^n$ *y soluciones factibles*

$$B = \{x \in E^n | g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m\} \subset D$$

Si una solución factible, $x^* \in B$ *es un punto estacionario del problema (I), con multiplicadores asociados*

$$\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$$

y

$$D_j$$

es el $j-$*ésimo menor principal del hessiano orlado*

$$\nabla^2 (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n)$$

con $j = 1, \ldots, m + n$*, entonces*
(1) Si los menores principales D_j *con* $j = 2m + 1, \ldots, m + n$*, de la matriz*

$$\nabla^2 (\lambda^*, x^*)$$

tienen todos el signo de

$$(-1)^m$$

se verifica que x^* es un mínimo local estricto del problema (I).
(2) Si los menores principales D_j con $j = 2m+1, \ldots, m+n$, de la matriz

$$\nabla^2 (\lambda^*, x^*)$$

tienen signos alternos, siendo el signo de

$$D_{2m+1}$$

el de

$$(-1)^{m+1}$$

se verifica que x^* es un máximo local estricto del problema (I).

17.1.3. Problemas con restricciones de desigualdad

Planteamiento y formulación
Consideremos en esta sección la formulación general siguiente

$$\begin{aligned} ccc\text{Optimizar} \quad & f(x) \quad (P) && (105)\\ \text{Sujeta a} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad con i = 1, \ldots, m && (106)\\ & h_j(x) \geq 0 \quad con j = 1, \ldots, k && (107)\end{aligned}$$

donde las funciones

$$\begin{aligned} f &: E^n \longrightarrow \Re R && (108)\\ g_i &: E^n \longrightarrow \Re R && (109)\\ h_j &: E^n \longrightarrow \Re R && (110)\end{aligned}$$

para toda $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$.
El problema anterior puede reformularse (reducirse) como

Minimizar	$f(x)$		$P(')$
Sujeta a	$l_i(x) \leq 0$	con	$i = 1,.., m+k$

con $l_i : E^n \to \Re R$, para $i = 1, \ldots, m+k$, porque el problema de maximizar $f(x)$, es equivalente a minimizar $-f(x)$ y las restricciones $h_j(x) \geq 0$, con $j = 1, \ldots, k$, se pueden expresar como $-h_j(x) \leq 0$.

Definition 58 *Una solución factible del problema (P), se dice que satura la i-ésima restricción $g_i(x) \leq 0$, si*

$$g_i(x^*) = 0$$

Por el contrario, se dice que no satura la i-ésima restricción $g_i(x) \leq 0$, cuando

$$g_i(x) < 0$$

17.2. Condiciones necesarias de primer orden para óptimo local

Proposition 59 *Condiciones de Fritz-John. Dado el problema*

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimizar:} & f(x) & \\ \textit{Sujeta a:} & g_1(x) \leq 0 & (I) \\ & \vdots & \\ & g_m(x) \leq 0 & \end{array}$$

donde las funciones reales $f, g_1, \ldots, g_m$ están definidas en E^n. Sea x^* un punto de E^n, tal que

$$I = \{i = 1, \ldots, m | g_i(x^*) = 0\}$$

es decir, I es el conjunto de índices de las restricciones que x^* satura. Además, sean f y g_i, $i \in I$, funciones diferenciables en x^*. Entonces, si las restantes restricciones g_i, con $i \notin I$, son continuas en x^*, se verifica que, cuando x^* es una solución factible y óptimo local, del problema (I), existen escalares

$$\lambda_0, \lambda_i \text{ con } i \in I,$$

no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_0, \lambda_i &\geq 0 \text{ para } i \in I \\ g_j(x^*) &\leq 0, \ j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Si adicionalmente, se cumple que g_i es diferenciable en x^*, para $i \notin I$, las condiciones se reformulan como

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) &= 0 \ , \ j = 1, \dots, m \\ \lambda_0, \lambda_j &\geq 0 \ , \ j = 1, \dots, m \\ g_j(x^*) &\leq 0 \ , \ j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

con λ_j, $j = 1, \dots, m$, no todos nulos.

Example 60 *Resolver gráficamente el siguiente programa y comprobar si se verifican las condiciones de Fritz-John, en la solución óptima calculada.*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min:} & (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \textit{Sujeta a:} & x_1^2 - x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solution 61 *El conjunto de soluciones factibles es*

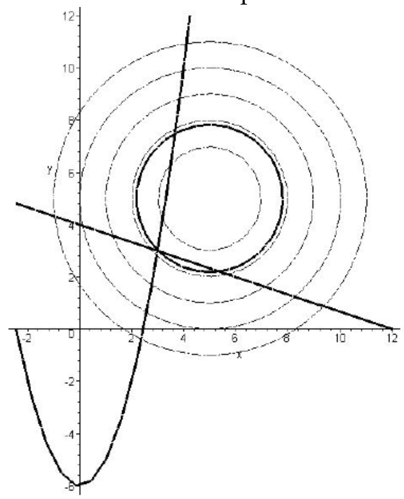
$$B = \left\{ (x_1, x_2) \in E^2 | x_1^2 - x_2 - 6 \leq 0, \ x_1 + 3x_2 - 12 \leq 0, \ -x_1 \leq 0, \ -x_2 \leq 0 \right\}$$

Las curvas de nivel de la función objetivo son circunferencias con centro en $(5, 5)$ y radio igual a la raiz cuadrada del nivel considerado.
La solución gráfica es el punto $x^* = (3, 3)$, el cual se determina algebráicamente mediante la solución de las fronteras de las primeras dos restricciones. El valor óptimo de la función objetivo es 8.

El punto $x^* = (3, 3)$ satura las restricciones $g_1(x) \leq 0$, $g_2(x) \leq 0$ y g_j, $j = 1, 2, 3, 4$ son diferenciables en x^*, las condiciones de Fritz-John nos aseguran la existencia de las escalares $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ mayores o iguales que cero , no todos nulos, tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) &= 0, \ j = 1, \dots, 4 \\ \lambda_0, \lambda_j &\geq 0 \ , j = 1, \dots, 4 \\ g_j(x^*) &\leq 0 \ , \ j = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Figura 37: Curvas de nivel para solución óptima



En efecto, como $I=\{1,2\}$, $\nabla f(x^*)=(-4,-4)$, $\nabla g_1(x^*)=(6,-1)$ y $\nabla g_2(x^*)=(1,3)$, resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned}
\lambda_0(-4,-4)+\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\nabla g_j(x^*) &= \lambda_0(-4,-4)+\lambda_1(6,-1)+\lambda_2(1,3)+\lambda_3(-1,0)+\lambda_4(0,-1)=0\\
\lambda_1 g_1(x^*) &= 0\\
\lambda_2 g_2(x^*) &= 0\\
\lambda_3 g_3(x^*) &= -3\lambda_3=0\Rightarrow\lambda_3=0\\
\lambda_4 g_4(x^*) &= -3\lambda_4=0\Rightarrow\lambda_4=0
\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned}
\lambda_0,\lambda_j &\geq 0\ ,j=1,\ldots,4 &(111)\\
g_j(x^*) &= 0\ ,\ j=1,2 &(112)
\end{aligned}$$

La solución es

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{19}{28}\lambda_2 &(113)\\
\lambda_1 &= \frac{2}{7}\lambda_2 &(114)
\end{aligned}$$

con $\lambda_2\geq 0$.
Una solución particular se obtiene tomando $\lambda_2=7$

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \frac{19}{4} &(115)\\
\lambda_1 &= 2 &(116)
\end{aligned}$$

Example 62 *Comprobar que en el punto $x_0=(0,2)$ se verifican las condiciones de Fritz-John, pero x_0 no es una solución óptima del programa:*

Min: $\quad -(x_1-5)^2-(x_2-2)^2$

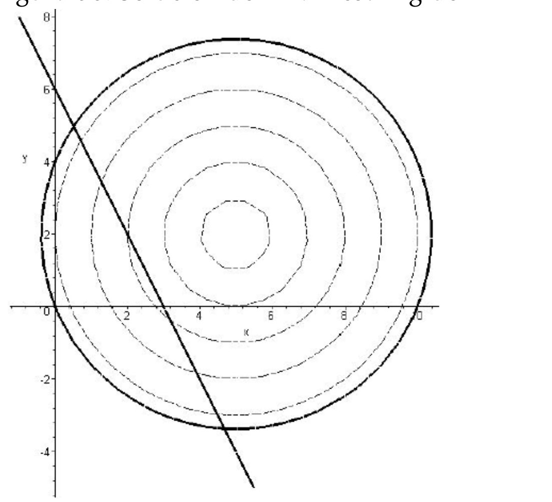
Sujeta a: $\quad 2x_1+x_2\leq 6$

$x_1\geq 0$

$0\leq x_2\leq 5$

Solution 63 *La solución del problema de programación no lineal restringido se obtiene con el punto* $(0,0)$.

Figura 38: Solución del PNL restringido



Con lo que se concluye que el punto $x_0 = (0,2)$, no es un mínimo del problema. Sin embargo, en este último punto $x_0 = (0,2)$, se verifican las condiciones de Fritz-John, pues x_0 satura la segunda restricción

$$g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0$$

y,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) &= (10,0) \\ \nabla g_2(x_0) &= (-1,0) \end{aligned}$$

Entonces existen $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, tales que

$$\begin{aligned} \lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \nabla g_j(x_0) &= \lambda_0 (10,0) + \lambda_2 (-1,0) = 0 \\ \lambda_j g_j(x_0) &= 0 \ , \ j = 1, \ldots, 4 \\ \lambda_j &\geq 0 \ , \ j = 0, \ldots, 4 \end{aligned}$$

De donde se tiene

$$\lambda_2 = 10\lambda_0$$

con λ_0 y λ_2 no negativos.

Remark 64 *Este ejemplo muestra que las condiciones de Fritz-John, son necesarias (pues así se enunciaron en la proposición correspondiente), pero no son suficientes.*

Exercise 65 *Para el siguiente programa y el punto $x^* = (1,0)$, estudiar si en dicho punto, se verifican las condiciones de Fritz-John, calculando los posibles valores de λ_i, $i = 1, \ldots, m$; si es posible, alguna relación entre el hecho de ser el escalar λ_0 nulo o positivo y la dependencia lineal de los vectores gradiente de las funciones que definen las restricciones saturadas en ese punto.*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min:} & -x_1 \\ \textit{Sujeta a:} & x_2 - (1-x_1)^3 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

La independencia lineal de los gradientes de las restricciones, que se saturan para una solución factible, dan lugar a las siguientes condiciones.

17.3. Condiciones necesarias de primer orden para óptimo local

Proposition 66 *Condiciones de Kuhn-Tucker. Dado el problema (I) y una solución factible x^*, que satura a las restricciones con índices en*

$$I = \{i = 1, \ldots, m | g_i(x^*) = 0\}$$

Suponemos, además, que f y g_i, con $i \in I$, son diferenciables, que las restantes g_i, con $i \notin I$, son continuas y que los vectores

$$\nabla g_i(x^*) \text{ , con } i \in I$$

son linealmente independientes. Entonces, si x^*, es un óptimo local del problema (I), existen escalares λ_i, $i \in I$, tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i &\geq 0 \text{ , } i \in I \\ g_j(x^*) &\leq 0 \text{ , } j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Si se supone además, que las funciones g_i son diferenciables en x^* para $i \notin I$, las condiciones de Kuhn-Tucker se reformulan en el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) &= 0, \ j = 1, \ldots, m \\ \lambda_j &\geq 0 \text{ ,} j = 1, \ldots, m \\ g_j(x^*) &\leq 0 \text{ , } j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Si el problema (I) se formula en términos de maximización, con desigualdades $\leq$, entonces las condiciones de Kuhn-Tucker se verificarán si existen escalares $\lambda_j \leq 0$, con $j = 1, \ldots, m$, tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) &= 0, \ j = 1, \ldots, m \\ \lambda_j &\leq 0 \text{ ,} j = 1, \ldots, m \\ g_j(x^*) &\leq 0 \text{ , } j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Summary 67 *Los problemas de optimización (minimización y maximización), pueden formularse con restricciones de la forma*

$$g_i(x^*) \geq 0$$

Lo cual afecta al signo de las escalares λ_j, para $j = 1, \ldots, m$. Esto produce cuatro formulaciones posibles, con los siguientes cambios de signo para dichas escalares:

	min	*max*
$g_i(x^*) \leq 0$	$\lambda_i \geq 0$	$\lambda_i \leq 0$
$g_i(x^*) \geq 0$	$\lambda_i \leq 0$	$lambda_i \geq 0$

con $i = 1, \ldots, m$.

Notation 68 *Los escalares λ_i se denominan multiplicadores de Lagrange.*

Remark 69 *Los multiplicadores de Lagrange asociados a restricciones no saturadas son nulos, mientras que los asociados a restricciones saturadas pueden ser o no, nulos.*

Example 70 *Analizar si se verifican las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker en el punto $x^* = \left(\sqrt{3}, 1\right)$.*

$$\begin{array}{ll} \textit{Min:} & -2x_1 - x_2 \\ \textit{Sujeta a:} & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\ & x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array}$$

Exercise 71 *Analizar si se verifican las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker en los puntos* $x^* = (-5, -2)$ *y* $x_0 = (0, 3)$.

Min:	$2x_1 + x_2$
Sujeta a:	$x_1 + x_2 \leq 3$
	$x_1^2 - x_2 - 2 \leq 0$
	$-x_1 + x_2 \leq 3$
	$x_1 \leq 2$
	$x_2 \geq -2$

Parte VI

BIBLIOGRAFíA

Barbolla, R., Cerdá, E. y Sanz, P. (2001) Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economía. Madrid: Prentice Hall.

Bonini, C.P., Asuman, W. H., y Bierman, H. Jr. (1997) Quantitative Analysis for Management. Chicago: McGraw Hill. IRWIN Series, 9a ed.

Broeckelmann, R.G. (1999) Inventory Classification Innovation. The St. Lucie Press/APICS Series on Resource Management. Boca Raton/Virginia, USA.

Johnson, L. and Montgomery, D. (1974) Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory Control. N.Y.

Hadley, G. and Whitin, T.M. (1963) Analysis of Inventory Systems. N.J. Prentice-Hall.

Hillier, F., Hillier, M. and Lieberman, G. (2000) *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*. Boston: Irwin McGraw-Hill.

Hillier, and Hillier, M. (2003) Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets. Boston: International Edition McGraw-Hill.

Jaber, M. ed. (2009) Inventory Management. Non-Classical Views. Boca Raton: CRC Press, Taylor and Francis Group.

Johnson, L. and Montgomery, D. (1979) Operation Research in Production Planning and Inventory Control. New York: John Wiley & Sons.

Kenett, Ron S. y Zacks, Shelemyahu (2000) Estadística Industrial Moderna. Diseño y control de la calidad y la confiabilidad. México: Thomson.

Love, S. (1979) Inventory Control. Boston: McGraw-Hill.

Muckstadt, J.A. and Sapra, A. (2010) Principles of Inventory Management. New York: Springer Series on Operations Research and Financial Engineering.

Murthy, D., Page, N. & Rodin, E. (1990) Mathematical Modelling. A tool for Problem Solving Engineering, Physical, Biological and Social Sciences. N.Y.: Pergamon Press.

Johnson, D. and Montgomery, D. (1974) Operation Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control. New York: John Wiley and Sons.

Winston, W. L. (2005) Investigación de Operaciones. Aplicaciones y Algoritmos. México: Thomson, ed.

Índice