

Universidad Nacional Autónoma de  
México

FACULTAD DE CIENCIAS

*Electromagnetismo I*

*Notas del curso*

*M. en C. Youssef Sarkis Mobarak*  
*(ejercicios) Saksevil Arias Santiz*

19 septiembre 2020

Esta pagina esta intencionalmente dejada en blanco.

Dedicado a las piochas :)

*'Pensar sin aprender es esfuerzo perdido; aprender sin pensar, peligroso'*

– Confucio

*'Nunca he encontrado una persona tan ignorante que no pueda aprender algo de ella'*

– Galileo Galilei

*'Prefiero la crítica más aguda de un solo hombre inteligente a la aprobación irreflexiva de las masas.'*

– Johannes Kepler

*'El genio es la paciencia.'*

– Isaac Newton

*'La lógica es la base de la certeza de todos los conocimientos que adquirimos.'*

– Leonerd Euler

*'Cuando pedimos consejo, solemos buscar un cómplice.'*

– Joseph Louis Lagrange

*'En la tierra no hay nada grande sino el hombre; en el hombre no hay nada grande sino la mente.'*

– Rowan Hamilton

*'La ciencia no puede resolver el último misterio de la naturaleza. Y eso es porque, en el último análisis, nosotros mismos somos parte del misterio que intentamos resolver.'*

– Max Planck

*'Locura es hacer lo mismo una y otra vez esperando obtener resultados diferentes'*

– Albert Einstein

*'La medida de la grandeza en una idea científica es la medida en que estimula el pensamiento y abre nuevas líneas de investigación.'*

– Paul M. Dirac

*'Estudie mucho lo que más le interese de la manera más indisciplinada, irreverente y original posible.'*

– Richard P. Feynman

*'Lo que es especialmente sorprendente y notable es que en la física fundamental es más probable que una teoría bella o elegante tenga razón que una teoría poco elegante.'*

– Murray Gell-Mann

<b>1. Repaso cálculo vectorial</b>	<b>15</b>
1.1. Introducción breve . . . . .	15
1.2. Curvas . . . . .	16
1.3. Gradiente . . . . .	19
1.3.1. Laplaciano . . . . .	21
1.4. Campo vectorial . . . . .	25
1.5. Circulación de un campo vectorial . . . . .	30
1.6. Representación vectorial de superficies . . . . .	31
1.7. Integral Superficie (explicito) . . . . .	31
1.8. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie . . . . .	34
1.9. Divergencia . . . . .	34
1.9.1. Fuentes Puntuales . . . . .	39
1.9.2. Teorema de Helmholtz . . . . .	41
<b>2. Electrostática</b>	<b>47</b>
2.1. Conceptos fundamentales . . . . .	47
2.1.1. Antecedentes . . . . .	49
2.1.2. Experiencia de Robert symmer . . . . .	50
2.1.3. Ley de Coulomb . . . . .	51
2.1.4. Campo eléctrico . . . . .	53
2.1.5. Líneas de campo eléctrico . . . . .	54
2.1.6. Potencial eléctrico . . . . .	55
2.2. Ley de Gauss . . . . .	57
2.2.1. Ecuación de Poisson y Laplace . . . . .	58
2.2.2. Condiciones de frontera para el campo eléctrico en una interfase . . . . .	59
2.2.3. Teorema de Earnshaw y Teorema de Thompson . . . . .	60
2.2.4. Conductores . . . . .	62

2.2.5.	Sobre discontinuidad de los campos . . . . .	63
2.2.6.	Unicidad de la solución . . . . .	64
2.3.	Método de las imágenes . . . . .	66
2.3.1.	Conductor plano . . . . .	66
2.3.2.	Conductor esférico (opcional) . . . . .	69
2.4.	Distribución de carga en un conductor . . . . .	70
2.4.1.	Método alternativo usando integración por partes . . .	74
2.5.	Energía potencial eléctrica de cargas en un campo externo . .	76
2.6.	Energía potencial de un sistema de cargas . . . . .	77
2.6.1.	Energía potencial de un conjunto de cargas puntuales	77
2.6.2.	Energía potencial de una distribución continua de cargas	78
2.6.3.	Frenado electrónico . . . . .	84
2.7.	Expansión multipolar cartesiana . . . . .	84
2.7.1.	Expansión Multipolar . . . . .	84
2.7.2.	Distribuciones de carga en campos externos . . . . .	89
2.8.	Electrostática macroscópica . . . . .	92
2.8.1.	Vector y cargas de Polarización . . . . .	92
2.8.2.	Desplazamiento eléctrico . . . . .	94
2.8.3.	Relación Constitutiva, susceptibilidad, permeabilidad	95
2.8.4.	Modelo estadístico básico, para estimar la polarización	101
2.8.5.	Medios lineales anisótropos (Opcional) . . . . .	105
2.8.6.	Medios lineales isótropos . . . . .	106
2.8.7.	Ecuación de Poisson y su generalización . . . . .	107
2.8.8.	Direcciones principales de un medio anisótropo . . . .	107
2.8.9.	Condiciones de frontera para $\vec{D}$ . . . . .	109
2.8.10.	Caso de un medio lineal e isótropo . . . . .	109
2.8.11.	Energía electrostática en un dieléctrico . . . . .	110
2.8.12.	Fuerzas y torques . . . . .	111
2.9.	Ejercicios . . . . .	115
2.9.1.	Ley de Coulomb. . . . .	115
2.9.2.	Distribución uniforme de carga. . . . .	116
2.9.3.	Potencial eléctrico . . . . .	118
2.9.4.	Ley de Gauss en el vacío. . . . .	119
2.9.5.	Energía de una distribución de carga. . . . .	120
2.9.6.	Condensador cilíndrico. . . . .	121
2.9.7.	Cargas inducidas. . . . .	122
2.9.8.	Ley de Gauss en dieléctricos. . . . .	123
2.9.9.	Energía en un sistema dieléctrico. . . . .	124
2.9.10.	Condensador placas paralelas. . . . .	125
<b>3.</b>	<b>Magnetostática</b>	<b>127</b>
3.1.	Corriente y densidad de corriente . . . . .	129
3.1.1.	Densidad de Corriente . . . . .	129
3.2.	Conservación de la carga eléctrica . . . . .	131

3.2.1.	Corrientes Estacionarias . . . . .	131
3.3.	Campo magnético y fuerza magnética . . . . .	131
3.3.1.	Partícula cargada en el seno de un campo magnético uniforme . . . . .	134
3.4.	Leyes fundamentales de la magnetostática . . . . .	137
3.4.1.	Ejemplo: Campo magnético producido por una línea infinita de corriente . . . . .	139
3.4.2.	Ley de fuerza de Ampère . . . . .	139
3.5.	Expansión multipolar magnética . . . . .	140
3.5.1.	Relación entre momento magnético y momento angular	141
3.6.	Fuerza y torque sobre una distribución compacta de corriente	142
3.7.	Campos magnéticos en la materia . . . . .	144
3.7.1.	Magnetización . . . . .	144
3.7.2.	Excitación magnética . . . . .	146
3.7.3.	Condiciones de continuidad en interfaces . . . . .	147
3.7.4.	Relación constitutiva, susceptibilidad magnética . . .	148
3.7.5.	Paramagnetismo, diamagnetismo, ferromagnetismo . .	149
3.8.	Ejercicios . . . . .	152
3.8.1.	Fuerza magnética. . . . .	152
3.8.2.	Corriente y fuerza magnética. . . . .	153
3.8.3.	Ley de Biot-Savart. . . . .	154
3.8.4.	Potencial magnético. . . . .	155
3.8.5.	Ley de Ampère. . . . .	157
3.8.6.	Momento dipolar magnético. . . . .	158
3.8.7.	El campo magnético de un objeto magnetizado. . . .	159
3.8.8.	Medios lineales. . . . .	160
<b>4.</b>	<b>Electrodinámica y Teoría de conductividad</b>	<b>163</b>
4.0.1.	Ley de Child-Langmuir . . . . .	163
4.0.2.	Ley de Ohm . . . . .	165
4.1.	Leyes de Kirchhoff . . . . .	169
4.1.1.	Ley de las corrientes . . . . .	169
4.1.2.	Ley de las diferencias de potencial . . . . .	169
4.1.3.	Conexiones . . . . .	170
4.1.4.	Puente de Wheatstone . . . . .	171
4.2.	Métodos de análisis . . . . .	172
4.2.1.	Equivalente Thévenin . . . . .	173
4.3.	Ley de inducción de Faraday . . . . .	174
4.3.1.	Energía del campo magnético . . . . .	177
4.4.	Circuitos de corriente alterna . . . . .	180
4.4.1.	Circuito RL . . . . .	180
4.4.2.	Circuito RLC serie sin fuentes . . . . .	182
4.4.3.	Respuesta a las condiciones iniciales . . . . .	182
4.5.	Circuitos con condiciones iniciales no nulas . . . . .	185

4.5.1.	Circuito RC . . . . .	185
4.5.2.	Generalizaciones . . . . .	186
4.6.	Circuitos con condiciones iniciales nulas . . . . .	187
4.6.1.	Circuito RLC . . . . .	187
4.6.2.	Oscilador RC . . . . .	190
4.7.	Ejercicios . . . . .	192
4.7.1.	Reglas de Kirchhoff . . . . .	192
4.7.2.	Ley de Faraday . . . . .	194
4.7.3.	Circuito RCL . . . . .	196
<b>5.</b>	<b>Ecuaciones de Maxwell</b>	<b>201</b>
5.0.1.	Paridad . . . . .	202
5.1.	Conservación de la energía y Vector de Poynting . . . . .	204
5.2.	Ondas Electromagnéticas . . . . .	206
5.2.1.	Campos electromagnéticos y ecuación de la onda . . . . .	206
5.2.2.	Ondas electromagnéticas planas monocromáticas . . . . .	207
5.3.	Medios dispersivos . . . . .	210
5.3.1.	Velocidad de grupo . . . . .	210
5.3.2.	Modelo de Drude para metales . . . . .	212
5.4.	Potenciales y transformaciones de gauge . . . . .	216
<b>6.</b>	<b>Introducción a la teoría Especial de la Relatividad</b>	<b>223</b>
6.1.	Situación previa a 1905 . . . . .	223
6.1.1.	Transformaciones de Galileo* . . . . .	224
6.1.2.	El experimento de Michelson-Morley . . . . .	225
6.2.	Principios de la Teoría de Relatividad Especial . . . . .	228
6.2.1.	Principio de Relatividad . . . . .	228
6.2.2.	Principio de la constancia de la velocidad de la Luz . . . . .	229
6.2.3.	Definiendo posiciones y tiempos de eventos respecto a un SRI . . . . .	230
6.2.4.	Relacionando mediciones de tiempo entre dos observadores inerciales . . . . .	231
6.2.5.	Velocidad relativa de dos observadores inerciales . . . . .	232
6.2.6.	Composición de velocidades . . . . .	233
6.2.7.	Experimento de Fizeau* . . . . .	234
6.2.8.	Boosts de Lorentz V1 . . . . .	234
6.2.9.	Boosts de Lorentz V2 . . . . .	237
6.2.10.	Relatividad de la Simultaneidad . . . . .	241
6.2.11.	Dilatación del tiempo . . . . .	243
6.2.12.	Contracción de la longitud . . . . .	245
6.2.13.	El cono de luz . . . . .	246
6.2.14.	Boost en una dirección arbitraria . . . . .	248
6.2.15.	Incompatibilidad de las definiciones newtonianas de energía y momento lineal con el Principio de Relatividad	249



6.3. La visión Cuadridimensional . . . . .	251
6.3.1. 4-vectores y 4-tensores . . . . .	252
6.3.2. Métrica de Minkowski . . . . .	256
6.3.3. Transformaciones de Lorentz infinitesimales* . . . . .	257
6.3.4. Transformaciones de Lorentz finitas* . . . . .	259
6.3.5. Caso de Boost General* . . . . .	259
6.4. Mecánica Relativista. . . . .	261
6.4.1. 4-velocidad . . . . .	261
6.4.2. 4-aceleración . . . . .	262
6.4.3. 4-momento y Energía . . . . .	263
6.4.4. Ejemplos . . . . .	268
<b>A. Demostración Teorema Helmholtz</b>	<b>271</b>
<b>B. Sistemas de Unidades</b>	<b>275</b>
B.1. Tabla de equivalencias para unidades gaussianas y S.I. . . . .	275
B.2. Sistema Internacional de unidades (S.I.) . . . . .	278
B.3. Sistema Gaussiano de Unidades (C.G.S.) . . . . .	279
B.4. Conversión de magnitudes S.I. a Gaussianas . . . . .	280
<b>C. Constantes Físicas (S.I.)</b>	<b>281</b>
<b>D. Coordenadas curvilineas</b>	<b>283</b>
D.1. Coordenadas Cartesianas . . . . .	283
D.2. Coordenadas Cilíndricas . . . . .	284
D.3. Coordenadas Esféricas . . . . .	285
<b>E. Números complejos</b>	<b>287</b>
<b>F. Efecto Termionico</b>	<b>289</b>



---

## Índice de figuras

---

1.1. Elemento diferencial de área en coordenadas esféricas . . . . .	22
1.2. Transformación de un vector $\vec{v}$ a un sistema de coordenadas definido por $\vec{P}$ . . . . .	25
1.3. Ejemplo de un vector tangente en $\mathbb{R}^3$ , [2]. . . . .	27
1.4. Curva que pasa por punto de aplicación. . . . .	28
1.5. Campos vectoriales ejemplificados en el texto. . . . .	28
1.6. Región de integración D. . . . .	37
2.1. Caja de Píldoras, en una superficie. . . . .	59
2.2. Interacción entre dos iones. . . . .	83
2.3. Esquema de una esfera conductora en un campo eléctrico uni- forme. . . . .	98
2.4. En una unidad infinitesimal de tiempo, todos los átomos con velocidad en x ( $v_x$ ) habrán atravesado un cilindro de longitud numéricamente igual $\Delta x$ . . . . .	103
2.5. Varilla con distribución uniforme de carga $\lambda$ . . . . .	116
2.6. Cilindros metálicos coaxiales. . . . .	121
2.7. Condensador de placas paralelas. . . . .	125
3.1. Carga con densidad $\rho$ fluyendo con velocidad $\vec{v}$ a través de un elemento de superficie $d\vec{S}$ . . . . .	130
3.2. Izquierda: Estructura interna de un ciclotrón. Derecha: Mo- vimiento de una partícula dentro de un ciclotrón . . . . .	136
3.3. Representación gráfica de la formula de área de Green. . . . .	143
3.4. Condiciones de continuidad para $\vec{H}$ en una interfase de dos medios magnéticos. . . . .	147
3.5. Partícula de carga $q$ entrando a una región con un campo magnético uniforme, $B$ . [1] . . . . .	152

3.6. Circuito cuadrado semi-contenido en una región de campo magnético uniforme, $B$ . [1]	153
3.7. Circuito por el cual circula una corriente $I$ .	155
4.1. Diagrama de un diodo de vacío.	165
4.2. (a): Bosquejo conceptual en el espacio que muestra un electrón con impulso inicial $p_i$ incidente en un centro de dispersor $y$ , posteriormente, se dispersa elásticamente por un ángulo $\theta$ en un estado final con momento $p_f$ . (b): Ilustración de espacio-momento de un electrón involucrado en una colisión elástica en la cual el momento es intercambiado	167
4.3. Nodo de corriente.	170
4.4. Circuitos ohmicos en serie y paralelo.	171
4.5. Esquema de un puente de Wheatstone equilibrado. En esta situación, el galvanómetro indica el paso de una corriente nula.	172
4.6. Esquema de un circuito RL.	181
4.7. Esquema de un circuito RLC.	182
4.8. Filtro de señal.	189
4.9. Malla elemental de un oscilador RC.	191
4.10. Circuito "puente".	192
4.11. Corrientes, nodos y lazos propuestos para el circuito "puente".	193
4.12. Ley de Faraday.	194
4.13. Variables del problema.	195
4.14. Circuito RCL de corriente alterna.	196
5.1. Paquete de onda	211
5.2. Valores de $\varepsilon_1$ real y $\varepsilon_2$ imaginaria ( $\frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\varepsilon}$ ) para el modelo de Drude, comparado con datos del Platino.	214
6.1. Esquema del interferómetro	226
6.2. Propagación en el segunda brazo, respecto a un SR comóvil con el éter.	226
6.3. Diagrama de espacio-tiempo. Línea de mundo de una partícula.	229
6.4. Diagrama para determinar la velocidad relativa.	232
6.5. Diagrama para un boost.	235
6.6. Eventos simultáneos en $K$ y $K'$ .	239
6.7. Los eventos $P$ y $Q$ son simultáneos respecto al SRI $K'$ , comóvil con el tren.	241
6.8. Los eventos $P$ y $Q$ no son simultáneos respecto al SRI $K$ , respecto al cual el tren se mueve con velocidad $V$ .	241
6.9. Diagramas de espacio-tiempo para el proceso, respecto a los SRI $K'$ y $K$ .	242

---

6.10. Dilatación del tiempo en el “reloj de luz”. Izquierda: SRI comóvil $K'$ . Derecha SRI $K$ respecto al cual el reloj se mueve con velocidad $v = \beta c$ . . . . .	244
6.11. Líneas de mundo de los extremos de un cuerpo, respecto al SRI comóvil $K'$ y SRI $K$ donde éste se mueve con velocidad $v$ . . . . .	245
6.12. Cono de luz en 1+1 dimensiones: futuro, pasado absoluto y “limbo” . . . . .	246
6.13. Cono de Luz, en 2+1 dimensiones. . . . .	247
6.14. Scattering por un electrón, visto desde el SRI comóvil con el electrón inicial . . . . .	268



---

## Índice de cuadros

---

2.1. Algunos materiales isotropos y sus constantes dieléctricas. . .	107
2.2. Algunos cristales uniaxiales y sus índices de refracción. Datos tabulados para $\lambda \sim 590$ [nm] [?]. . . . .	108
2.3. Algunos cristales biaxiales. Datos tabulados para $\lambda \sim 590$ [nm] [?]. . . . .	109
3.1. Algunos materiales y sus susceptibilidades magnéticas, a tem- peratura ambiente (Reitz-Milford). . . . .	150
3.2. Algunos materiales ferromagnéticos y sus temperaturas de Curie [?]. . . . .	151
4.1. Soluciones particulares para proponer. . . . .	187
5.1. Valores teóricos y experimentales para las longitudes de onda de plasma. . . . .	215
B.1. Resumen Sistema Internacional de Unidades. . . . .	279
B.2. Resumen Sistema Gaussiano de Unidades. . . . .	280





---

## Prefacio

---

Notas para el curso de electromagnetismo I de la facultad de ciencias de la U.N.A.M. Estas notas estan basadas en los textos básicos de electromagnetismo (Burbano, Resnik et all) y se han añadido secciones complementarias que sirven como una guia unificadora de los conceptos de la materia. Se tiene el fin de entender el electromagnetismo sin sobresimplificaciones en el desarrollo teórico, en donde paso a paso llegamos al reduccionismo de las ecuaciones de Maxwell. Sin caer en el error de adelantarnos demasiado u obviando ciertos conceptos clave.



---

## Repaso cálculo vectorial

---

*“Si la geometría se opusiera tanto a nuestras pasiones e intereses actuales como a la ética, deberíamos refutarla y violarla un poco menos, a pesar de todas las manifestaciones de Euclides y Arquímedes ...”*

– Leibniz

### 1.1. Introducción breve

Tratando de contextualizar, el estudio de las cargas eléctricas tiene su origen desde los griegos posiblemente en Mesopotamia y Egipto. Desde la Antigua Grecia se conoce que al frotar ámbar con una piel, ésta adquiere la propiedad de atraer cuerpos ligeros tales como trozos de paja y plumas pequeñas. Su descubrimiento se le atribuye al filósofo griego Tales de Mileto (ca. 639-547 a. C.).

Pero no se atribuye a los griegos la física de las partículas cargadas, así como también ellos conocían las palancas e incluso algunos principios hidráulicos (fuente de Heron de Alejandria), tampoco podemos denominarlos como los padres de la Física (Moderna). La razón por la cual todo este bagaje de información no es conocimiento en ciencias físicas, es por la falta de unificación, simplificación y organización. Así como la mayoría sabe Newton es el padre de la Física, a pesar de que Galileo, Kepler entre otros ya habían hecho algunos descubrimientos importantes. Pero Newton fue el primero en unificar en sus tres leyes y la ley de gravitación universal, las observaciones de Galileo y Kepler sobre caída libre y movimiento planetario

respectivamente. Logrando simplificar estos fenómenos, en la mínima cantidad de información usando sus leyes. Además abrió las puertas a nuevo conocimiento e incluso a nuevas formas de especular sobre la vida (dioses máquina).

Desde que el médico inglés W. Gilbert en 1600 trató de replicar y sintetizar lo que los griegos habían observado, no fue hasta casi 200 años después que se logró tener una Física de las cargas eléctricas y sus movimientos, lo que se llama hoy en día electromagnetismo. Es claro que los fenómenos eléctricos siempre han causado una admiración por el ser humano, sobre todo por el hecho de actuar como fuerzas invisibles, que además parecieran que son muy ajenas a lo cotidiano. Desde un punto de vista más formal, las manifestaciones de las interacciones de los cuerpos eléctricos y magnéticos no tiene un origen (al menos aparente) en las leyes de Newton, aunque no por ende quiere decir que la teoría newtoniana no sirva como punto de apoyo. Esto solo hace que el misterio sea aun más grande.

Así los fenómenos electromagnéticos y la muy exitosa teoría newtoniana parecen no tener el mismo origen. De aquí se puede hacer la pregunta ¿de donde viene la carga eléctrica?, ¿Existirán otro tipo de carga además de la eléctrica?. Estas preguntas son tan básicas, que incluso hasta ahora (400 años después) siguen teniendo vigencia. Lo más que trataremos de explicar en este trabajo será el camino de la unificación de la teoría electromagnética y como este cambio la mecánica newtoniana junto con la teoría de gravitación.

## 1.2. Curvas

Empecemos con la herramienta matemática necesaria para entender primero las leyes de Newton. Para ello primero necesitamos toda el cálculo diferencial e integral (cálculo no lineal), así como la definición de derivada, teorema del valor medio, sumas de Riemman, teorema fundamental del cálculo entre todo lo demás. Y además para interpretar mejor las ecuaciones y lo que ellas resuelven también es de crucial importancia entender los cambios de variable en todo su esplendor. Cuando este cambio de variable se da en varias variables, se dice que es un cambio de coordenadas. Por ejemplo una curva que representa la posición de un cuerpo en coordenadas cartesianas tiene la forma:

$$\vec{\alpha}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z. \quad (1.1)$$

La fuerza para una partícula en un sistema de referencia inercial (S.R.I) de masa  $m$  esta dada por la ecuación:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{\alpha}(t)}{dt^2} = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{e}_x + m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \hat{e}_y + m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \hat{e}_z \quad (1.2)$$

Esta ecuación nos dice claramente cual es la fuerza de una partícula en coordenadas planas (cartesianas) canónicas (lo cual Newton definió como axioma en su teoría). En teoría se puede resolver todo con esta ecuación, pero ciertos problemas pueden resultar muy difíciles en forma matemática y además necesitamos expandir la teoría para sistemas de referencia no inerciales (S.R.N.I), lo que en coordenadas cartesianas implica meter términos adicionales en la ecuación 1.2 como fuerzas ficticias. Para resolver estos problemas podemos hacer uso del cambio de coordenadas y tratar de ver si en esas coordenadas es posible resolver el problema de forma más sencilla y sin necesidad de incluir de forma artificial las fuerzas ficticias propias de los (S.R.N.I).

Veamos un caso explicito de como resolver un problema de este tipo: Considérese una honda de radio  $R$  que se mueve a velocidad circular uniforme  $v_0$  y el problema consiste en resolver la trayectoria de la partícula libre de fuerzas exteriores cuando se suelta la partícula de la honda. Claramente la ecuación a resolver debería ser  $\vec{F} = \vec{0}$ , pero la honda no es un S.R.I, así que la igualdad anterior ya no es válida, si se unciste en trabajar en coordenadas cartesianas se debe añadir una fuerza ficticia (centrípeta). Pero aquí se procederá de otro modo; si en lugar de eso se insiste en preservar la igualdad  $\vec{F} = \vec{0}$ , entonces debemos cambiar de coordenadas y la fuerza ficticia se obtendrá de forma natural, en este caso por ser un movimiento circular uniforme usaremos coordenadas polares cilíndricas:

$$x(r, \theta) = r \cos(\theta), y(r, \theta) = r \sin(\theta), z = z, r \in (0, \infty), \theta \in [0, 2\pi), z \in R \quad (1.3)$$

La primer pregunta que se puede formular en vista de esta cambio de variable en coordenadas, ¿Cual es la base asociada a estas coordenadas?. Aunque hay una forma general de resolver esta cuestión para cualesquiera coordenadas, nos limitaremos aquí a construir la base para las coordenadas 1.3. Claramente las coordenadas 1.3 satisfacen  $x^2 + y^2 = r^2$ , si derivamos con respecto a  $\theta$  se tiene:  $xx' + yy' = 0$  con  $x' = \frac{dx}{d\theta}$ . Se puede ver esta ecuación como el producto interior de los vectores  $\vec{x}$  con  $\vec{x}'$  i.e  $\vec{x} \cdot \vec{x}' = 0$ . Esto nos genera una base para este sistema, ya que estos vectores son ortogonales y además podemos definir  $\vec{x}' = (-y, x)$ , lo que genera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{d\theta} = -y, \quad \frac{dy}{d\theta} = x, \quad \Rightarrow \quad (1.4)$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -x, \quad \frac{d^2y}{d\theta^2} = -y, \quad (1.5)$$

con condiciones iniciales  $x(0) = 1$  y  $y(0) = 0$ . Con ello es fácil comprobar

que las funciones  $x(\theta) = \cos(\theta)$  y  $y(\theta) = \sin(\theta)$  satisfacen estas ecuaciones.

Como  $z$  no sufre cambios entonces podemos tomar a  $\hat{e}_z$  como elemento de la base y así ya se tienen tres vectores base para este sistema de referencia.

$$\begin{aligned}\vec{x} &\equiv \hat{e}_r = \cos(\theta)\hat{e}_x + \sin(\theta)\hat{e}_y, \\ \vec{x}' &\equiv \hat{e}_\theta = -\sin(\theta)\hat{e}_x + \cos(\theta)\hat{e}_y, \\ \hat{e}_z &= \hat{e}_z.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Hasta aquí ya se tiene con el material básico para proceder; empecemos por obtener la ecuación 1.1 en términos de estas coordenadas y después la derivada con respecto al tiempo (se entiende que  $r(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $z(t)$  dependen de este parámetro). La curva y la velocidad son:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}(t) &= r(t)\hat{e}_r(\theta(t)) + z(t)\hat{e}_z, \\ \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt} &= \vec{\alpha}'(t) = r'\hat{e}_r + r\hat{e}'_r + z'(t)\hat{e}_z,\end{aligned}\tag{1.7}$$

aquí se ha considerado que los vectores base  $\hat{e}_r$  y  $\hat{e}_\theta$  no son vectores constantes y por ende pueden ser derivados, si se usa la regla de la cadena (la cual se puede repasar en [2]) es fácil comprobar que se cumple  $\hat{e}'_r = \theta'\hat{e}_\theta$  y  $\hat{e}'_\theta = -\theta'\hat{e}_r$  y  $\hat{e}'_z = \vec{0}$ . Considerando esto se obtiene para la velocidad:

$$\vec{\alpha}(t)' = r'\hat{e}_r + r\theta'\hat{e}_\theta.\tag{1.9}$$

Para interpretar esta velocidad, podemos definir el vector velocidad angular  $\vec{\omega} = \theta'\hat{e}_z$  y es fácil reescribir la ecuación 1.9 de la siguiente manera ( $\vec{r} = r\hat{e}_r$ ):

$$\vec{\alpha}(t)' = r'\hat{e}_r + \vec{r} \times \vec{\omega}.\tag{1.10}$$

La primera parte de esta velocidad se llama velocidad relativa y el producto vectorial  $\vec{r} \times \vec{\omega}$  se le conoce como velocidad de arrastre. Para demostrar esta fórmula en casos más generales, se deben usar los ángulos de Poisson. Ahora si se procede a derivar nuevamente la ecuación podemos obtener la aceleración y por ende la fuerza en estas coordenadas. El resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m[(r'' - r(\theta')^2)\hat{e}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\hat{e}_\theta] \\ 2r'\theta' + r\theta'' &= \frac{1}{r} \frac{d(r^2\theta')}{dt}\end{aligned}\tag{1.11}$$

Identificamos el segundo renglón con el momento angular  $mr^2\theta' = I$ . Si  $\vec{F} = \vec{0}$  implica que el momento angular se conserva, considerando una

velocidad angular inicial  $\omega$ , tenemos que  $\theta' = R^2\omega/r^2$ . Lo que implica que para la parte radial se puede sustituir este valor y obtener una ecuación  $r'' - (R^2\omega/r^2)^2r = 0$ , la cual se resuelve con la sustitución  $z = 1/r$  y usando regla de la cadena  $r' = \theta' dr/d\theta$ . La solución de esta ecuación es una suma de senos y cosenos  $A\sin(\theta) + B\cos(\theta)$ , por tratarse de una honda las condiciones iniciales sobre  $r$  deben ser;  $r(0) = R$  y  $r'(0) = 0$ . Con esto se puede demostrar que la trayectoria es una recta  $x = R$ , como era de esperarse.

Hemos visto con este ejemplo como simplificar un problema usando cambio de coordenadas, en donde todo sale de forma natural, sin necesidad de añadir fuerzas ficticias. Esto se puede replicar usando otras coordenadas como las polares esféricas. Algunos ejemplos adicionales los puede consultar en los ejercicios de [1].

### 1.3. Gradiente

Defínase una función escalar de la siguiente manera  $\phi(x, y)A \rightarrow R$ , donde  $A$  es un subconjunto de  $R^2$ . Si se considera un punto  $\vec{P}$  de  $A$  y un vector  $\vec{v}$  podemos preguntarnos por el siguiente límite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{P} + \vec{v}t) - \phi(\vec{P})}{t},$$

el cual nos dice cuanto cambia el campo  $\phi$  dada la dirección del vector  $\vec{v}$ , por lo que es natural que este límite nos diga cual es la dirección de máximo cambio de la función escalar. Para que este limite exista la función debe ser diferenciable, lo cual siempre se asumirá en este texto.

Evaluaremos este límite explícitamente en función de las derivadas parciales  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ , las cuales están definidas como el limite anterior con  $\vec{v} = \hat{e}_x$  y  $\vec{v} = \hat{e}_y$  respectivamente.

Sea el limite:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{P} + \vec{v}t) - \phi(\vec{P})}{t},$$

con  $\vec{P} = (x, y)$ , sumamos un cero,

$$\phi(x + v_x t, y) - \phi(x + v_x t, y), \quad (1.12)$$

y separamos el límite de la siguiente manera;

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + v_x t, y + v_y t) - \phi(x + v_x t, y)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(x + v_x t, y) - \phi(x, y)}{t}.$$

En el primer límite hacemos la sustitución  $u = v_y t$  y multiplicamos por  $\frac{v_y}{v_y}$ , esto modifica el tamaño de la  $\delta$  por  $1/v_y$  en la definición de límite, lo cual resulta

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi(x + v_x t, y + u) - \phi(x + v_x t, y)}{u} v_y,$$

podemos identificar este límite como la parcial de la función con respecto a  $y$ , es decir :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi(x + v_x t, y + u) - \phi(x + v_x t, y)}{u} v_y = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\partial \phi(x + (v_x/v_y)u, y)}{\partial y} v_y = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} v_y.$$

Análogamente se puede evaluar el otro límite. Con esto podemos escribir la ecuación 1.3:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{P} + \vec{v}t) - \phi(\vec{P})}{t} = \frac{\partial \phi}{\partial x} v_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} v_y = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{v}.$$

Es claro que el gradiente de una función escalar (en este caso de dos dimensiones) queda definido por el vector,

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{e}_y. \quad (1.13)$$

De aquí podemos concluir que el gradiente es el vector de máximo cambio de la función escalar  $\phi$ . Procedemos ahora a definir el diferencial de cambio de una función escalar como:

$$\phi(\vec{x} + d\vec{x}) - \phi(\vec{x}) \equiv d\phi = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{x}, \quad (1.14)$$

donde definimos  $d\vec{x}$  como el diferencial de trayectoria (coordenadas cartesianas).

Ahora si cambiamos de variable a coordenadas polares la diferencial debe ser :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta = \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l}. \quad (1.15)$$

Sabemos por la ecuación 1.10 que el diferencial de trayectoria debe ser:  $d\vec{l} = \int \vec{\alpha}(t)' dt = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta$ . De este hecho y de la ecuación 1.15 podemos deducir que el gradiente en coordenadas polares debe ser:

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad (1.16)$$

Este método también sirve para coordenadas esféricas, parabólicas, oblatas etc. Más en general para cualquier base ortonormal. Se recomienda ver el libro [3] para ejercitar el cambio de coordenadas de operadores diferenciales.



### 1.3.1. Laplaciano

El laplaciano  $\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ , nombrado así en honor a Pierre-Simon Laplace, es un operador diferencial definido sobre un campo escalar  $\phi$ . El operador laplaciano se encuentra en toda la física: aparece en la ecuación de onda, la ecuación de Schrodinger, las ecuaciones para el flujo de un fluido irrotacional, la ecuación de difusión, la ecuación de Poisson ( $\nabla^2\phi = f(\vec{x})$ ), y por supuesto la ecuación de Laplace ( $\nabla^2\phi = 0$ ).

¿Qué hace que esta combinación particular de derivadas parciales sea tan especial? ¿Por qué lo hacemos? a menudo se encuentran con esta combinación y, por lo tanto, rara vez se encuentran otras combinaciones de operadores. La respuesta es que Laplaciano no es sólo es un manojito de símbolos, sino esta relacionado con el carácter geométrico de la curvatura.

Así el operador laplaciano se puede definir, no solo como un operador diferencial, sino también a través de sus propiedades geométricas relacionadas con el promedio alrededor de un punto de una función escalar. Esto implica que un valor grande del laplaciano en un punto, indica la existencia de una fuente del campo escalar en ese punto.

Demostremos esta propiedad usando un desarrollo en Taylor a segundo orden de una función escalar  $\phi$  alrededor del origen, que bien podría ser cualquier punto que sea fijo de  $\mathbb{R}^3$  (donde las derivadas están evaluadas en cero y se pueden trabajar como escalares), esto queda:

$$\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{0}) = \frac{\partial\phi}{\partial x}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}y + \frac{\partial\phi}{\partial z}z + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i\partial x_j} x_i x_j. \quad (1.17)$$

Ahora integramos 1.17 sobre una superficie de esfera de radio  $R < \epsilon$ , con  $\epsilon \rightarrow 0$ , en donde se usaran las siguientes identidades básicas:

$$\begin{aligned} \int x dA &= \int y dA = \int z dA = 0, \\ \int xy dA &= \int yz dA = \int zx dA = 0, \\ \int x^2 dA &= \int y^2 dA = \int z^2 dA, \\ \int (x^2 + y^2 + z^2) dA &= \int R^2 dA = 4\pi R^4. \end{aligned} \quad (1.18)$$

donde cada coordenada esta dada en esféricas, ver figura 1.1

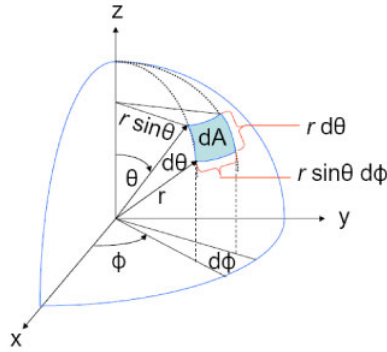


Figura 1.1: Elemento diferencial de área en coordenadas esféricas

$$x = R \operatorname{sen}(\theta) \cos(\phi) \quad (1.19)$$

$$y = R \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\phi) \quad (1.20)$$

$$z = R \cos(\theta) \quad (1.21)$$

$$dA = R^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi \quad (1.22)$$

De estas identidades se observa que los términos no nulos son de los que corresponden al laplaciano. De aquí deducimos la identidad:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{\int_S (\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{0})) dA}{(4/3)\pi R^4} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Identificando en la ecuación el promedio de la función  $\phi$  sobre la esfera, podemos concluir que el laplaciano cumple con la igualdad:

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{(\langle \phi(\vec{x}) \rangle - \phi(\vec{0}))}{R^2/3} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, |x| < R.$$

De aquí hemos demostrado que el operador  $\nabla^2$  está relacionado con el valor promedio de la función escalar  $\phi$  sobre una esfera centrada en el origen. Esto nos ayuda a dar la siguiente interpretación; Si el laplaciano es nulo en un punto dado, esto indica que no hay fuentes o sumideros que contribuyan a la función escalar en ese punto. Si se demuestra que el laplaciano es cero para todos los puntos del dominio, esto demostraría que la función escalar es constante en el dominio. Si el laplaciano es positivo en un punto, esto indicaría que ese punto contribuye como una fuente de la función escalar, si el signo es negativo contribuye como sumidero. Notase que estos argumentos son válidos para puntos del dominio, así que podríamos esperar que hay regiones en donde el laplaciano se anula y otras en donde no.

Como paso final veremos como escribir el laplaciano en distintas coordenadas, expondremos aquí de forma explícita el caso de coordenadas cilíndricas polares. Empecemos con la función escalar  $\phi(r(x, y, z), \theta(x, y, z), z)$  la cual esta en coordenadas cilíndricas  $r, \theta$  y  $z$  y estas dependen de las coordenadas canónicas por medio de ;  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $Tan(\theta) = y/x$  y  $z = z$ . Usando estas relaciones podemos usar la regla de la cadena con el fin de obtener las segundas derivadas  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$  y  $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$  en función de parciales en coordenadas cilíndricas.

Explícitamente esto queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.23)$$

Usando las relaciones entre las variables  $r, \theta$  y  $z$  y las coordenadas canónicas, es posible escribir las derivadas anteriores en función exclusiva de las coordenadas cilíndricas.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ &\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}\quad (1.24)$$

Con esto podemos calcular las segundas derivadas que nos interesan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left( \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\text{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right), \\ &\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{trivial}).\end{aligned}\quad (1.25)$$

Para proceder, es necesario usar la regla de Leibnitz ya que en la mayoría de los casos hay que derivar un producto de funciones. Con un poco de paciencia se llega al resultado final:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left( \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + 2 \frac{\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right), \\
\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left( \text{sen}^2(\theta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\theta)}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos^2(\theta)}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - 2 \frac{\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right), \\
&\qquad\qquad\qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{trivial}), \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Este resultado sirve para modelar más fácilmente problemas que involucran una geometría circular, en lugar de una geometría de líneas rectas infinitas que es el caso del laplaciano canónico. Para que el laplaciano tenga solución única es necesario imponer condiciones de borde, las cuales pueden darse fijando la frontera de la función escalar o su derivada. La primera de estas condiciones se llama de Dirichlet y la segunda de Newman (puede haber combinaciones). Para entender más en concreto en que consiste veamos un ejemplo. Considérese un problema de calor en dos dimensiones; sea un anillo de radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$  el cual tiene definido una temperatura en el círculo interior  $T_1$  y exterior  $T_2$ , encontrar la temperatura de la región intermedia. En términos de ecuaciones esto quedaría:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \phi &= 0, \quad (\text{En coordenadas cilíndricas}), \\
\phi(r = R_1, \theta) &= T_1, \\
\phi(r = R_2, \theta) &= T_2.
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Notemos primero que el problema tiene simetría circular, es decir, las condiciones de borde no dependen de la variable  $\theta$ . Esto implica que la derivada  $\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$ , esto es resultado del teorema del valor medio, ya que como  $\phi$  no varía con  $\theta$  en la frontera entonces por este teorema  $\phi$  tampoco debe variar en el interior del disco. Con esto el laplaciano se reduce a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) &= 0, \\
\phi(r = R_1, \theta) &= T_1, \\
\phi(r = R_2, \theta) &= T_2.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

La solución de la ecuación 1.28 puede ser hallada fácilmente:  $\phi(r) = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r) + \frac{T_1 \ln(R_2) - T_2 \ln(R_1)}{\ln(R_2/R_1)}$ .

Es recomendable obtener como ejercicio el laplaciano en coordenadas

esféricas, aquí solo pondremos el resultado:

$$\nabla^2 \phi = \left( \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}}_{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r})} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right).$$

## 1.4. Campo vectorial

Analíticamente un campo vectorial es una función  $\vec{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que asigna a cada valor de  $\vec{r}$  un único valor  $\vec{A}(\vec{r})$ .

La representación geométrica de los campos vectoriales se realiza mediante las líneas vectoriales, de modo que el campo es tangente a la línea vectorial en todos sus puntos. De modo que si el elemento diferencial de la línea vectorial es  $d\vec{l}$  tenemos siempre que  $\vec{A}$  es paralelo a  $d\vec{l}$ .

Debido a la definición de campo vectorial dos líneas vectoriales nunca pueden cortarse. En coordenadas cartesianas es fácil verificar que la derivada de un campo vectorial es el gradiente en cada una de sus entradas,

$$\vec{A}(\vec{x} + d\vec{x}) - \vec{A}(\vec{x}) = d\vec{A} = (\nabla A_x(\vec{r}), \nabla A_y(\vec{r}), \nabla A_z(\vec{r})) \cdot d\vec{x} \equiv J \cdot d\vec{x}, \quad (1.29)$$

donde  $J$  es definida como la *Matriz Jacobiana*,

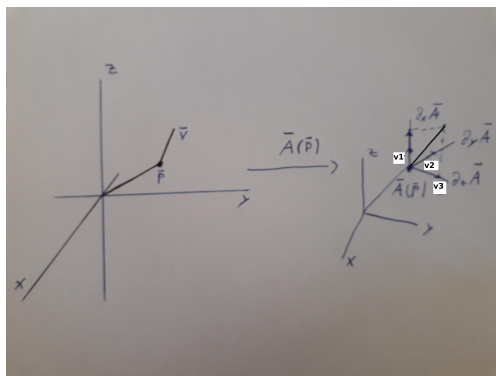


Figura 1.2: Transformación de un vector  $\vec{v}$  a un sistema de coordenadas definido por  $\vec{P}$ .

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} & \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} & \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} & \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} & \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} & \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} & \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Estudiemos un poco cual es la interpretación geométrica de esta matriz. Así como el gradiente se podía interpretar como el vector de máximo cambio para la función escalar, la Jacobiana ahora se interpreta como una base vectorial para cada punto donde le campo vectorial del dominio. Así por ejemplo para un vector con componentes  $(v_1, v_2, v_3)$  anclado en un punto  $\vec{P} = (p_1, p_2, p_3)$  el cambio es

$$d\vec{A} = v_1 \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial x} \end{bmatrix}_{\vec{P}} + v_2 \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial y} \end{bmatrix}_{\vec{P}} + v_3 \begin{bmatrix} \frac{\partial A_x(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r})}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z(\vec{r})}{\partial z} \end{bmatrix}_{\vec{P}} = v_1(\partial_x \vec{A})_{\vec{P}} + v_2(\partial_y \vec{A})_{\vec{P}} + v_3(\partial_z \vec{A})_{\vec{P}},$$

donde las componentes del vector son interpretadas como coordenadas de la base de los vectores columna (constantes para cada punto  $(p_1, p_2, p_3)$ ) de la matriz Jacobiana, ver figura 1.2. Notase que como los vectores de la Jacobiana son constantes para cada punto  $(p_1, p_2, p_3)$ , entonces se tiene una gama de coordenadas definidas por el vector  $(v_1, v_2, v_3)$  que pueden generar un espacio vectorial (base) sobre  $\mathbb{R}^3$  para cada punto  $(p_1, p_2, p_3)$ . Evidentemente para que esto siempre funcione el determinante de la Jacobiana debe ser siempre distinto de cero.

### Vectores tangentes

A partir de las nociones anteriores, podemos darnos cuenta que para un punto de aplicación  $\vec{P}$  podemos generar una serie infinita de vectores que emerjan de el y lo mismo para el vector  $\vec{A}(\vec{P})$ . Precisemos más este concepto con la siguiente definición: (tomada de [2])

*Un vector tangente  $\vec{V}_p$  a  $\mathbb{R}^n$  consiste en dos puntos de  $\mathbb{R}^n$ : su parte vectorial  $\vec{v}$  y un punto de aplicación  $\vec{P}$ .*

En la figura 1.3, se muestra un ejemplo de un vector tangente en tres dimensiones. Es evidente que los vectores tangentes forman un espacio vectorial en  $\mathbb{R}^n$  (es trivial ver esto si  $\vec{P} = \vec{0}$ ). A este espacio vectorial lo denotaremos como espacio tangente  $T_p(\mathbb{R}^n)$  que consta de todos los vectores tangentes que tienen a  $\vec{P}$  como punto de aplicación, esto evidentemente define un sub-espacio vectorial para cada punto de aplicación en  $\mathbb{R}^n$ .

Un concepto estándar de la física en específico del electromagnetismo es el concepto de **CAMPO**, lo cual podemos ver como una flecha en cada punto del espacio, tal que esa flecha representa una fuerza, una velocidad, etc. En vista de la definición de vector tangente podemos dar una definición formal de campo:

*Un campo vectorial  $\vec{A}(\vec{x})$  en  $\mathbb{R}^n$  es una función que asigna a cada punto  $\vec{P}$  de  $\mathbb{R}^n$  un vector tangente  $\vec{A}(\vec{P})$  a  $\mathbb{R}^n$  en  $\vec{P}$ .*

A partir de esta definición podemos establecer una forma de dibujar los campos vectoriales. Tomemos una curva en  $\mathbb{R}^n$ :  $\vec{c}(t)$  con  $t \in I \subset \mathbb{R}$ . Sea  $\vec{c}(0) = \vec{P}$  el punto de aplicación, entonces podemos definir el  $\vec{A}(\vec{P})$  como el punto de aplicación imagen, de aquí queremos ver que vector tangente del dominio  $D$  del campo vectorial  $T_{A(p)}(D)$  le corresponde el vector tangente de la curva ver figura 1.4, el cual está definido por la derivada de la curva  $\vec{v} = \vec{c}'$ , lo cual implica

$$\frac{d\vec{c}(t)}{dt} = \vec{A}(\vec{c}(t)). \quad (1.31)$$

Veamos por ejemplo el campo  $\hat{e}_x = (1, 0, 0)$  en  $\mathbb{R}^3$ , en este caso la curva está

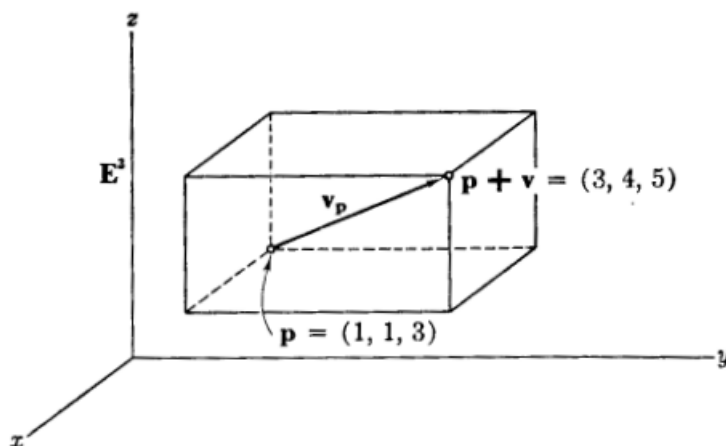


Figura 1.3: Ejemplo de un vector tangente en  $\mathbb{R}^3$ , [2].

dada por  $\vec{c}(t) = (t + p_x, p_y, p_z)$ , lo que nos indica que el campo se prolonga sobre el eje  $x$  de forma indefinida en cualquier punto de  $\mathbb{R}^3$ . Tomemos un ejemplo más; sea el campo en dos dimensiones  $\vec{A}(\vec{x}) = (-y, x)$ , en este caso la curva que satisface 1.31 es:  $\vec{c}(t) = K(\cos(t), \sin(t))$ , con  $K$  una constante, ver figura 1.5.

Por último podemos dar una observación interesante; sea una función  $\phi(\vec{x})$  escalar, podemos definir la derivada direccional como se hizo en la sección 1.3, con un punto de aplicación  $\vec{P}$ . Esto nos permite ver el gradiente de  $\phi$  como un campo vectorial para cada punto de aplicación.

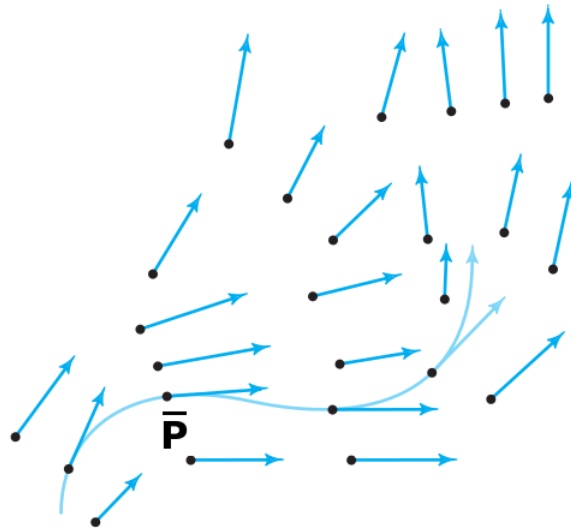


Figura 1.4: Curva que pasa por punto de aplicación.

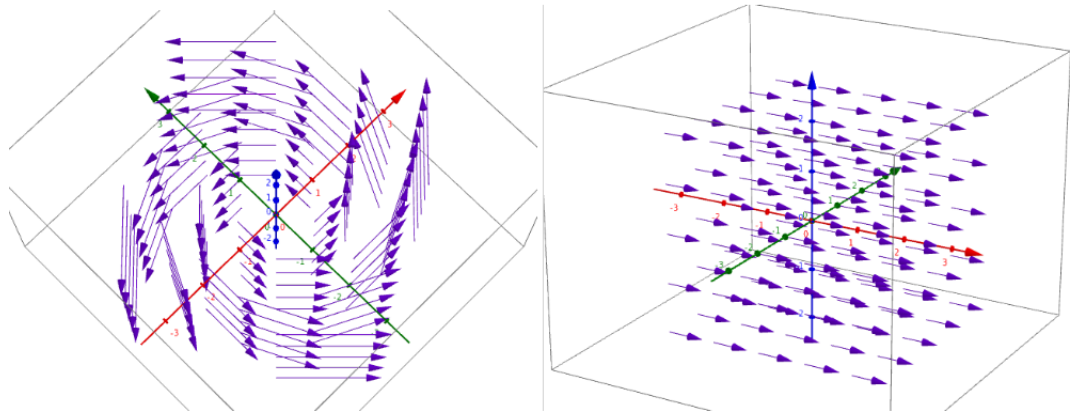


Figura 1.5: Campos vectoriales ejemplificados en el texto.

### Cambio de Variable

Veremos como aplicación de lo anterior el cambio de variable vectorial. La idea es tener una serie de relaciones entre tres variables nuevas ( $u, v, w$ ) y las variables canónicas del espacio ( $x, y, z$ ),

$$x(u, v, w), \quad y(u, v, w) \quad z(u, v, w),$$

son funciones definidas para un conjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^3$ , tal que estas funciones



son invertibles en ese dominio. Construyamos el campo vectorial que defina nuestro cambio de variable  $\vec{\chi}(u, v, w) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{\chi} = x(u, v, w)\hat{e}_x + y(u, v, w)\hat{e}_y + z(u, v, w)\hat{e}_z$$

, a partir de aquí solo escribiremos  $(x, y, z)$  dando a entender que estas dependen de las variables  $(u, v, w)$ . Usamos la expresión 1.4 para un vector tangente arbitrario  $\vec{v}_{\vec{P}}$  del dominio

$$d\vec{\chi} = v_1(\partial_u\vec{\chi})_{\vec{P}} + v_2(\partial_v\vec{\chi})_{\vec{P}} + v_3(\partial_w\vec{\chi})_{\vec{P}}. \quad (1.32)$$

Consideremos por simplicidad que los vectores de la identidad 1.32 son ortogonales y forman una base ya que las funciones son invertibles.

Ahora nos interesa expresar algunas identidades vectoriales con las nuevas variables  $(u, v, w)$ , por ejemplo el gradiente de un campo escalar  $\phi(\vec{x})$ . Usando la regla de la cadena en la base nueva (considerando el vector tangente diferencial  $(du, dv, dw)_{\vec{\chi}}$ ) podemos escribir

$$d\phi = \vec{\nabla}\phi|_{\vec{\chi}} \cdot d\vec{x} = \vec{\nabla}\phi|_{\vec{\chi}} \cdot d\vec{\chi},$$

por otro lado como el gradiente debe estar en la base nueva formada por los vectores  $((\partial_u\vec{\chi})_{\vec{P}}, (\partial_v\vec{\chi})_{\vec{P}}, (\partial_w\vec{\chi})_{\vec{P}})$ , llamemos a esta base como  $(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$ , note que no hemos normalizado la base ya que esta normalización depende de las coordenadas en cada punto y por ende conviene para simplificar los cálculos dejar así la base. Entonces el gradiente en estas nuevas coordenadas debe ser combinación lineal de esta base, usando la notación  $u = u_1, v = u_2$  y  $w = u_3$  con  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial u_i}$  tenemos

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_i^3 \sum_j^3 (\alpha_{i,j}) (\partial_j\phi) \vec{e}_i,$$

donde  $\alpha_{i,j}$  son coeficientes reales. Tomando ahora  $d\vec{\chi} = du\vec{e}_u + dv\vec{e}_v + dw\vec{e}_w$  y considerando que la base es ortogonal ( $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$  si  $i \neq j$ ) podemos expresar

$$\vec{\nabla}\phi|_{\vec{\chi}} \cdot d\vec{\chi} = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 (\alpha_{i,j}) (\partial_j\phi) (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k) du_k = \sum_i^3 \sum_j^3 (\alpha_{i,j}) (\partial_j\phi) \|\vec{e}_i\|^2 du_i \quad (1.33)$$

Con esto y usando la ecuación 1.32 con vectores normalizados podemos demostrar que el gradiente esta bien definido y por definición el diferencial 1.33 debe ser

$$\vec{\nabla}\phi|_{\vec{\chi}} \cdot d\vec{\chi} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)dv + \left(\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)dw.$$

Si definimos las funciones

$$h_1 = \|\vec{e}_u\| = \|\partial_u \vec{\chi}\|,$$

$$h_2 = \|\vec{e}_v\| = \|\partial_v \vec{\chi}\|,$$

$$h_3 = \|\vec{e}_w\| = \|\partial_w \vec{\chi}\|,$$

a estas funciones se les llama *factores de escala*. Entonces podemos (en el caso que la base sea ortogonal) obtener fácilmente los coeficientes  $\alpha_{i,j}$ , donde es según la ecuación 1.33 es evidente que  $\alpha_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ , por lo tanto

$$\alpha_{i,i} = 1/h_i^2,$$

de esta forma podemos concluir que el gradiente queda

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u} \hat{e}_u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial v} \hat{e}_v + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial w} \hat{e}_w.$$

Podemos simplificar este resultado definiendo la siguiente regla para coordenadas ortogonales,

$$dx = h_1 du, \quad dy = h_2 dv, \quad dz = h_3 dw.$$

Esto nos permite aplicar el cambio de variable a diferenciales de trayectoria, de área y de volumen (ver secciones posteriores) de la siguiente forma

$$d\vec{x} = h_1 du \hat{e}_u + h_2 dv \hat{e}_v + h_3 dw \hat{e}_w,$$

$$d\vec{A} = h_1 h_2 du dv \hat{e}_w + h_2 h_3 dv dw \hat{e}_u + h_3 h_1 dw du \hat{e}_v$$

y

$$dV = h_1 h_2 h_3 du dv dw.$$

Evidentemente es posible obtener expresiones para la divergencia y el rotacional por medio de estas identidades y de los resultados de los teoremas integrales de Gauss y Stokes. Para ver ejemplos véase el apéndice D.

## 1.5. Circulación de un campo vectorial

Supongamos que tenemos una región del espacio en la que existe un campo vectorial  $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ , y que tenemos una línea (de forma arbitraria) acotada entre dos puntos  $M$  y  $N$ . En este caso definimos la circulación elemental del campo  $\vec{A}$  como:

$$dC = \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_x dx + A_y dy + A_z dz \quad (1.34)$$

Por lo tanto la circulación del campo  $\vec{A}$  es una integral de línea de la forma  $C = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_M^N (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$ , que a priori no tiene por

qué ser fácil de calcular. Supongamos ahora que el campo vectorial  $\vec{A}$  es el gradiente de un campo escalar  $U$ , es decir:  $\vec{A} = \vec{\nabla}(U)$ , en ese caso:

$$C = \int_M^N \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_M^N \vec{\nabla}(U) \cdot d\vec{l} = \int_M^N dU = U(N) - U(M) \quad (1.35)$$

De modo que en el caso de que el campo vectorial sea el gradiente de un campo escalar, la circulación de éste es independiente del camino, sólo depende del valor que toma el campo escalar en los extremos. En este caso diremos que hablamos de un *campo conservativo*.  $U$  se denomina *función potencial* (es decir, una función genérica de la que se deriva un campo conservativo). El valor que  $U$  toma en cada punto se denomina *potencial*.

Además se puede ver que lo recíproco también es cierto: todo campo cuya circulación sólo dependa del valor inicial y final de la integral es un campo de gradientes.

Por tanto, en un campo conservativo la integral de circulación a lo largo de una línea cerrada (es decir, el punto inicial y el final son el mismo) es cero. Sin embargo lo recíproco no es cierto.

## 1.6. Representación vectorial de superficies

Una superficie siempre se puede representar por un vector con módulo igual al área de la superficie, dirección perpendicular a la superficie en cada punto y sentido elegido por convenio.

Si la superficie es una superficie abierta se suele escoger el que convenga para cada problema. Si la superficie es cerrada el vector de superficie va dirigido siempre hacia fuera del volumen.

## 1.7. Integral Superficie (explícito)

En esta sección profundizaremos más sobre el concepto de integral de superficie, el cual es un concepto clave para entender la mayoría de las manipulaciones de las ecuaciones de la electrostática.

Definimos una superficie por medio de la representación paramétrica o vectorial. La cual dice que una superficie esta definida por un campo vectorial diferenciable e inyectivo de  $\vec{A} : B \subset R^2 \rightarrow R^3$ , donde  $B$  debe ser conexo. Explícitamente el campo vectorial sería:

$$\vec{A}(u, v) = X(u, v)\hat{e}_x + Y(u, v)\hat{e}_y + Z(u, v)\hat{e}_z. \quad (1.36)$$

Sea una superficie  $\vec{A}(u, v)$ , tomemos  $u$  constante y  $v$  variable, esto convierte a la parametrización en una curva y podemos imaginar una curva

para cada valor  $u$  constante que se elija. De esta forma es fácil definir dos vectores tangentes a la superficie que formen un plano que sea tangente a la superficie. Estos vectores se eligen tomando  $u$  constante  $\vec{v}_v = \frac{\partial \vec{A}}{\partial v}$  y con  $v$  constante  $\vec{v}_u = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u}$ .

Con esto podemos definir una superficie regular, es decir que se comporte como una superficie lisa y sin auto-intersecciones o picos, que además de tener un campo vectorial  $\vec{A}$  diferenciable e inyectivo, pedir que  $|\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial v}|$  sea una función continua.

Recordando que la norma del producto vectorial de dos vectores en el espacio cartesiano, corresponde al área del paralelepípedo que forman. Podemos construir un pedazo infinitesimal de área en un punto de la superficie  $|\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial v}| \Delta u \Delta v$ . Cabe mencionar que el producto vectorial;  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial v}$  define el vector normal  $\hat{n}$  a la superficie en un punto.

Definimos el vector diferencial de superficie como:  $d\vec{S} = |\frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial v}| dudv\hat{n}$ . Con esto podemos simplificar la ecuación de diferencial de flujo de un campo vectorial  $\vec{F}$  para una superficie dada en forma paramétrica( $\vec{A}$ ):

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial v} \right) dudv. \quad (1.37)$$

La ecuación anterior puede servirnos para cualquier superficie parametrizada. En este caso también podemos hacer el uso del cambio de variable para en algunos casos simplificar los cálculos. Es claro que el campo vectorial  $F$  esta en coordenadas cartesianas, así en algunos casos es conveniente pasar el campo vectorial  $F$  a coordenadas esféricas, las cuales están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \text{sen}(\theta), \\ y &= r \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta), \\ z &= r \cos(\theta), \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde los vectores base son:

$$\hat{e}_r = \cos(\phi) \text{sen}(\theta) \hat{e}_x + \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \hat{e}_y + \cos(\theta) \hat{e}_z, \quad (1.39)$$

$$\hat{e}_\theta = \hat{e}_r|_{\theta \rightarrow \theta + \pi/2} = \cos(\phi) \cos(\theta) \hat{e}_x + \text{sen}(\phi) \cos(\theta) \hat{e}_y - \text{sen}(\theta) \hat{e}_z,$$

$$\hat{e}_\phi = \hat{e}_r|_{\phi \rightarrow \phi + \pi/2, \theta = \pi/2} = -\text{sen}(\phi) \hat{e}_x + \cos(\phi) \hat{e}_y. \quad (1.40)$$

Se puede comprobar que esta base es ortonormal, es decir,  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup>El símbolo  $\delta_{ij}$ , se conoce como delta de kronecker y vale uno si  $i=j$  y cero de otro modo.

con  $r = 1, \theta = 2, \phi = 3$ . Gracias a esta propiedad podemos pasar de una base ortonormal cualquiera a coordenadas esféricas fácilmente. Por ejemplo podemos escribir:

$$\begin{aligned}\hat{e}_z &= a\hat{e}_r + b\hat{e}_\theta + c\hat{e}_\phi, \\ a &= \hat{e}_z \cdot \hat{e}_r = \cos(\theta), \\ b &= \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\theta = -\text{sen}(\theta), \\ c &= \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\phi = 0.\end{aligned}\tag{1.41}$$

Con esto podemos reescribir el campo vectorial  $\vec{F}$  a coordenadas esféricas. Ahora definimos la superficie en coordenadas esféricas como el campo vectorial;  $\vec{A} = R(\theta, \phi)\hat{e}_r$ , donde  $R(\theta, \phi)$  es una función continua y positiva. Calculemos las parciales en el producto vectorial  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi}$ , notando que  $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \theta} = \hat{e}_\theta$  y  $\frac{\partial \hat{e}_r}{\partial \phi} = \text{sen}(\theta)\hat{e}_\phi$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} &= \frac{\partial R}{\partial \theta}\hat{e}_r + R\hat{e}_\theta, \\ \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} &= \frac{\partial R}{\partial \phi}\hat{e}_r + R\text{sen}(\theta)\hat{e}_\phi,\end{aligned}\tag{1.42}$$

efectuando el producto vectorial resulta;

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} = R^2 \text{sen}(\theta)\hat{e}_r - \frac{\partial R}{\partial \theta} R \text{sen}(\theta)\hat{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial \phi} R \hat{e}_\phi.\tag{1.43}$$

Con esto podemos concluir que el diferencial de superficie en coordenadas esféricas es:  $d\vec{S} = \left( R^2 \text{sen}(\theta)\hat{e}_r - \frac{\partial R}{\partial \theta} R \text{sen}(\theta)\hat{e}_\theta - \frac{\partial R}{\partial \phi} R \hat{e}_\phi \right) d\theta d\phi$ . Sin embargo aunque esta fórmula es útil no es la más popular, ya que en este caso estamos considerando una superficie definida por la función  $R(\theta, \phi)$ , pero podría pasar que en general tengamos otra superficie que este definida por una función  $\theta(\phi, r)$  u otra superficie del tipo  $\phi(r, \theta)$ , por ejemplo en este caso de coordenadas esféricas, el primer caso si  $R = cte$  tenemos una esfera, si  $\theta = cte$  tenemos un cono infinito y si  $\phi = cte$  tenemos un plano de la forma  $y/x = \tan(\phi)$ . Así que podría ser el caso que nuestra superficie estuviera superpuesta por este tipo de superficies y en este caso la fórmula anterior no sería muy útil.

Para resolver esto tomaremos los dos últimos términos de la ecuación 1.43 los cuales están evaluados en la forma  $R(\theta, \phi)$  y los pasaremos a las formas  $\theta(\phi, r)$  y  $\phi(r, \theta)$ . Para esto notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 R \operatorname{sen}(\theta) d\phi dR &= -\left(\frac{\partial R}{\partial \theta} R \operatorname{sen}(\theta)\right) d\theta d\phi, & (1.44) \\
 R &= R(\theta, \phi), \\
 \phi &= \phi, \\
 &\Rightarrow \\
 R \operatorname{sen}(\theta) d\phi dR &= \left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} & \frac{\partial R}{\partial \phi} \end{array} \right| R \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi.
 \end{aligned}$$

De esta forma queda claro que podemos hacer lo mismo para el último término de la ecuación 1.44. Notase que el orden de las diferenciales difieren por un signo, es decir, el producto  $dudv = -dvdu$  no es conmutativo, esto se interpreta geoméricamente por medio del vector normal, el cual puede estar orientado de la forma  $\pm \hat{n}$ . Finalmente podemos escribir el diferencial de superficie en coordenadas esféricas como:

$$d\vec{S} = \hat{n} dS = \left( R^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi \hat{e}_r + R \operatorname{sen}(\theta) d\phi dR \hat{e}_\theta + RdR d\theta \hat{e}_\phi \right). \quad (1.45)$$

## 1.8. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Supongamos que existe un campo vectorial  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ . Definimos el flujo elemental como

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.46)$$

Por tanto tenemos que  $d\phi = A_x ds_x + A_y ds_y + A_z ds_z$ , de modo que el flujo total es

$$\phi = \int_{\epsilon} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.47)$$

Siendo esta una integral de superficie a realizar sobre elementos en  $\epsilon$ . El flujo es el número de líneas vectoriales que atraviesan la superficie. En superficies abiertas no importa si el flujo es positivo o negativo.

## 1.9. Divergencia

Definimos la divergencia<sup>2</sup> de un campo vectorial  $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$  como

---

<sup>2</sup>Notase que la divergencia es un escalar, ya que es el ‘producto escalar’ de nabla por un campo vectorial

$$\operatorname{div}(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A} \quad (1.48)$$

El teorema de Ostrogradski-Gauss nos dice que la integral de la divergencia de un campo vectorial  $\vec{A}$  en un volumen es igual al flujo del campo  $\vec{A}$  a través de la superficie que limita ese volumen, es decir

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) d\tau = \iint_\sigma \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.49)$$

### Breve demostración del teorema de divergencia

El teorema de divergencia enuncia que si  $D$  es un conjunto conexo en  $\mathbf{R}^3$  con frontera cerrada y simplemente conexo  $S$  and  $\vec{F}$  es un campo vectorial diferenciable en  $D$  entonces

$$\int_D dV \nabla \cdot \vec{F} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (1.50)$$

donde  $S$  es una superficie regular. En otras palabras la normal de la superficie siempre apunta fuera de  $D$ .

Sea  $D$  una región conexa simple, lo cual nos permite escribir la integral sobre  $D$  como una serie de tres integrales iteradas. Tomamos el caso particular  $\vec{F} = F_3 \hat{e}_z$  e integramos usando el teorema fundamental del cálculo:

$$\begin{aligned} \int_D dV \nabla \cdot \vec{F} &= \int_D dV \frac{\partial F_3}{\partial z} & (1.51) \\ &= \int_{D_2} dx dy \int_{e(x,y)}^{f(x,y)} dz \frac{\partial F_3}{\partial z} \\ &= \int_{D_2} dx dy [F_3(x, y, f(x, y)) - F_3(x, y, e(x, y))] = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \end{aligned}$$

donde  $D_2$  define la región proyectada de  $D$  sobre el plano  $xy$  Para hacer la conversión a integral de superficie se uso 1.45, en donde se parametrizó la superficie en coordenadas cartesianas como  $z = f(x, y)$ ,

$$\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + f(x, y)\hat{e}_z \quad (1.52)$$

entonces

$$\vec{F} \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) dx dy = F_3 dx dy \quad (1.53)$$

, con una expresión similar para la parte inferior con un signo negativo. De forma análoga se puede demostrar para las componentes  $\vec{F} = F_1 \hat{e}_x$  y  $\vec{F} = F_2 \hat{e}_y$ , con la diferencia de hacer la integral primero en  $x$  en el primer caso y en la variable  $y$  en el segundo. Una demostración más rigurosa y generalizada para funciones discontinuas de este teorema se puede ver en [?].

**Ejemplos**

- Una aplicación simple del teorema de divergencia, es cuando un campo vectorial es del tipo  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ .
- Es un teorema útil para demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de laplace para regiones tipo Dirichlet y Neumann.
- Podemos simplificar ciertas integrales, como por ejemplo:

$$V = \int_D dV = \frac{1}{3} \int_{\delta D} \vec{r} \cdot \vec{d}A \quad (1.54)$$

ya que  $\nabla \cdot \vec{r}, \quad \vec{r} = 3$ .

**Breve demostración del teorema de Stokes**

Consideremos primero una integral de línea en el plano y un campo vectorial  $\vec{F} = L\hat{e}_x + M\hat{e}_y$  y demostraremos el teorema de Green, el cual identifica la integral de línea con una integral de superficie, es decir vamos a demostrar lo siguiente:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint_C (Ldx + Mdy) = \int \int_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy \quad (1.55)$$

Empezemos la demostración por la componente  $x$  de la integral de línea de 1.55:

$$\int_C Ldx = \int \int_D \left( -\frac{\partial L}{\partial y} \right) dA, \quad (1.56)$$

y luego procedemos de forma análoga con la otra parte

$$\int_C Mdy = \int \int_D \left( \frac{\partial M}{\partial x} \right) dA. \quad (1.57)$$

Considérese la región,  $D = (x, y) | a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x)$ , ver figura 1.6, en el plano. Donde  $g_1$  y  $g_2$  son funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$ . Calcúlese la integral doble de 1.56,

$$\int \int_D \left( \frac{\partial L}{\partial y} \right) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial L}{\partial y} dy dx = \int_a^b L(x, g_2(x)) - L(x, g_1(x)) dx \quad (1.58)$$

Calculemos la integral de línea de 1.56, en las trayectorias C1, C2, C3, C4,

- con la trayectoria C1 (sobre  $g_1$ ),  
 $\int_{C_1} L(x, y) dx = \int_a^b L(x, g_1(x)) dx,$



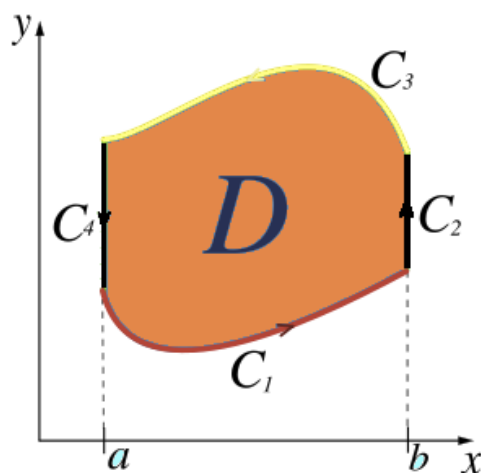


Figura 1.6: Región de integración D.

con la trayectoria  $C_3$ , notase que esta trayectoria es sobre  $g_2$ ,

$\int_{C_3} L(x, y)dx = -\int_{-C_3} L(x, y)dx$ . Para las curvas  $C_2$  y  $C_4$  notamos que en este caso la integral no contribuye ya que se esta integrando sobre un punto,

$$\begin{aligned} \int_C Ldx &= \int_{C_1} L(x, y)dx + \int_{C_2} L(x, y)dx + \int_{C_3} L(x, y)dx + \int_{C_4} L(x, y) \\ &= \int_a^b L(x, g_2(x))dx - \int_a^b L(x, g_1(x))dx . \end{aligned}$$

De esta ultima ecuación y de 1.56 se sigue el teorema. Como antes mencionamos el caso 1.57 es totalmente análogo.

### Ejemplo

Encontremos el área de un disco de radio  $R = 2$ , usando el teorema de Green. Para ello podemos comprobar fácilmente del teorema de Green que se cumple  $A = \frac{1}{2} \oint_C (xdy - ydx)$ , donde  $C$  es un círculo de radio dos. Tómese la parametrización del círculo en el plano  $x = 2\cos(u)$  y  $y = 2\sin(u)$  con dominio  $0 \leq u \leq 2\pi$ .

Usando la formula de área anterior se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{2\pi} (2 \cos u)(2 \cos u)du - \int_0^{2\pi} (2 \sin u)(2 \sin u)du \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 4(\cos^2 u + \sin^2 u)du \\ &= 2 \int_0^{2\pi} du \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

### Teorema de Stokes

Con ayuda de lo anterior demostraremos el teorema de Stokes el cual se escribe

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (1.59)$$

donde  $C$  es una curva cerrada y  $S$  una superficie regular. Supóngase que la superficie  $S$  puede ser dividida en  $n$  partes. Y sea  $C$  la curva que rodee la superficie  $S$ , donde consideraremos las partes  $\vec{C}_i$  como partes que dividen la frontera de la  $i$ -ésima parte de superficie, es decir,  $\int_C F \cdot dr = \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i$ ; donde  $i$  varía de uno hasta  $n$ . Sea la suma de las partes  $i$ -ésimas;

$$= \sum_{i=1}^n \int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}_i$$

Aquí, vamos a aplicar el teorema de Green que convierte la integral de línea en integral de superficie:

$$= \sum_{i=1}^n \iint_{R_i} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{n}_i dA$$

$$= \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}$$

Lo cual demuestra el teorema de Stokes  $\int_C F \cdot dr = \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}$ .

### Ejemplo

Sea  $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{e}_x + z\hat{e}_y + 2y\hat{e}_z$  y sea la curva  $C$  la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $z = x$ . Verificaremos el teorema de Stokes:

Sea  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $z = x$ , es claro que la curva debe ser:  
 $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t)$ ,  $d\vec{r} = (-\sin t, \cos t, -\sin t)dt$ , sustituimos en el campo vectorial,

$$\vec{F}(x, y, z) = xi + zj + 2yk, \quad \vec{F}(t) = (\cos(t), \cos(t), 2\sin(t)) \quad (1.60)$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (-\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) - 2\sin^2(t))dt$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t) - 2\sin^2(t))dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2} \sin(2t) + 1 - 3\sin^2(t)\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2} \sin(2t) + 1 - \frac{3}{2}(1 - \cos(2t))\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-1}{2}\sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) - \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}\cos(2t) + \frac{3}{4}\sin(2t) - \frac{1}{2}t\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4}\cos(4\pi) + \frac{3}{4}\sin(4\pi) - \pi\right) - \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\pi$$

Ahora usamos el teorema de Stokes, considerando que el vector normal al plano es  $(-1, 0, 1)$ ;

$$\vec{\nabla} \times F = (1, 0, 0)$$

$d\vec{S} = (-1, 0, 1)dx dy$ , recordando que en este caso la curva  $C$  es un círculo unitario, esto implica

$$\iint_C \vec{\nabla} \times F \cdot d\vec{S} = \iint_{|\vec{x}|=1} (1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 1) dx dy = - \iint_{|\vec{x}|=1} dx dy = -\pi$$

Este resultado verifica el teorema de Stokes.

### 1.9.1. Fuentes Puntuales

Sabemos que el valor del laplaciano nos indica cual es el valor de una fuente en un punto. Ahora consideremos una fuente puntual, es decir, supongamos que el laplaciano es cero en todo el espacio excepto en el origen. La fuente debe tener unidades de densidad por el teorema de divergencia. Entonces claramente esta densidad puntual debe ser cero en todos los puntos excepto el origen en donde debe ser infinito. Matemáticamente (tres dimensiones) podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi(\vec{x}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^3}, \quad \text{si } |\vec{x}| < \epsilon, \\ \nabla^2\phi(\vec{x}) &= 0, \quad \text{si } |\vec{x}| > \epsilon\end{aligned}\quad (1.61)$$

Analicemos por simplicidad el límite en el caso de una dimensión, haremos además la sustitución  $\epsilon = 1/n$ . De esta forma definimos la "Delta de Dirac" como:

$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} n & \text{si } |x| < 1/2n \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2n. \end{cases} \quad (1.62)$$

Esta "función" puede parecer extraña en un principio, pero esta definición nos permite explorar una de las propiedades más importantes de esta "función", para más detalles consúltese [4] y [5]. La delta de Dirac en principio no es una función ya que no tiene un contra-dominio definido (es  $\infty$ ). A estos objetos se les conoce como distribuciones, las cuales tratan de generalizar el concepto de función por medio de una aplicación que tenga como dominio un espacio de funciones y el resultado sea un valor real, es decir, un funcional. En general una distribución  $\phi(x)$  esta definida:

$$D(x) = \int^x \phi(x)f(x)dx \quad (1.63)$$

Consideremos en nuestro caso  $\phi = \delta$  y consideremos que la función  $f(x)$  es analítica, de tal forma que podamos hacer un desarrollo de Taylor:

$$\begin{aligned}\int^x \delta(x)f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int^x \left( \begin{cases} n & \text{si } |x| < 1/2n \\ 0 & \text{si } |x| > 1/2n. \end{cases} \right) f(x)dx = \\ & \int_{-1/2n}^{1/2n} n f(x)dx,\end{aligned}\quad (1.64)$$

haciendo un desarrollo en Taylor de la función  $f(x)$  alrededor de cero, implica (por comodidad omitiremos el límite en lo que sigue):

$$\int_{-1/2n}^{1/2n} n f(x) dx = \int_{-1/2n}^{1/2n} n f(0) dx + \int_{-1/2n}^{1/2n} n f'(0) x dx + \frac{1}{2} \int_{-1/2n}^{1/2n} n f''(0) x^2 dx \dots (1.65)$$

$$\int_{-1/2n}^{1/2n} n f(x) dx = f(0) + 0 + \frac{n}{81n^3} + \text{términos de la forma } (1/n)$$

$$\Rightarrow \int_a^b \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad \text{si } a < 0 \quad \text{y } b > 0.$$

Esta última propiedad es la más fundamental que satisface la delta de Dirac. Puede verse de otro modo si tomamos el caso  $f(x) = k$  implica que:

$$\int_a^b \delta(x) dx = 1 \quad \text{si } a < 0 \quad \text{y } b > 0. \quad (1.66)$$

Esto permite reinterpretar la delta de Dirac como una distribución degenerada, por ejemplo podemos con esta interpretación redefinir la delta de Dirac como:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (1.67)$$

ya que la distribución gaussiana del mismo modo que la delta de Dirac tiene integral igual a uno.

Regresemos a nuestro problema de resolver el laplaciano para una carga puntual en tres dimensiones,

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \equiv \delta(\vec{x})^3. \quad (1.68)$$

Como una fuente puntual tiene simetría esférica (no hay dependencia de  $\theta$  ni de  $\phi$ ), es recomendable pasar el laplaciano a coordenadas esféricas así como la delta. Para construir la delta en coordenadas esféricas obsérvese que debe cumplir;  $\int \delta(r)^3 dV = 1$  con  $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$ , esto demuestra que la delta en esféricas debe ser  $\delta^3 = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$ . Usando la simetría esférica de la carga puntual y la delta de Dirac podemos escribir nuestra ecuación:

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}, \quad (1.69)$$

la solución puede hallarse fácilmente usando la propiedad 1.65 de la delta de Dirac, teniendo como resultado  $\phi(r) = -\frac{1}{4\pi r} + C$ . Claramente podemos deducir fácilmente el resultado  $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(r)$ .

Finalmente daremos una representación que es fundamental y muy usada de la delta de Dirac,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}. \quad (1.70)$$

Para probar que la ecuación 1.70 es una representación de la delta de Dirac, simplemente evaluamos la integral en el límite cuando los límites de integración tienden a infinito,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} (e^{ixL} - e^{-ixL})/ix = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sin(xL)/x,$$

en el caso cuando  $x \rightarrow 0$  se tiene

$$\frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \sin(xL)/x = \frac{1}{\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} (xL)/x \rightarrow \infty,$$

y en el caso donde  $x \neq 0$  la función seno oscila rápidamente haciendo que el límite tienda a cero.

### 1.9.2. Teorema de Helmholtz

Este teorema nos dice cuales deben ser las condiciones necesarias para que un campo vectorial  $\vec{F}$  sea determinado de forma única por medio de operadores diferenciales. La demostración de este teorema esta fuera del objetivo de estas notas, solo nos limitaremos a dar un esbozo de como construir esta demostración.

El teorema nos dice que es necesario tener definido tanto el rotacional como el divergente de el campo vectorial  $\vec{F}$  para que el campo este determinado de forma única, es decir si se conocen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \vec{g}(\vec{x}) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= h(\vec{x}), \end{aligned} \quad (1.71)$$

donde  $\vec{g}(\vec{x})$  y  $h(\vec{x})$  son funciones conocidas vectoriales y escalares respectivamente. Entonces  $\vec{F}$  esta determinado de forma única. Por ejemplo si  $\vec{g} = \vec{0}$  y  $h = 0$  entonces el campo  $\vec{F}$  debe ser constante.

En otra forma de ver el teorema, esto quiere decir que dadas las ecuaciones 1.71 el campo vectorial  $\vec{F}$  se puede descomponer:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (1.72)$$

donde  $\phi$  y  $\vec{A}$  son campos vectoriales a determinar. Por ejemplo si  $\vec{g} = \vec{0}$  entonces  $\vec{F} = \vec{\nabla} \phi$  y el campo vectorial debe ser una constante y se tiene la ecuación  $\nabla^2 \phi = h$ . Demostraremos este teorema en el capítulo de electrostática.

### Notación

En estas notas usaremos la notación de suma de Einstein la cual es una convención utilizada para abreviar la escritura de las sumas. Esto se puede definir de la siguiente manera: para un valor real  $u$  expresado en sumas de la forma

$$u = u_1x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_nx_n,$$

por lo general se escribe de la forma

$$u = \sum_{i=1}^n u_i x_i$$

La notación de Einstein se implementa eliminando el signo de la sumas y entendiendo que en la expresión resultante un índice en alfabeto itálico indica la suma sobre todos los posibles valores del mismo

$$u = u_i x_i$$

, en donde por lo general  $n = 3$ , en el caso donde la suma sea con  $n = 4$  se usan letras griegas como  $\sigma, \mu, \dots$

A los índices en la notación anterior se definen como índices mudos, ya que estos pueden ser sustituidos por cualquier otra letra y el resultado final de la suma no depende de que letra usemos. Por otro lado también existen los índices libres los cuales corresponden al índice que se repite en cada uno de los términos de una expresión, a excepción de los términos constantes. Por ejemplo

$$S_r = a_r x_i + b_r x_j + c_r - 1$$

, en este caso los índices libres no se expanden en forma de sumas si no que representan un sistema de ecuaciones independientes ( $r = 3$ ), explícitamente sería

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 x_i + b_1 x_j + c_1 - 1 \\ S_2 &= a_2 x_i + b_2 x_j + c_2 - 1 \\ S_3 &= a_3 x_i + b_3 x_j + c_3 - 1 \end{aligned} .$$

En las notas por ejemplo usaremos esta notación para definir el producto escalar para dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  definido por  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i$ . Otro ejemplo típico es el operador de gradiente en este caso usaremos para las derivadas parciales la notación abreviada

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

donde el vector  $\vec{\nabla}\phi$  para un campo escalar arbitrario, en notación suma de Einstein queda (base canónica)  $\vec{\nabla}\phi = (\partial_i\phi)\hat{e}_i$ . Algo análogo puede hacerse para la divergencia de un campo vectorial  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_i F_i$ .

Ahora es útil definir la Delta de Kronecker, que en esta notación es equivalente a la identidad del álgebra de matrices:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Este símbolo nos permite eliminar sumas en caso de que aparezca, por ejemplo

$$\delta_{ij}a_j = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij}a_j = a_i.$$

### Símbolo Levi-Civita

Este símbolo queda definido por

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación par} \\ -1, & \text{si } (i, j, k) \text{ es una permutación impar} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.73)$$

de forma explícita

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= 1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} &= -1 \end{aligned} \quad (1.74)$$

La utilidad de este símbolo resulta de la siguiente observación

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1jk}a_jb_k &= \varepsilon_{123}a_2b_3 + \varepsilon_{132}a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2 \\ \varepsilon_{2jk}a_jb_k &= a_3b_1 - a_1b_3, \quad \varepsilon_{3jk}a_jb_k = a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

es evidente que estas expresiones están relacionadas con el producto vectorial de dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  cualesquiera, es decir

$$\varepsilon_{ijk}a_jb_k = (\vec{a} \times \vec{b})_i,$$

de forma equivalente

$$\varepsilon_{ijk}a_jb_k\hat{e}_i = (\vec{a} \times \vec{b}),$$

Evidentemente ahora podemos abreviar el rotacional de un campo vectorial  $\vec{F}$  (en base canónica) de la siguiente manera (muy útil para los cálculos)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \hat{e}_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k \hat{e}_i.$$

Para el caso general en cambio de coordenadas ortogonales el rotacional queda en términos de los factores de escala  $h_i$ ,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left[ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \right] \varepsilon_{ijk} h_j (\partial_j h_k F_k) \hat{e}_i.$$

Veamos ahora algunas identidades básicas del símbolo de Levi-Civita. Consideremos la triple suma

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk},$$

es evidente que en esta suma solo deben estar presentes los términos no nulos los cuales al estar al cuadrado son todos positivos por lo que la suma anterior debe ser igual a seis,  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$ .

Consideremos en otro caso que solo un término del símbolo  $\varepsilon_{ijk}$  es nulo

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ijk},$$

en este caso tenemos que la suma será no nula cuando  $l \neq m$  y  $j \neq k$  y distintos de  $i$ , por lo que solo puede haber una contribución a la suma la cual puede ser positiva o negativa ( $\pm 1$ ). Además como las variables  $l, m, j, k$  son independientes el resultado debe ser anti-simétrico, es decir, que el signo debe alternarse cuando se alterne una permutación de cualquiera de los dos símbolos. Esto nos dice que

$$\varepsilon_{ilm} \varepsilon_{ijk} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l.$$

Algunas otras propiedades se pueden demostrar que involucren el símbolo de Levi-Civita. A continuación demostraremos algunas identidades vectoriales usando las propiedades del símbolo 1.9.2 y 1.9.2.

### Identidad 1

$$\text{Demostrar } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Usando la notación de Einstein se puede escribir

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{lmn} a_m (\varepsilon_{njk} b_j c_k \hat{e}_l) = \varepsilon_{nlm} a_m (\varepsilon_{njk} b_j c_k \hat{e}_l),$$

usando la identidad 1.9.2

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j) (a_m b_j c_k \hat{e}_l) = ((b_j \hat{e}_j) a_m c_m - (c_k \hat{e}_k) a_m b_m)$$

regresando a la notación vectorial se tiene

$$((b_j \hat{e}_j) a_m c_m - (c_k \hat{e}_k) a_m b_m) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$



**Identidad 2**

Demostrar  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ .

Nuevamente usamos la identidad 1.9.2, primero usamos la notación de suma de Einstein

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \varepsilon_{ilm} c_l d_m$$

, usamos ahora la identidad

$$\begin{aligned} &= (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\ &= a_l c_l b_m d_m - a_m d_m b_k c_k \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

**Identidad 3**

Expandir  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \times \vec{G}$  en notación de Einstein y obtenga una identidad vectorial.

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{F} \times \vec{G})_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} F_l G_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{im} - \delta_{im} \delta_{il}) \partial_j (F_l G_m) \\ &= \partial_m (F_i G_m) - \partial_l (F_l G_i) \\ &= F_i (\partial_m G_m) + G_m \partial_m F_i - G_i (\partial_m F_m) - F_m \partial_m G_i \\ &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G}_i \end{aligned}$$



*“Al graduarse en la escuela, un joven estudiante que haya resistido el aburrimiento y la monotonía de sus deberes no tiene otra opción que perderse en alguna rama de la ciencia o la literatura completamente irrelevante para su trabajo.”*

– Coulomb

## **2.1. Conceptos fundamentales**

Uno de los conceptos fundamentales para la descripción de los fenómenos electromagnéticos es el de carga eléctrica. La carga eléctrica es una propiedad física de los cuerpos, atribuida a ellos precisamente para diferenciar (o, en general, describir) su comportamiento en las interacciones electromagnéticas. La experiencia ha mostrado que es posible describir las propiedades de la interacción electromagnética (por ejemplo, atracción, repulsión, o ausencia de fuerza) si se asume que la magnitud física llamada carga eléctrica puede adoptar valores positivos, negativos (o nulos), y que es una propiedad aditiva (es decir, que la carga eléctrica total de un sistema formado por otras cargas es la suma algebraica de las cargas constituyentes).

En general, la interacción electromagnética entre cargas puede ser bastante complicada. Por ejemplo, la fuerza que una carga ejerce sobre otra depende en general no sólo de la distancia entre ellas, sino también de sus velocidades y aceleraciones relativas, y presenta además efectos “de retardo” (esto quiere decir que la fuerza que una carga experimenta debido a la otra no depende de la posición, velocidad y aceleración de la otra en el mismo instante, sino que en tiempos anteriores). Por esto, comenzaremos estudiando

el caso más simple en que el sistema de cargas consideradas es estacionario. En esta situación los efectos de retardo y la dependencia con las velocidades y aceleraciones desaparecen, de modo que **las fuerzas electrostáticas dependen sólo de las distancias entre las cargas.**

Hoy en día sabemos que la carga está cuantizada, es decir, que existe una unidad fundamental de carga la cual está asociada a la carga de un electrón, el cual también tiene una masa específica, así como otras partículas que se muestran en la tabla.

Partículas	Carga	Masa (Kg)
protón	$+e$	$1,673 \times 10^{-27}$
neutrón	0	$1,675 \times 10^{-27}$
electrón	$-e$	$9,11 \times 10^{-31}$

La carga  $e$  fue medida experimentalmente por el físico estadounidense R. A. Millikana principio del siglo XX. EL llevó a cabo experimentos con los cuales pudo determinar el valor de la carga del electrón (carga eléctrica fundamental); para ello, empleó un dispositivo con el cual podía determinar la carga eléctrica de pequeñas gotas de aceite, analizando las diferentes fuerzas que se ejercen sobre una gota que se encuentra bajo la influencia de un campo eléctrico. El dispositivo que empleó Millikan, constaba de una cámara formada por un par de placas metálicas, un aspersor y un microscopio con graduación interior. Actualmente los grandes aceleradores de partículas han medido la carga del electrón de forma muy precisa con un valor  $e = 1,6021766208 \times 10^{-19}$  Culombios.

Para finalizar esta introducción, daremos una exposición breve de el papel que ha jugado la electrodinámica en el desarrollo de la física. En primer lugar la teoría electromagnética fue la primera en ser unificada, es decir, es posible deducir todas las leyes electromagnéticas de una sola ecuación (o cuatro ecuaciones). Además la electrodinámica exigió una formulación de la teoría newtoniana, a lo que hoy es conocido como relatividad especial, extendiendo el número de dimensiones físicas a cuatro. Posteriormente en base a lo anterior Einstein reformula la teoría de gravedad de fuerzas instantáneas de Newton en lo que hoy se conoce como teoría de relatividad general, que reemplaza el concepto de fuerza instantánea por una deformación del espacio-tiempo.

Posteriormente Kaluza-Klein extendió las dimensiones físicas a cinco en las ecuaciones de relatividad general y obtuvo una unificación de la gravedad de Einstein con la teoría electromagnética!. Lo cual no tuvo mucho éxito debido a la falta de evidencia empírica de esta quinta dimensión.

Posteriormente a mediados del siglo pasado, se descubrió la radioactividad y las partículas que componen el núcleo atómico. Esto dio como

resultado el surgimiento de la fuerza débil y la fuerza fuerte nuclear. La fuerza débil por un lado explicaba el decaimiento beta y por otro lado la fuerza fuerte explicaba la estructura nuclear (protones y neutrones). Una forma de decaimiento beta, consiste en el decaimiento de un neutrón a un protón más un electrón y un anti-neutrino (partícula sin carga muy ligera). Este proceso debería estar relacionado con la electrodinámica cuántica la cual debe explicar las interacciones electromagnéticas en el mundo subatómico (escalas de  $10^{-15}\text{m}$ ).

Después de vario esfuerzos los físicos, Enrico fermi, Feymann, Julian Schwinger, Shinichiro Tomonaga entre otros, lograron unificar la fuerza débil con el electromagnetismo. Para que esta unificación funcionara se propuso el boson de Higgs, el cual fue descubierto en 2012. Cabe añadir que el mecanismo para describir las dos fuerzas nucleares esta basado e inspirado en la formulación de la teoría electromagnética, a estos modelos se les conocen como teorías de Yang-Mills.

Esta gran esfuerzo se le conoce como modelo estándar de partículas, el cual ha sido comprobado experimentalmente con mucha precisión; por ejemplo se ha comprobado el valor teórico del momento dipolar anómalo del electrón con el valor experimental y estos coinciden en más de 14 cifras decimales!

Hasta aquí parece que el modelo es perfecto, sin embargo tiene muchas lagunas; por ejemplo solo es capaz de explicar el 4% del universo observable y no es capaz de unificar la teoría de gravedad, es decir, cuantizar la gravedad como se hizo con la teoría electromagnética. Esto entre otros hechos que no pueden ser explicados con el modelo estándar. Sin embargo este modelo fue concebido gracias al enfoque que tuvo a mediados del siglo XIX el físico James. Clerk Maxwell en unificar la teoría de los fenómenos electromagnéticos en cuatro ecuaciones.

### 2.1.1. Antecedentes

#### Efecto triboeléctrico

El efecto triboeléctrico es un fenómeno en el cual la mayoría de los materiales tienen la tendencia de entregar electrones y quedar cargados positivamente (+) o atraerlos y quedar cargados negativamente (-) cuando son golpeados o frotados con otro material. Aunque dependiendo de la combinación de materiales, un mismo material puede quedar cargado positiva o negativamente. La polaridad y magnitud de dicha carga difieren según el material. El efecto triboeléctrico es estudiado por primera vez por el griego Tales de Mileto (624 AC – 546 AC), a quien se lo considera como el primer

filósofo de la historia de la filosofía occidental. Tales observó que al frotar un trozo de ámbar (resina vegetal fósil) con piel o con lana se obtenían pequeñas cantidades de cargas eléctricas que atraían pequeños objetos. Más tarde, gracias a trabajos realizados por el físico y médico inglés William Gilbert (1544 - 1603) surge el término electricidad para referirse a este fenómeno, que proviene de la palabra griega *élektron* que significa precisamente ámbar.

### **Electroscopio**

El electroscopio es un instrumento para detectar la presencia y magnitud de carga eléctrica de un cuerpo. El primer electroscopio fue inventado precisamente por William Gilbert y consistía de una aguja de metal, la cual podía girar libremente con un eje en su centro (tal como lo hace una aguja de una brújula). Los actuales electroscopios consisten de un soporte vertical de metal conductor sobre el cual se apoya una hoja de metal conductor (en nuestro caso, la hoja es reemplazada con un “sorbete” de metal) la cual puede pivotar sobre un eje horizontal colocado en el centro. Al frotar una de las varillas sobre el paño, ésta se cargará eléctricamente debido al efecto triboeléctrico, con una cantidad de carga cuyo signo dependerá del material de la varilla y del paño, utilizados. Si se acerca la varilla (cargada eléctricamente) a la parte superior del electroscopio se podrá observar como el sorbete de metal gira alrededor del pivote de manera tal que los extremos se alejan del soporte.

### **Balanza de Coulomb**

La balanza de Coulomb es un tipo de balanza de torsión muy sensible que puede ser utilizada para investigar la fuerza que aparece entre dos cargas eléctricas. Charles Augustin de Coulomb (1736-1806) fue un ingeniero militar francés que trabajó para Napoleón y realizó importantes contribuciones en el campo de la elasticidad y la resistencia de materiales. En Física es conocido por la ley de Coulomb, aunque en el campo de la electrostática estudió las propiedades eléctricas de los conductores y demostró que si un conductor en equilibrio electrostático está cargado, su carga se distribuye a lo largo de su superficie. En el año 1777 Charles Coulomb diseñó una balanza de torsión de gran sensibilidad formada por una varilla ligera que está suspendida de un largo y delgado hilo con dos esferas equilibradas a cada extremo. Con ayuda de esta balanza estableció de forma cuantitativa la ley del inverso del cuadrado de la distancia para la interacción entre cargas eléctricas puntuales, conocida como ley de Coulomb.

#### **2.1.2. Experiencia de Robert Symmer**

Robert Symmer un físico de 1759, hizo observaciones sobre los fenómenos electrostáticos importantes, en las que destaca una observación bastante

peculiar. El tenía la costumbre de usar dos pares de medias al mismo tiempo, un par lo usaba por comodidad y el otro par de seda por apariencia. Cuando él se quitaba estas medias, observaba que estas emitían sonidos de descargas eléctricas e incluso observaba destellos eléctricos (si esto lo hacía en la noche). Una vez que estas medias estaban separadas y fuera de la pierna, Robert se dio cuenta que estas medias se inflaban y adoptaban la forma del pie y además presentaban fuerzas de atracción y repulsión entre ellas a una distancia de aproximadamente 30 cm.

Cuando se hacía este experimento con dos medias negras y otro par de medias blancas, se apreciaba un fenómeno muy curioso: Las medias del mismo color se repelían y las de color opuesto se atraían. Y este fenómeno fue bastante raro para Robert, el cual repitió este experimento varias veces obteniendo los mismos resultados. En este caso parece que la carga tiene preferencia por los colores. Seguramente el lector pueda dar explicación a este fenómeno.

### 2.1.3. Ley de Coulomb

En 1785 Coulomb<sup>1</sup> establece experimentalmente que la fuerza entre dos cargas muy pequeñas comparadas con la distancia que las separa (“cargas puntuales”) es aproximadamente proporcional a la magnitud de las cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas y en la dirección que las une. Finalmente el sentido de la fuerza es tal que dos cargas de igual signo se repelen y dos de signos opuestos se atraen. Este resultado experimental, y por consiguiente necesariamente aproximado, es la base de la teoría de la interacción electrostática. Esta teoría asume entonces que la fuerza entre cargas “puntuales” es exactamente inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa y en la dirección de la línea que las une, de modo que

$$F_i \propto \underbrace{\frac{qq'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}}_{\text{magnitud}} \cdot \underbrace{\frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}_{\text{vector unitario}}. \quad (2.1)$$

donde  $F_i$  denota la  $i$ -ésima componente de la fuerza  $\vec{F} = F_1\hat{e}_{x_1} + F_2\hat{e}_{x_2} + F_3\hat{e}_{x_3}$  (notase que hemos reemplazado  $x = x_1, y = x_2$  y  $z = x_3$ ). Esto nos permitirá simplificar nuestra notación. Podemos por tanto escribir

$$F_i = k \frac{qq'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \cdot \frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.2)$$

El valor de la constante  $k$  depende del sistema de unidades usado para medir magnitud de las cargas eléctricas. Nosotros utilizaremos el sistema

<sup>1</sup>Charles Augustin de Coulomb: físico e ingeniero francés (1736-1806).

internacional SI (MKSA) donde la constante  $k$  es denotada como<sup>2</sup>

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

y donde  $\epsilon_0$  se conoce como la permitividad del vacío, y entonces

Ley de Coulomb

$$F_i = \frac{qq' (x_i - x'_i)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (2.4)$$

En el sistema SI, la constante  $k$  tiene el valor

$$k = c^2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}, \quad (2.5)$$

en que  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Su valor es  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ . Con esto  $k \approx 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ ,  $\epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ .

La expresión (2.4) es conocida como ley de Coulomb. Adicionalmente, se asume que la fuerza que ejerce un conjunto de  $N$  cargas puntuales  $q^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , en posiciones  $x_i^{(\alpha)}$  sobre una carga  $q$  con posición  $x_i$  es

$$F_i = \sum_{\alpha=1}^N \frac{qq^{(\alpha)} (x_i - x_i^{(\alpha)})}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \frac{(x_i - x_i^{(\alpha)})}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3}. \quad (2.6)$$

La suposición que esta fuerza sea la suma (vectorial) de las fuerzas individuales que actuaría sobre la carga  $q$  debido a cada una de las cargas  $q^{(\alpha)}$  es llamado principio de superposición. Note que, como su nombre lo indica, este es un principio en el que se basa la teoría electromagnética, ya que no es necesario a priori que la interacción electrostática respete esta propiedad. En otras palabras, podría ocurrir (o haber ocurrido) que la fuerza que dos cargas ejercen sobre una tercera no fuese exactamente la suma vectorial de las fuerzas que cada una de ellas ejerce individualmente. Por ejemplo, hoy sabemos que esto último es lo que efectivamente ocurre con la interacción gravitacional (¡no satisface el principio de superposición!). En la teoría electromagnética se asume que la superposición es satisfecha en forma exacta. Por ejemplo si no se siguiera la ley de superposición podríamos tener la fuerza entre dos partículas en un sistema de tres, como:

$$\vec{F}_{12} = q_1q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(1 + \frac{q_3^2}{q_1q_2} \frac{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}{\|(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 - \vec{r}_3\|^3})\|}, \quad (2.7)$$

donde si  $\vec{r}_3 \rightarrow \infty$  o  $q_3 \rightarrow 0$  se recupera la fuerza entre dos cargas de la ecuación 2.6.

<sup>2</sup>En el sistema gaussiano de unidades (cgs) se define  $k = 1$  de modo que la unidad de carga no es independiente:  $[q] \stackrel{\text{cgs}}{=} \text{cm}^{3/2}\text{g}^{1/2}\text{s}^{-1}$ . Esta unidad es llamada una unidad electrostática (esu) o un statCoulomb.



Como veremos, una consecuencia de este principio es que las ecuaciones que relacionan los campos eléctricos (y sus respectivas fuerzas) con las distribuciones de carga que las producen están descritas por ecuaciones (diferenciales y/o integrales) lineales.

Para una distribución continua de cargas podemos considerar un elemento de volumen  $dV'$  conteniendo una carga  $dq' = \rho(x')dV'$ , donde  $\rho(x')$  es la densidad (volumétrica) de carga (carga por unidad de volumen). Usando el principio de superposición podemos escribir la fuerza total que esta distribución ejerce sobre una carga (puntual) de prueba  $q$  como

$$F_i = \sum_i^{\infty} dF_i = \int_V dF_i \quad (2.8)$$

$$= \int_V \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dq', \quad (2.9)$$

es decir,

$$F_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (2.10)$$

Análogamente, podemos describir cargas distribuidas en (regiones que puedan aproximarse por) una superficie y/o curva usando la densidad superficial de carga  $\sigma(x')$  (carga por unidad de área) y/o la densidad lineal de carga  $\lambda(x')$  (carga por unidad de longitud), de modo que  $dq' = \sigma(x')dS$  y  $dq' = \lambda(x')d\ell$ , respectivamente.

#### 2.1.4. Campo eléctrico

El campo eléctrico  $E_i(\vec{x})$  en un punto  $x_i$  es definido como la fuerza por unidad de carga sobre una carga muy pequeña en tamaño y magnitud (“carga de prueba puntual”)  $q$  situada en la posición  $x_i$ , es decir,

$$E_i(\vec{x}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F_i}{q}. \quad (2.11)$$

Note que el proceso límite  $q \rightarrow 0$  es necesario puesto que el uso de una carga  $q$  de forma y magnitud arbitraria en general (mediante la fuerza de Coulomb) modificará la distribución de cargas original. Si la carga  $q$  es cada vez más pequeña en extensión y magnitud, entonces ésta modificará cada vez menos la distribución de carga original. En el límite  $q \rightarrow 0$ , que ciertamente es una abstracción ya que en la práctica no existen cargas puntuales, ni tampoco cargas de magnitud arbitrariamente pequeña, el cociente  $F_i/q$  será independiente de la carga de prueba usada, y describirá por lo tanto una cantidad dependiente sólo de la distribución de cargas considerada. Esto permite entonces considerar al campo eléctrico como el campo generado por

la distribución de cargas.

Con estas consideraciones, tenemos entonces que el campo eléctrico generado por un conjunto de cargas puntuales  $q^{(\alpha)}$  es dado por

$$E_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \frac{(x_i - x_i^{(\alpha)})}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}|^3}. \quad (2.12)$$

Similarmente, para una distribución volumétrica de cargas:

$$E_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (2.13)$$

En general, preferiremos la descripción de la distribución de cargas en términos de la densidad volumétrica  $\rho(\vec{x})$ , ya que a partir de ella podemos recobrar rápidamente los otros casos de interés. Por ejemplo, podemos recobrar el resultado para el conjunto de cargas puntuales (2.12) a partir de (2.13) si consideramos

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)}). \quad (2.14)$$

donde  $\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}^{(\alpha)})$ , es la función Delta de Dirac en tres dimensiones vista en la parte introductoria.

### 2.1.5. Líneas de campo eléctrico

En electrodinámica es útil introducir el concepto de líneas de campo. En el caso electrostático, asociado a cada configuración de campo eléctrico, descrito por el campo  $E_i(\vec{x})$ , es posible definir líneas de campo eléctrico. Cada una de estas curvas, puede modelarse usando una parametrización de la forma  $x_i = x_i(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro real. Las líneas de campo son definidas como aquellas tales que sus vectores tangentes en cada punto son paralelos al vector campo eléctrico. Recordando que el vector tangente a la curva es la derivada de esta con respecto al parámetro  $\lambda$ . Esto es equivalente a la condición,

$$\text{Líneas de campo} \quad \frac{dx_i}{d\lambda}(\lambda) = E_i(\vec{x}(\lambda)). \quad (2.15)$$

Note que, en general, es posible considerar un factor adicional al lado derecho de esta expresión (por ejemplo,  $\alpha(\lambda)E_i(\vec{x}(\lambda))$  en lugar de  $E_i(\vec{x}(\lambda))$ ), sin embargo la función  $\alpha(\lambda)$  puede siempre ser “normalizada” al valor 1 redefiniendo convenientemente el parámetro para describir la curva.

Más explícitamente, la condición (2.15) adopta, en coordenadas cartesianas y en tres dimensiones, la forma

$$\frac{dx}{d\lambda}(\lambda) = E_x(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (2.16)$$

$$\frac{dy}{d\lambda}(\lambda) = E_y(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (2.17)$$

$$\frac{dz}{d\lambda}(\lambda) = \vec{E}_z(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda)), \quad (2.18)$$

de modo que define, dadas las componentes del campo  $E_x(x, y, z)$ ,  $E_y(x, y, z)$  y  $E_z(x, y, z)$ , un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas, de primer orden, para las incógnitas  $x(\lambda)$ ,  $y(\lambda)$  y  $z(\lambda)$ .

Una línea de campo particular queda determinada por la solución del sistema de ecuaciones que satisface una determinada condición inicial, por ejemplo  $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ , donde  $\vec{x}_0$  es un punto dado del espacio. La correspondiente solución  $\vec{x}(\lambda; \vec{x}_0)$  describirá la línea de campo que pasa por el punto  $\vec{x}_0$ .

Por ejemplo para una carga puntual en el origen y considerando el plano  $z = 0$  se puede formar la ecuación:  $\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x} = \frac{y}{x}$ , cuya solución es una recta de la forma  $y/x = k$  con  $k$  una constante.

### 2.1.6. Potencial eléctrico

Estableceremos ahora el concepto de potencial electrostático, el cual se deriva de la ley de Coulomb para una carga puntual y se generaliza para una distribución arbitraria por medio del principio de superposición. Notamos que se cumple (donde denotamos  $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$ ):

$$\frac{x_i - x'_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \equiv -\partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right), \quad (2.19)$$

podemos escribir (2.13) como

$$E_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{(x_i - x'_i)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (2.20)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (2.21)$$

$$= -\partial_i \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right] \quad (2.22)$$

$$= -\partial_i \phi, \quad (2.23)$$

es decir,

$$\boxed{\vec{E}(x) = -\vec{\nabla}\phi(x)}, \quad (2.24)$$

donde hemos definido el potencial eléctrico

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \text{constante.} \quad (2.25)$$

Note que es posible agregar una constante arbitraria a la definición del potencial, por lo que el significado físico está solo implicado en la **diferencia de potencial**. Por otro lado, es directo verificar que, como consecuencia directa de (2.24), todo campo electrostático es irrotacional, es decir, su rotacional es nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}. \quad (2.26)$$

Usando (2.24), podemos expresar el potencial electrostático como una integral de línea del campo eléctrico:

$$\phi(\vec{x}) = \phi(\vec{x}_0) - \int_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \vec{E} \cdot d\vec{x}. \quad (2.27)$$

Debido a (2.26) la integral (2.27) es independiente de la trayectoria que une los puntos  $\vec{x}_0$  y  $\vec{x}$ , o equivalentemente,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{x} = 0, \quad (2.28)$$

para toda curva cerrada  $\mathcal{C}$ . Note además que de esta propiedad se desprende que las líneas de campo electrostático no pueden ser cerradas. En efecto, si existiese una línea de campo eléctrico cerrada  $\mathcal{C}$ , entonces podemos evaluar  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{x}$  sobre esta curva. Pero sobre una línea de campo se satisface que (2.15), de modo que

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot d\vec{x} \quad (2.29)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\lambda} d\lambda \quad (2.30)$$

$$= \oint_{\mathcal{C}} \left| \frac{d\vec{x}}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \quad (2.31)$$

$$> 0, \quad (2.32)$$

en contradicción con (2.28).

Note que como consecuencia de (2.24) o, equivalentemente, de (2.27) el vector campo eléctrico es siempre normal a las superficies equipotenciales (definidas como aquellos puntos que satisfacen  $\phi(\vec{x}) = \text{cte.}$ ) y su sentido es siempre hacia regiones de menor potencial.

## 2.2. Ley de Gauss

Usando (2.21) podemos calcular la divergencia del campo eléctrico:

$$\partial_i E_i = -\partial_i \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \right] \quad (2.33)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \partial_i \partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (2.34)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (2.35)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \left[ -4\pi\delta^{(3)}(x_i - x'_i) \right] dV' \quad (2.36)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x') \delta^{(3)}(x_i - x'_i) dV' \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x), \quad (2.38)$$

Donde hemos usado las propiedades de la delta de Dirac. Obtenemos así la **forma diferencial de la ley de Gauss**<sup>3</sup>:

$$\boxed{\partial_i E_i = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}.} \quad (2.39)$$

Usando el teorema de la divergencia para un volumen  $V$  arbitrario con borde  $S = \partial V$ , obtenemos

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x') dV', \quad (2.40)$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_V, \quad (2.41)$$

donde  $q_V$  es la carga neta en el volumen  $V$ . En notación vectorial:

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} q_V.} \quad (2.42)$$

Esta es la **forma integral de la ley de Gauss**. Es importante recordar que la ley de Gauss en su forma integral es válida para todo volumen  $V$  y su correspondiente superficie "gaussiana"  $\partial V$ . Debido a esta propiedad, la forma integral de la ley de Gauss resulta particularmente eficiente para determinar campos eléctricos en situaciones altamente simétricas, donde es posible elegir el volumen de modo que  $\vec{E}$  sea constante sobre  $\partial V$  (o al menos, sobre partes de  $\partial V$ ).

<sup>3</sup>Carl Friedrich Gauss, (1777-1855): matemático, astrónomo y físico alemán.

**Ejemplo**

Tomemos como ejemplo el caso de una esfera de radio  $R$  con densidad de carga uniforme  $\rho_0$ . Consideremos primero la región interior de la esfera. Como la carga se distribuye uniforme en toda la esfera, esperamos que en coordenadas esféricas el campo eléctrico tenga simetría con respecto a los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  (simetría esférica). Esto implica que el campo eléctrico solo depende de la coordenada  $r$ .

Tomemos una esfera imaginaria como superficie gaussiana (esta es una superficie cerrada) que este dentro de la esfera, es decir que satisfaga  $r < R$ . Apliquemos la ley de Gauss a esa superficie y notemos que la carga encerrada debe ser  $q_V = \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3, \quad (2.43)$$

por otro lado por tratarse de una esfera usamos el diferencial de superficie en esféricas 1.69 en donde solo contribuye el término;  $d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \hat{e}_r$ , esto implica

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3, \quad (2.44)$$

llegando al resultado  $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \hat{e}_r$ . Para el caso exterior de la esfera se procede de forma análoga, con la diferencia que la carga total es:  $q_V = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ , procediendo de forma semejante se llega:  $\vec{E} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r$ .

**2.2.1. Ecuación de Poisson y Laplace**

Usando (2.24) y (2.39) obtenemos ( $\vec{E} = \vec{\nabla}\phi$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x)$ )

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (2.45)$$

es decir, el potencial eléctrico satisface la **ecuación de Poisson**<sup>4</sup>:

Ec. de Poisson  $\boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.46)$

Como consecuencia, el potencial electrostático en una región libre de cargas satisface la **ecuación de Laplace**<sup>5</sup>:

Ec. de Laplace  $\boxed{\nabla^2 \phi = 0} \quad (2.47)$

Demostraremos que la ecuación 2.25 es consistente con la ecuación 2.46.

<sup>4</sup>Siméon Denis Poisson (1781-1840): matemático francés.

<sup>5</sup>Pierre Simon Laplace (1749-1827): matemático, físico y astrónomo francés.

$$\nabla^2 \phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') (-4\pi\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')) dV' = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.48)$$

También notamos que la condición de borde para el potencial debe ser:  $\phi(\vec{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . Es decir hemos resuelto un caso particular de la ecuación de Poisson con condición de Dirichlet.

### 2.2.2. Condiciones de frontera para el campo eléctrico en una interfase

La interfase entre dos regiones separadas por una superficie  $S$  que posee una densidad superficial de carga  $\sigma(x)$ . Para estudiar las condiciones que

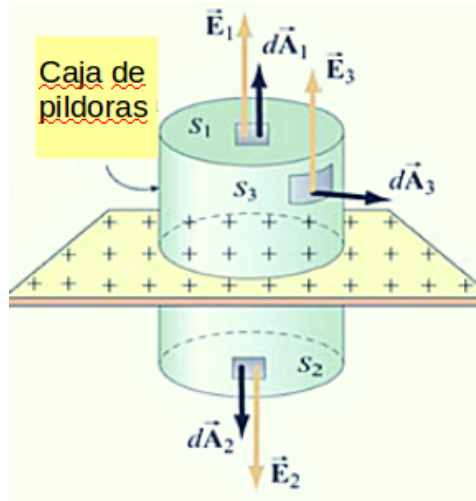


Figura 2.1: Caja de Píldoras, en una superficie.

el campo eléctrico satisface en esta interfase, aplicamos primero la ley de Gauss, a la superficie gaussiana mostrada en la figura 2.1, la cual se conoce como caja de píldoras.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S} + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2.49)$$

$$= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{n})\Delta S + (\vec{E}_2 \cdot \hat{n})\Delta S + 0 \quad (2.50)$$

$$= \frac{\sigma S}{\epsilon_0}, \quad (2.51)$$

donde  $\Delta S$  es una superficie, cuyo vector unitario  $\hat{n}$  está dirigido desde la cara 1 a la cara 2, que contiene una densidad de carga  $\sigma(\vec{x})$  [ $C/m^2$ ], y los campos eléctricos a cada lado de la superficie.

Por tanto, obtenemos

$$\boxed{\vec{E}_2 \cdot \hat{n} - \vec{E}_1 \cdot \hat{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \quad (2.52)$$

Por otro lado, aplicando (2.28) a una curva obtenemos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_3} \vec{E} \cdot d\vec{x} + \int_{C_4} \vec{E} \cdot d\vec{x} \quad (2.53)$$

$$= -(\vec{E}_1 \cdot \hat{t})\ell + (\vec{E}_2 \cdot \hat{t})\ell + 0 + 0 \quad (2.54)$$

$$= 0. \quad (2.55)$$

De aquí encontramos que

$$\boxed{\vec{E}_2 \cdot \hat{t} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}} \quad (2.56)$$

Ya que la dirección del vector  $\hat{t}$  es arbitraria (pero siempre tangencial a la superficie  $S$ ), la condición (2.56) implica que las componentes tangenciales (2 componentes linealmente independientes) del campo eléctrico permanecen inalteradas al cruzar la superficie  $S$ .

**Con la ley de Gauss y la ley  $\nabla \times E = \vec{0}$ , junto con las condiciones de borde podemos resolver cualquier problema de electrostática. Es decir si conocemos la distribución de carga podemos encontrar el campo que la genera.**

### 2.2.3. Teorema de Earnshaw y Teorema de Thompson

Ya que hemos puesto el aparato matemático para resolver cualquier problema de electrostática, nos centraremos en dos resultados generales que se pueden derivar de las ecuaciones fundamentales anteriores.

#### Teorema de Earnshaw

Podríamos preguntarnos si dado un sistema de cargas podemos mantenerlo en equilibrio mecánico con solo contar las fuerzas electrostáticas, es decir, si las ecuaciones (2.24) y (2.39) tienen un mínimo. La respuesta a esta cuestión se conoce como teorema de Earnshaw y establece que: que un conjunto de cargas puntuales no se puede mantener en un estado de equilibrio mecánico estacionario exclusivamente mediante la interacción electrostática de las cargas.

La demostración de este teorema es la siguiente: Consideremos un espacio libre de cargas en donde por ley de Gauss se debe satisfacer  $\nabla^2\phi = 0$ .



Como ya se demostró en la sección 1.3.1 que esto implica que la función promedio sobre una esfera infinitesimal es igual a la función evaluada en cero  $\langle \phi(\vec{x}) \rangle = \phi(\vec{0})$ . Ahora, hagamos un razonamiento de reducción al absurdo. Tomemos el caso de que existe un punto crítico el cual puede ser máximo (cargas negativas). Ahora si existiera un punto máximo  $x_0$  de potencial se debe satisfacer  $\phi(\vec{x}_0) \geq \phi(\vec{x})$  esto implica  $\langle \phi(\vec{x}) \rangle \leq \phi(x_0)$ , en el caso análogo de un mínimo se tendría la desigualdad contraria y por ende  $\nabla^2 \phi \neq 0$  lo cual es una contradicción. Esto demuestra el teorema.

Esto tiene como consecuencia que como veremos más adelante las fuerzas que mantienen a las cargas en los conductores no son de origen electrostático. En este caso las fuerzas se originan por principios que rige la mecánica cuántica.

### Teorema de Thompson

Este teorema <sup>6</sup> responde a la pregunta sobre como se distribuye la energía electrostática en un conductor. Y como es de esperarse esta distribución esta sujeta a un principio extremal de mínima energía, lo cual se enuncia más formalmente en lo siguiente: Las cargas colocadas en un sistema fijo conductores incrustados en un dieléctrico se distribuirán en las superficies de estos conductores de tal manera que la energía del campo electrostático resultante sea mínima.

La demostración es la siguiente; Sean los  $S_i$  conductores con  $i = 1, 2, \dots$  con carga  $q_i$ . Para cada conductor se cumplen las ecuaciones;

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (2.57)$$

con las condiciones de borde,

$$\phi_i = 0, \quad \int_{S_i} \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_i, \quad (2.58)$$

donde por ley de coulomb el potencial tiende a  $1/r$  en el infinito. Para demostrar el teorema supondremos que existen potenciales  $\phi'$  y campos  $\vec{E}'$  y  $\vec{D}'$  tales que satisfacen las ecuaciones 2.57 pero no satisface  $\phi'_i = 0$  en 2.58. Combinando las dos últimas ecuaciones

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}') = 0, \quad \int_{S_i} (\vec{D} - \vec{D}') \cdot d\vec{S} = 0, \quad (2.59)$$

usando la fórmula para la energía electrostática general 2.258 y suponiendo que el medio es L.H.I  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , tenemos para las dos situaciones

<sup>6</sup>Este apartado requiere de material que se verá más adelante, se recomienda regresar a la demostración una vez se halla asimilado este.

$$U' - U = \frac{1}{2} \left[ \int_{R^3} (\vec{E}' \cdot \vec{D}') - (\vec{E} \cdot \vec{D}) dV \right], \quad (2.60)$$

podemos reescribir la ecuación anterior como

$$U' - U = \frac{1}{2} \left[ \int_{R^3} ((\vec{E}' - \vec{E}) \cdot (\vec{D}' - \vec{D})) + (\vec{E} \cdot (\vec{D}' - \vec{D})) dV \right], \quad (2.61)$$

para el último término usamos la identidad vectorial  $\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{F}) = \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{F}$ , con  $\psi = -\phi$  y  $\vec{F} = (\vec{D} - \vec{D}')$ , entonces el último término es

$$\int_{R^3} \left[ \phi \vec{\nabla} \cdot (\vec{D} - \vec{D}') - \vec{\nabla} \cdot (\phi (\vec{D} - \vec{D}')) dV \right],$$

de aquí es obvio que por 2.57 el primer término se anula y para el segundo usamos el teorema de divergencia y las propiedades 2.58,

$$\Rightarrow - \int_{S_i} (\phi) (\vec{D} - \vec{D}') |_{S_i} d\vec{S} = 0.$$

Finalmente podemos decir que 2.61 se puede escribir como

$$U' - U = \frac{1}{2} \left[ \int_{R^3} \varepsilon (E' - E)^2 dV \right] \geq 0, \quad (2.62)$$

esto prueba el teorema, ya que como  $U' \geq U$  entonces solo se da la igualdad cuando el potencial  $\phi' = 0$  ( $\vec{E}' = \vec{E}$ ) en el conductor.

#### 2.2.4. Conductores

Los **conductores** son materiales eléctricamente neutros a nivel macroscópico, poseen intrínsecamente una enorme cantidad de electrones “libres” (es decir, no ligados a los átomos, y que pueden moverse a través del conductor tan pronto como exista un campo eléctrico que induzca su movimiento) aptos para conducir la electricidad. La carga de estos electrones es neutralizada (a escala macroscópica) por la de los protones que están en los núcleos, que pueden considerarse fijos. Como ejemplo de conductores podemos mencionar a los metales y a los electrolitos (también conocidos como soluciones iónicas).

Si un conductor es cargado, o está en presencia de cargas externas, los electrones rápidamente<sup>7</sup> se desplazan hasta una situación de equilibrio, es decir, un estado estacionario. Por el teorema de Earnshaw la carga se debe distribuir en todo el conductor. En este estado el campo eléctrico (macroscópico) en el interior del conductor debe anularse ya que de otro modo la

<sup>7</sup>Como veremos más adelante el tiempo de relajación es del orden de  $\tau = \varepsilon/\sigma$  donde  $\varepsilon$  es la constante dieléctrica del material y  $\sigma$  su conductividad. Por ejemplo, para el cobre  $\tau \approx 10^{-19}$ s.

fuerza sobre ellos sería no nula, induciendo movimiento. Por tanto, en situación estacionaria  $\vec{E} = \vec{0}$  en el interior de los conductores. Como consecuencia de la ley de Gauss, la densidad de carga en el interior del conductor se anula cuando éste alcanza su estado estacionario. En otras palabras, un conductor en estado estacionario distribuye su carga neta sobre su superficie. De aquí podemos concluir rápidamente que dentro de un conductor el potencial debe ser constante (esta constante es arbitraria y se asumirá que es cero). Así en este caso particular las ecuaciones que describen a un conductor cargado con carga neta  $Q$  son

$$\nabla^2\phi = 0, \quad \phi|_{\partial V} = 0, \quad \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.63)$$

donde  $V$  y  $\partial V$  son el volumen y la frontera del conductor respectivamente.

Aplicando las condiciones de borde (2.52) y (2.56) a la interfase del conductor, y tomando en cuenta que en este caso interno  $\vec{E}_1 = \vec{0}$ , encontramos que en cada punto de la superficie arbitrariamente cercana (exterior) del conductor

$$\vec{E}_2(x) = \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0} \hat{n}(x), \quad (2.64)$$

es decir, que el campo eléctrico es normal a la superficie, y proporcional a la densidad de carga en cada punto de ésta. **El potencial eléctrico, por otro lado, es necesariamente constante tanto dentro del conductor como sobre su superficie.**

Evidentemente las ecuaciones 2.63 son ecuaciones integrales-diferenciales y en general pueden llegar a ser complicadas, los métodos generales para resolverlas esta fuera del alcance de este texto introductorio. Veremos más adelante un ejemplo sencillo donde podamos resolver estas ecuaciones. Notase que la distribución de carga en la superficie no esta dada *a priori*, lo único que se tiene de entrada es la carga total  $Q$  en la ley de Gauss.

### 2.2.5. Sobre discontinuidad de los campos

Idealmente, al menos clásica y macroscópicamente, la distribución de carga descrita por la densidad volumétrica  $\rho(\vec{x})$  debiese ser una función finita y continua en todo punto. Como consecuencia, el campo eléctrico y el potencial serían, de acuerdo a (2.13) y (2.25), también funciones finitas y continuas. Sin embargo, comúnmente es conveniente idealizar la distribución de cargas, considerando que ésta está limitada a una superficie bidimensional (es decir, de sección transversal despreciable). Este caso corresponde a considerar una densidad volumétrica  $\rho$  singular (discontinua y divergente)<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Por ejemplo, la densidad volumétrica correspondiente a una carga distribuida en todo el plano  $xy$ , con densidad superficial de carga  $\sigma(x, y)$  puede escribirse como  $\rho(x, y, z) =$

En este caso, el campo eléctrico poseerá, en general, discontinuidades en la superficie donde  $\rho$  es singular, tal como analizamos en la sección 2.2.2, pero será finito en todo punto. El potencial, por otro lado, será una función continua y diferenciable por tramos. En resumen, para distribuciones de carga singulares que incluyan distribuciones superficiales de carga, el potencial puede siempre considerarse como una función continua, el campo eléctrico (proporcional a las derivadas del potencial) puede tener discontinuidades, mientras que las segundas derivadas del potencial (proporcionales a las primeras derivadas del campo eléctrico y, a través de la ecuación de Poisson (2.46), ligadas a la densidad volumétrica de carga) pueden poseer regiones (superficies) singulares. En el caso de que la distribución de carga se modele incluyendo cargas puntuales o líneas de carga, el potencial ya no será finito en todo punto.

### 2.2.6. Unicidad de la solución

A continuación probaremos que la solución de la ecuación de Poisson es única (salvo una constante aditiva), en una región  $V$ , para valores dados del potencial o de la componente normal del campo en la frontera<sup>9</sup>  $\partial V$ . Para esto, asumimos que existen dos soluciones distintas de (2.46) en  $V$ ,  $\phi_1(\vec{x})$  y  $\phi_2(\vec{x})$ , que satisfacen las mismas condiciones de borde, es decir, su valor es conocido en  $\partial V$  o bien su derivada normal es conocida en esta frontera.

Definimos la diferencia  $U(\vec{x}) = \phi_1(\vec{x}) - \phi_2(\vec{x})$  que será entonces una solución de la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 U = 0$ . En la frontera  $\partial V$  esta función satisface  $U = 0$  o bien  $\partial U / \partial n = 0$ , ya que asumimos que  $\phi_1$  y  $\phi_2$  satisfacen las mismas condiciones de borde (tipo Dirichlet, o bien tipo Neumann). Usamos ahora la identidad<sup>10</sup>

$$\int_V \left[ |\vec{\nabla} U|^2 + U \nabla^2 U \right] dV \equiv \oint_S U \frac{\partial U}{\partial n} dS, \quad (2.65)$$

que puede ser verificada fácilmente usando el teorema de Gauss. En nuestro caso, dada la EDP y las condiciones de borde que  $U$  satisface, la identidad implica que

$$\int_V |\vec{\nabla} U|^2 dV = 0. \quad (2.66)$$

Como consecuencia la función  $U$  debe ser constante<sup>11</sup>, por lo que las dos soluciones  $\phi_1$  y  $\phi_2$  sólo pueden diferir por una constante, representando la

---

$\sigma(x, y)\delta(z)$ .

<sup>9</sup>Condiciones de borde tipo Dirichlet o tipo Neumann, respectivamente.

<sup>10</sup>Esta identidad es un caso particular de la así llamada primera identidad de Green.

<sup>11</sup>En principio, esto sería válido excepto (a lo sumo) en un conjunto de medida cero. Sin embargo, esta posibilidad queda descartada si el potencial es una función continua.

misma solución física<sup>12</sup>.

Es importante notar que este resultado implica que, en general, es inconsistente intentar encontrar una solución de la ecuación de Poisson imponiendo simultáneamente el valor del potencial y de su derivada normal en la frontera.

Note que los teoremas anteriores implican que el campo electrostático en una región  $V$  queda totalmente determinado por la densidad de carga en el interior del volumen  $V$ , y por las condiciones de borde en la frontera  $\partial V$ . Una de las múltiples consecuencias de este hecho es que el campo al interior de un volumen de forma arbitraria, cuya frontera es mantenida a un potencial fijo (por ejemplo, por medio de un conductor puesto “a tierra”) es independiente de la distribución de cargas en el exterior. De esta forma, es posible aislar una región de las influencias eléctricas externas (“jaula de Faraday”).

Como parte adicional demostraremos en esta sección el teorema de Helmholtz de la sección 1.92. Empezando por la separación del campo vectorial  $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , donde  $\phi$  es un campo escalar y  $\vec{A}$  vectorial.

Notase que si hacemos la sustitución  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ , donde  $\psi$  es un campo escalar de clase  $C^2$ . Esta variable adicional nos permite añadir una restricción al campo vectorial  $\vec{A}$ , es como si existiera una simetría abstracta interna en el campo vectorial. A esto se le conoce como invarianza de norma "Gauge". Podemos imponer cualquier restricción sobre el campo vectorial, en este caso veremos que nos será conveniente usar  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  (conocida como norma de coulomb). Si aplicamos el rotacional al campo  $\vec{F}$  y aplicamos la norma de Coulomb resulta,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \vec{g}. \quad (2.67)$$

Ahora si aplicamos la divergencia a  $\vec{F}$  resulta,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \nabla^2 \phi = h. \quad (2.68)$$

Así hemos obtenido ecuaciones que involucran un **laplaciano** y si además añadimos condiciones de borde tipo Dirichlet o Newmann por el teorema de unicidad para el laplaciano entonces  $\phi$  y  $\vec{A}$  son únicos salvo una constante, por ende  $\vec{F}$  es único.

---

<sup>12</sup>Más aún, para condiciones de borde tipo Dirichlet, esta constante es necesariamente nula.

### 2.3. Método de las imágenes

Como vimos la sección 2.2.6, la solución de la ecuación de Poisson, que determina el potencial electrostático y por lo tanto también el campo eléctrico, es única dadas las condiciones de borde apropiadas. Debido a esto, si obtenemos, por cualquier método, una solución que respete las condiciones de borde dadas, ésta es la solución del problema. El método de las imágenes suministra un procedimiento para encontrar una solución en casos donde el sistema contiene conductores (perfectos) a potencial constante (típicamente, “puestos a tierra”) y la geometría de los conductores y las cargas es simple. Para ello, se introducen cargas ficticias en posiciones apropiadas tales que el campo creado por el sistema de cargas reales + ficticias satisface las condiciones de borde.

En otras palabras, el método de las imágenes se basa en el hecho que la solución para el campo eléctrico en una región finita  $V$  con una distribución de carga conocida y potenciales dados en su superficie  $\partial V$  pueden ser los mismos (en  $V$ ) que los campos generados por la misma distribución de carga en  $V$  y por otra distribución de carga diferente fuera de  $V$ . Por esto, para solucionar el problema “real”, en el que la distribución de carga en  $V$  y los potenciales en  $\partial V$  son conocidos, se puede considerar el problema “ficticio” de encontrar las cargas “imágenes” fuera de  $V$  tales que la distribución de cargas total (reales e imágenes) satisfaga las condiciones de contorno en  $\partial V$ . Los campos así encontrados son solución del problema original, dentro (pero no fuera) de  $V$ . Como veremos, el método de las imágenes básicamente provee un método heurístico para encontrar la solución apropiada a las condiciones de borde de un cierto problema físico.

#### 2.3.1. Conductor plano

Consideremos la situación donde una carga puntual  $q$  se encuentra a una distancia  $d$  de un plano conductor (infinito) “puesto a tierra” (de modo que su potencial es igual al potencial en el infinito, elegido como  $\phi_\infty = 0$ ). Elijiendo los ejes coordenados convenientemente, tendremos que en la situación estacionaria  $\phi = 0$  para  $x \leq 0$ . Usando el método de las imágenes resolvemos el problema equivalente obtenido al reemplazar el plano conductor por una carga ficticia (imagen)  $q'$  ubicada en la posición  $x = -d' < 0$ . El potencial de la configuración de carga real más carga imagen es entonces

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(x+d')^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (2.69)$$

La condición que  $\phi = 0$  sobre el plano, es decir, para todo punto con  $x = 0$ , se satisface sólo si

$$d' = d, \quad q' = -q. \quad (2.70)$$

Por lo tanto, la solución para el potencial en todo punto con  $x \geq 0$  es dada por

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}} \right], \quad x \geq 0. \quad (2.71)$$

La densidad de carga inducida en el conductor puede calcularse usando

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 (\partial_x \phi)|_{x=0} \quad (2.72)$$

que, luego de algo de álgebra, resultar ser

$$\sigma(y, z) = -\frac{q}{2\pi} \frac{d}{(d^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2.73)$$

Por otro lado, la fuerza que ejerce el plano sobre la carga puede ser calculada usando

$$\vec{F}_q = q\vec{E}', \quad (2.74)$$

donde  $\vec{E}'$  es el campo externo que actúa sobre  $q$ , es decir, el campo determinado por el potencial

$$\phi'(x) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2 + z^2}}, \quad x > 0, \quad (2.75)$$

evaluado en la posición en que se ubica la carga  $q$ , es decir,

$$\vec{F}_q = -q(\vec{\nabla}\phi')|_{\vec{x}=d\hat{x}} \quad (2.76)$$

$$= -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} \hat{x}. \quad (2.77)$$

Note que esta fuerza es la misma que ejercería la carga imagen sobre la carga real.

### Efecto Schottky

Si un campo eléctrico externo aplicado a un metal (conductor) es moderadamente fuerte (del orden de  $10^6$  Volt/m) puede influir en el escape de los electrones en el metal y por tanto producir una corriente eléctrica.

Consideramos a un conductor como un reservorio de electrones sometidos a una pozo de potencial  $W$  (del orden de 2 Voltios por electrón = 2eV). Entonces para que un electrón pueda escapar del metal se requiere que su energía cinética sea

$$E_{cinética} > W.$$

Supongamos que entre esta gas de electrones en el metal las fluctuaciones térmicas permiten que un electrón supere la energía del pozo de potencial. Este electrón escapará del metal a una altura  $x$  de este y producirá un campo con los otros electrones que siguen capturados en el metal. Esto lo podemos modelar con el problema resuelto en la sección anterior 2.3.1. De la sección 2.3.1 podemos deducir que el potencial que siente este electrón debe ser,

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0(4x)}.$$

Si ahora consideramos el campo externo aplicado al metal de modo que este campo sea positivo, entonces la contribución de esta parte al potencial debe ser

$$\phi' = Ex,$$

donde  $E$  es la componente en  $x$  del campo. Con estas consideraciones podemos estimar la diferencia de energía potencial entre un electrón en el exterior del metal y otro en el interior (el cual esta a un potencial  $-W$ ),

$$W' = W - eEx - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(4x)}.$$

Esto demuestra que el la barrera de potencial puede depender de la altura del electrón sobre el metal. De aquí podemos concluir; *a pesar de que la barrera  $W$  de potencial que tiende a mantenerlos electrones en el interior del metal, a cualquier temperatura existen electrones que tienen energía suficiente como para vencer la barrera de potencial y escapar (la probabilidad aumenta con la temperatura). Cuando los electrones escapan dejan en el metal un exceso de carga positiva que dificulta el escape de nuevos electrones y tiende a hacer que los escapados regresen. Se establece un estado estacionario.*

Ahora calculemos el punto de equilibrio de la función  $W'$ , derivando con respecto a  $x$  y obteniendo la altura máxima o de equilibrio,

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(4x^2)} - eE = 0, \Rightarrow x_{max} = [e/(16\pi\epsilon_0 E)]^{1/2},$$

por lo tanto la barrera de potencial mínima es

$$W_{min} = W - \frac{e^{3/2} E^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^{1/2}}.$$

Como este es un proceso probabilístico debemos usar una distribución de probabilidad adecuada para estimar la corriente de electrones que escapan del metal. Podemos suponer una distribución de Maxwell-Boltzman, por lo que podemos proponer que la corriente este pesada por esta distribución,



$$J_s(\vec{E}) = J_0 \left( e^{-W/kT} \right) \left( e^{\frac{e^{3/2} E^{1/2}}{(4\pi\epsilon_0)^{1/2} kT}} \right),$$

donde  $J_0$  es la corriente producida por las fluctuaciones térmicas. Este fenómeno se denomina efecto de emisión fría o efecto Shottky.

### 2.3.2. Conductor esférico (opcional)

En este caso, consideramos el sistema formado por un conductor esférico, de radio  $a$ , "puesto a tierra", de modo que su potencial  $\phi = \phi_\infty \stackrel{!}{=} 0$ , y una carga puntual  $q$  ubicada a una distancia  $d$  del centro del conductor. El campo eléctrico fuera del conductor es equivalente al campo producido por la carga real  $q$  y una carga imagen de magnitud  $q'$  ubicada dentro de la esfera, a una distancia  $d'$  de su centro.

En efecto, el potencial de la carga real y la carga imagen, de acuerdo a sus posiciones, es dado por

$$\phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2 + d'^2 - 2d'r \cos \theta}} \right] \quad (2.78)$$

Puede verificarse rápidamente que la condición que  $\phi = 0$  sobre la esfera, para todo punto con  $r = a$ , se satisface sólo si

$$d' = \frac{a^2}{d}, \quad q' = -q \frac{a}{d}. \quad (2.79)$$

Por lo tanto, la solución para el potencial en todo punto exterior a la esfera conductora es dada por

$$\phi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2dr \cos \theta}} - \frac{a}{\sqrt{a^4 + r^2 d^2 - 2a^2 dr \cos \theta}} \right], \quad r \geq a. \quad (2.80)$$

La densidad de carga inducida en la esfera conductora puede calcularse usando

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} = -\epsilon_0 (\partial_r \phi)|_{r=a}. \quad (2.81)$$

Reemplazando (2.80) en (2.81) encontramos que

$$\sigma(\theta) = -\frac{q}{4\pi a d} \frac{1 - \frac{a^2}{d^2}}{\left[ 1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{d}\right) \cos \theta \right]^{3/2}}. \quad (2.82)$$

La carga total inducida en la esfera es entonces

$$Q_{\text{ind}} = \oint \sigma dS = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta = -q \frac{a}{d}. \quad (2.83)$$

Note que necesariamente la esfera debe tener una carga neta (igual a la carga imagen) para que  $\phi = 0$  en su superficie.

Finalmente, la fuerza que la esfera ejerce sobre la carga es dada por

$$\vec{F}_q = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{1}{(d' - d)^2} \hat{z} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{(a^2 - d^2)^2} \hat{z}. \quad (2.84)$$

## 2.4. Distribución de carga en un conductor

Ahora que ya hemos visto algunos ejemplos sencillos, pasemos a enfrentarnos a problemas con un carácter más real. Es decir, si tenemos un conductor cualquiera que tenga una carga añadida, poder determinar el campo eléctrico que genera. Primero como ya vimos en la sección 2.2.4 un conductor se carga solo en la superficie y su carga se distribuye en todo el conductor pero no se distribuye de forma uniforme. Una vez que sabemos como se distribuye la carga en un conductor, podemos resolver la ecuación de Poisson y tener el potencial.

Primero entonces debemos lidiar con el problema de encontrar la densidad superficial del conductor cargado, lo cual solo depende de la geometría de este. Para resolver el problema usaremos el teorema de Earnshaw y de Thompson. Veamos antes algunos ejemplos sencillos.

### Barra conductora

Considérese una barra unidimensional conductora de longitud  $L$ , la cual se le induce una carga  $Q$ . Determinemos como se distribuye esta en la barra, siguiendo los siguientes razonamientos:

- Por el teorema de Earnshaw, la carga se debe distribuir por toda la barra, de no ser así existiría una fuerza externa que retiene la carga en solo una parte de la barra, lo cual no es el caso.
- Por el teorema de Thompson, la carga se debe distribuir de modo que la energía potencial sea la mínima con la restricción de estar en la barra, es decir, tenemos que resolver un problema de constricciones (multiplicadores lagrange). Recordemos que el teorema de Earnshaw, nos dice que no existe mínimo global del potencial, pero si puede existir un mínimo con restricciones.

En el caso de la barra, consideremos la carga  $Q$  constituida por  $N$  cargas puntuales  $q$  ( $Nq = Q$ ). De aquí por el principio de superposición podemos construir la función potencial:

$$\phi = \sum_{i=0}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|x_{i+1} - x_i|}, \quad (2.85)$$

con la restricción  $x_0 - x_N = L$ . Usando el método de multiplicadores de Lagrange para las  $x_i$  variables y la restricción se llega:

$$\begin{aligned} \frac{q}{(|x_1 - x_0|)^2} &= \lambda, & (2.86) \\ \frac{q}{(|x_N - x_{N-1}|)^2} &= \lambda, \\ \frac{q}{(|x_{i+1} - x_i|)^2} - \frac{q}{(|x_{i+2} - x_{i+1}|)^2} &= 0, & \forall i \\ x_0 - x_N &= L. \end{aligned}$$

Este sistema se resuelve fácilmente, llegando a deducir;  $x_{i+1} - x_i = \frac{L}{N}$ , es decir las cargas se deben acomodar de forma **uniforme** sobre la barra. Es importante resaltar que este resultado solo es aplicable si la barra es infinitesimalmente delgada, una barra real de radio pequeño tendría una distribución de carga no uniforme (el efecto en si sería pequeño) debido al efecto de las tapas. Este ejemplo se puede extender al de un anillo circular de radio  $R$  y al de una esfera. Para un caso general idearemos otro método basado en el libro [6].

### Distribuciones de carga tridimensionales en conductores

Considérese una conductor (finito) cargado parametrizado por la función  $F(x, y, z, C = 0) = 0$ . Es claro que esta función esta formada por una familia de superficies de nivel que no se autointersectan. Consideremos ahora que cada una de estas superficies es equipotencial es decir que se cumple  $\phi = f(C)$ . Con esto podemos reescribir la ecuación de Poisson como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial x} = f'(C) \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= f''(C) \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + f'(C) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{análogo para z e y} \Rightarrow \\ \nabla^2 \phi &= f''(C) (\vec{\nabla} C)^2 + f'(C) \nabla^2 C. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Como nos interesa el caso  $C \neq 0$  tenemos  $\nabla^2 \phi = 0$  que implica resolver:

$$\frac{\nabla^2 C}{(\vec{\nabla} C)^2} = -\frac{f''(C)}{f'(C)} \equiv g(C), \quad (2.89)$$

donde la función  $g(C)$  solo depende de  $C$ . Es fácil integral la ecuación anterior llegando al resultado

$$\phi = f(C) = A \int e^{-\int g(C) dC} dC + B, \quad (2.90)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes.

Veamos un ejemplo: sea un conductor con forma de elipsoide con semiejes  $a, b$  y  $c$ , parametrizado por la función:  $F(x, y, z, C) = \frac{x^2}{a^2+C} + \frac{y^2}{b^2+C} + \frac{z^2}{c^2+C} - 1 = 0$ , donde la superficie física del conductor esta representada con  $C = 0$ .

Calculamos con ayuda de 2.89 la función (y el teorema de la función implícita)

$$g(C) = \frac{\nabla^2 C}{(\vec{\nabla} C)^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a^2+C} + \frac{1}{b^2+C} + \frac{1}{c^2+C} \right]. \quad (2.91)$$

Sustituimos este resultado en 2.90 e integramos sobre  $C$ , llegando al resultado:

$$f(C) = A \int^C (a^2+C)^{-1/2} (b^2+C)^{-1/2} (c^2+C)^{-1/2} dC + B. \quad (2.92)$$

Calculamos  $A$  y  $B$  en el caso  $\phi(C \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  y  $\phi(C = 0) = \phi_0$ , es claro que  $B = 0$ , para la otra constante se tiene,

$$A = \phi_0 \int^{\infty} (a^2+C)^{-1/2} (b^2+C)^{-1/2} (c^2+C)^{-1/2} dC. \quad (2.93)$$

Ahora considere que en  $C \rightarrow \infty$  el campo eléctrico debe tender al de una partícula puntual ( $Q/4\pi\epsilon_0 r^2 = d\phi/dr$ ). Considerando esto y el hecho que en este límite  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow r$ , resulta

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{d\phi}{dC} \frac{dC}{dr} = \frac{A}{r^3} 2r, \quad (2.94)$$

por lo tanto  $A = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}$ .

Finalmente calculamos la distribución de carga usando la ecuación 2.64 pero en términos de la variable  $C$ ,

$$\sigma(x) = -\epsilon_0 (\vec{\nabla} \phi = \frac{dV}{dC} \vec{\nabla} C) \cdot (\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} C}{|\vec{\nabla} C|}) = \frac{d\phi}{dC} |\vec{\nabla} C| = \frac{Q}{4\pi abc} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}. \quad (2.95)$$

Note que si tomamos  $a^2 = b^2 = c^2 = R^2 = x^2 + y^2 + z^2$  que corresponde al caso de una esfera resulta que la distribución  $\sigma(x)$  es uniforme!.

### Ejemplo esfera conductora

En esta pequeña sección aplicaremos la teoría de electrostática para resolver el problema de encontrar el campo eléctrico de una esfera de radio  $R$  con carga total  $Q$ . Escribimos nuevamente las ecuaciones 2.63,

$$\nabla^2\phi = 0, \quad \phi|_{\partial V} = 0, \quad \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.96)$$

En este caso conviene usar coordenadas esféricas, ya que al tratarse de una esfera con  $r = R$  constante la integral de superficie  $d\vec{S} = (R^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi) \hat{e}_r$ , lo cual implica que solo la componente radial del campo eléctrico contribuye a la integral en la ecuación 2.63.

Por lo tanto podemos concluir que si  $\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{e}_r$  entonces  $\phi$  solo depende de la coordenada  $r$ . Con ello el laplaciano se simplifica

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\phi}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi = \frac{A}{r} + B,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes a determinar. Determinamos una relación entre estas constantes imponiendo la condición de borde  $\phi|_{r=R} = 0$ , lo cual implica

$$A + BR = 0. \quad (2.97)$$

Por otro lado la ecuación integral implica

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial\phi}{\partial r} |_{r=R} (R^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi) = 4\pi A, \quad (2.98)$$

de las relaciones 2.97 y 2.98 podemos despejar las variables  $A$  y  $B$  por lo que el potencial queda

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad r \geq R, \quad (2.99)$$

$$\phi = 0, \quad r < R.$$

y el campo eléctrico por lo tanto es  $\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{e}_r$ ,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r, \quad r > R, \quad (2.100)$$

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad r \leq R.$$

finalmente calculamos la distribución (superficial) de carga del conductor

$$\sigma = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{e}_r |_{r=R} = \frac{Q}{4\pi R^2}, \quad (2.101)$$

la cual como es de esperarse es una distribución uniforme sobre una esfera de radio  $R$ .

### 2.4.1. Método alternativo usando integración por partes

En esta sección discutiremos una manera alternativa de obtener la distribución de carga de un conductor con carga  $Q$ , debido a que por lo general esta información es de principal interés en los problemas de electrostática.

El método consiste usar como referencia una distribución de carga conocida (por ejemplo la esfera) y a partir de una identidad básica encontrar la distribución de otra superficie que pueda contener o ser contenida a la superficie conocida. A continuación expondremos esta idea de forma precisa.

Defínase un conductor cuya distribución de carga sobre su superficial  $S$  que sea conocida y con potencial  $\phi$ , este potencial satisface

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \phi |_{S=0}, \quad \sigma = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \phi \cdot \hat{e}_r |_{S}. \quad (2.102)$$

Ahora considérese un conductor cuya distribución de carga en su superficie  $S'$  es desconocida y puede estar contenida en la superficial  $S$  y o contenerla. Este conductor tiene potencial  $\phi'$  y satisface las ecuaciones

$$\nabla^2 \phi' = 0, \quad \phi' |_{S'=0}, \quad \sigma' = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \phi' \cdot \hat{e}_r |_{S'}. \quad (2.103)$$

Es claro que estas dos situaciones son independientes entre si, en ningún caso se debe entender que estos conductores están interactuando entre si. Ahora es evidente que nuestra meta es conocer  $\sigma'$  en función de  $\sigma$  que es conocida. Usemos las identidades

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi') &= \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \phi' + \phi \nabla^2 \phi', \\ \vec{\nabla} \cdot (\phi' \vec{\nabla} \phi) &= \vec{\nabla} \phi' \cdot \vec{\nabla} \phi + \phi' \nabla^2 \phi. \end{aligned} \quad (2.104)$$

De las ecuaciones 2.102, 2.103 y las identidades 2.104 se deduce que

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \phi') = \vec{\nabla} \cdot (\phi' \vec{\nabla} \phi).$$

Si integramos esta última igualdad entre el volumen del conductor conocido (también se puede integrar con respecto al otro volumen, todo dependerá de que convenga), y haciendo uso del teorema de divergencia se tiene

$$\int_S (\phi \vec{\nabla} \phi') \cdot \hat{n} dS = \int_S (\phi' \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} dS, \quad (2.105)$$

esto implica que

$$(\phi \vec{\nabla} \phi') \cdot \hat{n} = (\phi' \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} \quad (2.106)$$

por las ecuaciones 2.102 y 2.103

$$(\phi|_S)(\hat{n}' \cdot \hat{n}|_{S'})\sigma' = (\phi'|_S)\sigma, \quad (2.107)$$

donde hemos usado que  $\vec{\nabla} \phi' = \|\vec{\nabla} \phi'\| \hat{n}'|_{S'} = -\epsilon_0 \sigma' \hat{n}|_{S'}$ . La ecuación 2.107 constituye una relación entre  $\sigma = K\sigma'/(\hat{n} \cdot \hat{n}')$ , donde  $K$  es una constante que se puede determinar imponiendo que  $Q' = \int \sigma' dS$ . Veamos un ejemplo de como aplicar esta fórmula.

### ejemplo: Disco conductor uniforme

Considérese un disco uniforme conductor con carga  $Q$  cuyo eje imaginario sea el eje  $z$ . Entonces el vector normal es  $\hat{n}' = \hat{e}_z$ . Por otro lado si tomamos a la esfera de radio  $R$  como el conductor conocido entonces el vector normal es  $\hat{n} = (x, y, z)/R$ . Si usamos la fórmula 2.107 se tiene

$$\sigma' = K \left( \frac{Q}{4\pi R^2} \right) (1/(z/R))|_{disco},$$

como  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  entonces en el disco (coordenadas polares)  $z = \sqrt{R^2 - r^2}$ , lo que implica

$$\sigma' = \frac{K'}{\sqrt{R^2 - r^2}},$$

donde  $K' = K \left( \frac{Q}{4\pi R^2} \right)$ . Ahora calculamos  $K'$  imponiendo que la integral sobre el disco sea  $Q$ , es decir;

$$Q = K' \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r dr d\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi K' R, \quad \Rightarrow K' = \frac{Q}{2\pi R}.$$

### ejemplo: Elipsoide

Ahora consideremos el elipsoide conductor con semiejes  $a, b$  y  $c$  dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ahora conviene integrar en la ecuación 2.105 con respecto a  $S'$ , que en este caso sigue describiendo al conductor desconocido. Esencialmente todo

es lo mismo excepto que se intercambian los índices de cada elemento de la fórmula 2.107

$$(\phi|_{S'}) (\hat{n}' \cdot \hat{n}|_S) \sigma = (\phi|_{S'}) \sigma'. \quad (2.108)$$

Para el elipsoide el vector normal es

$$\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (x/a^2, y/b^2, z/c^2).$$

Evaluando el producto escalar entre este vector y el de la esfera se tiene

$$\hat{n}' \cdot \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)/R = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} (1)/R,$$

por lo tanto se concluye que la distribución de carga debe ser

$$\sigma' = K' \frac{1}{R \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

donde  $K'$  se obtiene con la condición  $Q = \int_{\text{elipsoide}} \sigma' dS$ .

## 2.5. Energía potencial eléctrica de cargas en un campo externo

Como consecuencia de (2.24), la fuerza electrostática es conservativa, pues puede derivarse de una energía potencial (o, equivalentemente, el trabajo es independiente de la trayectoria, ya que el campo eléctrico es irrotacional):

$$\boxed{F_i = qE_i = -q\partial_i\phi.} \quad (2.109)$$

Definimos la **energía potencial eléctrica** de una carga  $q$  ubicada en un punto  $x$  con campo eléctrico (externo) descrito por el potencial  $\phi(x)$  por

$$\boxed{U(x) = q\phi(x),} \quad (2.110)$$

de modo que

$$\boxed{F_i(x) = -(\partial_i U)(x).} \quad (2.111)$$

Como toda energía potencial, la energía potencial eléctrica es una cantidad bien definida salvo una constante aditiva arbitraria. Como consecuencia, sólo las diferencias de energía potencial tienen significado físico no ambiguo



(pueden en principio ser medidas). Esta característica se ilustra más claramente si consideramos el trabajo realizado por un campo eléctrico sobre una carga  $q$  al desplazarse ésta desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$ :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B F_i dx_i = - \int_A^B \partial_i U dx_i = - U|_A^B = -\Delta U = -q\Delta\phi = -q(\phi_B - \phi_A). \quad (2.112)$$

Como consecuencia, una partícula cargada de masa  $m$  y carga  $q$  moviéndose en el campo eléctrico externo descrito por el potencial  $\phi$  tendrá una energía mecánica  $E = K + U = m\vec{v}^2/2 + q\phi$ , que será constante si no existen otras fuerzas actuando, es decir,

$$E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + q\phi(x) = \text{cte}. \quad (2.113)$$

Podemos generalizar la expresión (2.110) para el caso de una distribución continua de cargas de prueba, en un campo externo. En otras palabras, despreciamos el campo que las mismas cargas producen. Por simple superposición encontramos que la energía potencial de una distribución de cargas descritas por la densidad  $\rho(\vec{x})$  en un campo externo  $\phi(\vec{x})$  es dado por

$$U = \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (2.114)$$

## 2.6. Energía potencial de un sistema de cargas

### 2.6.1. Energía potencial de un conjunto de cargas puntuales

Consideremos ahora el problema de determinar la energía potencial total de un conjunto de  $N$  cargas puntuales, pero ahora tomando en cuenta el campo que ellas mismas generan. Cada carga  $q^{(\alpha)}$  posee una energía potencial  $U^{(\alpha\beta)}$  asociada al campo eléctrico producido por cada una de las otras cargas  $q^{(\beta)}$ , con  $\beta \neq \alpha$ . Aquí  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ .

Además, el potencial eléctrico en el punto  $\vec{x}$ , generado por la carga  $q^{(\beta)}$  ubicada en el punto  $\vec{x}^{(\beta)}$ , es dado por

$$\phi^{(\beta)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^{(\beta)}}{|\vec{x} - \vec{x}^{(\beta)}|}, \quad (2.115)$$

de modo que

$$U^{(\alpha\beta)} = q^{(\alpha)} \phi^{(\beta)}(\vec{x}^{(\beta)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (2.116)$$

Vemos de (2.116) que  $U^{(\alpha\beta)} = U^{(\beta\alpha)}$ , es decir, la energía potencial de la carga  $\alpha$ -ésima debido al campo producido por la carga  $\beta$ -ésima es igual a la energía potencial de la  $\beta$ -ésima debido al campo de la  $\alpha$ -ésima.

Además,  $U^{(\alpha\beta)} \rightarrow 0$ , cuando  $|\vec{x}^{(\alpha)}| \rightarrow \infty$  ó  $|\vec{x}^{(\beta)}| \rightarrow \infty$ . Entonces, de acuerdo a (2.112), podemos interpretar  $U^{(\alpha\beta)}$  como la energía (trabajo) que se necesita para traer la carga  $q^{(\alpha)}$  desde el infinito hasta la posición  $\vec{x}^{(\alpha)}$ , en el campo eléctrico producido por la carga  $q^{(\beta)}$ , fija en  $\vec{x}^{(\beta)}$ , o viceversa.

Para calcular la energía potencial eléctrica total de un sistema de muchas cargas puntuales, “construimos” el sistema, carga por carga, trayéndolas desde el infinito (donde la interacción mutua es despreciable): Primero consideramos que la carga  $q^{(1)}$  es transportada desde el infinito hasta su posición final  $\vec{x}^{(1)}$ . Para esto no se requiere trabajo alguno ya que no existe campo eléctrico preexistente que actúe sobre esta carga. Como segundo paso, traemos la carga  $q^{(2)}$  desde el infinito hasta su posición final  $\vec{x}^{(2)}$ . Este proceso requiere una energía dada por  $U^{(21)}$ . En el siguiente paso, traemos  $q^{(3)}$  desde el infinito hasta  $\vec{x}^{(3)}$ , manteniendo fijas las cargas  $q^{(1)}$  y  $q^{(2)}$ . La energía requerida para este paso es  $U^{(31)} + U^{(32)}$ . Hasta el momento la energía total requerida para formar el sistema de 3 cargas es  $U^{(21)} + U^{(31)} + U^{(32)} = U^{(12)} + U^{(13)} + U^{(23)}$ . Continuando este proceso encontramos que la energía potencial eléctrica total de un sistema de  $N$  cargas  $q^{(\alpha)}$ , con posiciones  $\vec{x}^{(\alpha)}$  es dado por

$$U = \sum_{\alpha, \beta (\alpha > \beta)}^N U^{(\alpha\beta)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha, \beta (\alpha > \beta)}^N \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (2.117)$$

Alternativamente, ya que  $U^{(\alpha\beta)} = U^{(\beta\alpha)}$ , podemos escribir  $U = (1/2) \sum_{\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)}^N U^{(\alpha\beta)}$ , de modo que

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha, \beta (\alpha \neq \beta)}^N \frac{q^{(\alpha)} q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}. \quad (2.118)$$

En términos del potencial electrostático total en el punto  $\vec{x}^{(\alpha)}$  debido a todas las otras cargas  $q^{(\beta)}$  ( $\beta \neq \alpha$ ),

$$\phi'(\vec{x}^{(\alpha)}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\beta (\beta \neq \alpha)}^N \frac{q^{(\beta)}}{|\vec{x}^{(\alpha)} - \vec{x}^{(\beta)}|}, \quad (2.119)$$

tenemos que

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N q^{(\alpha)} \phi'(\vec{x}^{(\alpha)}). \quad (2.120)$$

### 2.6.2. Energía potencial de una distribución continua de cargas

En el caso de una distribución continua de carga descrita por una densidad de carga  $\rho(\vec{x})$ , requerimos una expresión similar a la encontrada en la sección anterior para cargas puntuales. En el límite continuo, esperamos

poder reemplazar  $q^{(\alpha)} \rightarrow dq = \rho(\vec{x}) dV$ . Por otro lado, podríamos esperar que el potencial  $\phi'(x^{(\alpha)})$  tienda simplemente al potencial de la distribución continua de carga, evaluado en el punto  $\vec{x}$ , es decir,  $\phi'(x^{(\alpha)}) \rightarrow \phi(\vec{x})$ , ya que no tiene sentido hacer distinción, en el caso de una distribución continua, entre el campo  $\phi'$  (es decir, el potencial producido por las cargas del sistema localizadas en puntos  $\vec{x}' \neq \vec{x}$ ) y el simplemente el potencial  $\phi(\vec{x})$ .

De este modo, obtenemos

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (2.121)$$

Es importante entender la diferencia entre (2.114) y (2.121). La primera expresión representa la energía potencial de una distribución de cargas en un campo externo, despreciando el campo que ellas mismas producen (cargas "de prueba"), mientras que la segunda representa la energía potencial total contenida en un sistema de cargas debido su propio campo. En otras palabras, los potenciales involucrados en (2.114) y (2.121) son de naturaleza distinta: en la primera expresión representa el potencial externo, y en la segunda el potencial generado por las propias cargas. Sólo en el segundo caso el potencial está relacionado con la densidad por medio de la ecuación de Poisson.

Además, si bien al aplicar la integral (2.121) al caso de distribuciones continuas y finitas de carga se obtienen resultados finitos, al intentar aplicarla al caso de una carga puntual (o conjuntos de cargas puntuales) se encuentra un resultado divergente. Esto, sin embargo, es usualmente interpretado asumiendo que una carga puntual es una idealización: el límite en que el tamaño de la carga es nulo. En la práctica, consideraremos a (2.121) como la expresión general para la energía de una distribución general de cargas, mientras que para un conjunto de cargas puntuales usaremos (2.118) o, alternativamente, (2.120).

### Derivación alternativa

Podemos derivar la expresión (2.121) considerando el proceso de construcción del sistema en que la densidad es aumentada paulatinamente desde 0 hasta  $\rho(\vec{x})$ . Si en un instante dado la densidad es, en cada punto, una fracción  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) de la densidad total, es decir, si la densidad es  $\lambda\rho(\vec{x})$ , entonces el potencial generado por esta densidad es  $\phi_\lambda(\vec{x}) = \lambda\phi(\vec{x})$ , ya que la ecuación que determina el potencial a partir de la densidad de carga (la ec. de Poisson (2.46)) es lineal. Entonces el trabajo necesario para aumentar la fracción de carga desde  $\lambda$  hasta  $\lambda + d\lambda$  es el trabajo necesario para transportar las cargas  $dq = d\lambda \rho(\vec{x}) dV$  desde el infinito hasta sus posiciones finales, en el campo  $\phi_\lambda(\vec{x})$ . Por lo tanto, el trabajo total requerido para aumentar

la densidad de carga en una fracción  $d\lambda$  es dado por:

$$dW = \int_V dq \phi_\lambda(\vec{x}) \quad (2.122)$$

$$= \int_V [d\lambda \rho(\vec{x}) dV] [\lambda \phi(\vec{x})] \quad (2.123)$$

$$= \lambda d\lambda \int_V \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV. \quad (2.124)$$

La energía requerida en el proceso completo de construcción del sistema de cargas es entonces la suma de los trabajos de la forma (2.124) desde  $\lambda = 0$  hasta  $\lambda = 1$ , es decir,

$$U = \int_0^1 dW, \quad (2.125)$$

que lleva nuevamente a la expresión (2.121).

### Energía de un sistema de cargas formado por dos subsistemas

Si tenemos un sistema de cargas que pueda ser separado en dos subsistemas, el primero con densidad de carga  $\rho_1(x)$  que genera un potencial  $\phi_1(x)$ , y el segundo con densidad  $\rho_2(x)$  y potencial  $\phi_2(x)$ , entonces

$$\rho(x) = \rho_1(x) + \rho_2(x), \quad (2.126)$$

ya suponemos que las regiones donde  $\rho_1(x)$  y  $\rho_2(x)$  son no nulas son disjuntas. Además, en un punto cualquiera el potencial es dado por

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x). \quad (2.127)$$

Reemplazando estas expresiones en nuestro resultado general (2.121) encontramos que la energía del sistema completo puede ser escrita como

$$U = U_1 + U_2 + U_{\text{int}} \quad (2.128)$$

$$U_1 = \frac{1}{2} \int \rho_1(\vec{x}) \phi_1(\vec{x}) dV, \quad U_2 = \frac{1}{2} \int \rho_2(\vec{x}) \phi_2(\vec{x}) dV, \quad (2.129)$$

$$U_{\text{int}} = \int \rho_1(x) \phi_2(x) dV = \int \rho_2(x) \phi_1(x) dV. \quad (2.130)$$

La energía  $U_{\text{int}}$  puede ser interpretada, de acuerdo a nuestro resultado (2.114), como la **energía potencial de las cargas en el subsistema 1 debido al campo (externo) generado por el subsistema 2**, o bien como la **energía potencial de las cargas en el subsistema 2 debido al campo (externo) generado por el subsistema 1**, o simplemente como la **energía de interacción**.

### Energía en función del campo eléctrico

Podemos expresar la energía (2.121) en términos del campo eléctrico, usando la ley de Gauss (2.39):

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{x}) \phi(\vec{x}) dV \quad (2.131)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int (\partial_i E_i) \phi dV \quad (2.132)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int [\partial_i (E_i \phi) - E_i \partial_i \phi] dV \quad (2.133)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint E_i \phi dS_i - \int E_i \partial_i \phi dV \right] \quad (2.134)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \left[ 0 + \int E_i E_i dV \right] \quad (2.135)$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int \vec{E}^2 dV. \quad (2.136)$$

En este cálculo, hemos considerado que la integral de volumen se extiende sobre todo el espacio, y que el campo eléctrico se anula suficientemente rápido en el infinito, de forma tal que la integral de superficie es nula<sup>13</sup>. Con esto, obtenemos

$$U = \int u_E(\vec{x}) dV, \quad u_E(\vec{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{x}). \quad (2.137)$$

De esta forma, podemos calcular la energía (potencial) electrostática de una distribución de carga como la integral de una densidad de energía  $u_E(\vec{x})$ . Comparando (2.137) con (2.118) vemos que la energía potencial de un sistema de cargas puede interpretarse alternativamente como la energía almacenada en el campo eléctrico del sistema de cargas, a través de la densidad de energía  $u_E(\vec{x})$ .

### Ejemplo 1

Considere un condensador de placas paralelas. Despreciando efectos de borde, es decir, considerando que dentro de la región limitada por las placas en campo eléctrico es homogéneo y fuera de ella es nulo, y además despreciando el espesor de las placas, podemos modelar la densidad de carga como

$$\rho(\vec{x}) = \sigma \delta(x) - \sigma \delta(x - d), \quad (2.138)$$

para todo  $(y, z)$  en la región delimitada por las placas.

<sup>13</sup>La integral tiende a cero si  $\phi$  decae más rápido que  $1/\sqrt{r}$  para  $r \rightarrow \infty$ . Esta condición es siempre satisfecha para distribuciones compactas de carga, donde se tiene de hecho que  $\phi$  decae al menos como  $1/r$ .

El campo eléctrico entre las placas (que puede obtenerse fácilmente usando la ley de Gauss) es dado por

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{x} = E \hat{x}, \quad 0 < x < d, \quad (2.139)$$

donde  $\sigma$  es la densidad total de carga por unidad de superficie (en cada placa ubicada en  $x = 0$ ). Con esto, podemos evaluar la energía (2.137) (el campo eléctrico sólo es no nulo entre las placas, que encerrar un volumen  $V = Ad$ ):

$$U = \int u_E(\vec{x}) dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 V = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 Ad = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} Ad = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \frac{d}{A}. \quad (2.140)$$

Por otro lado, usando (2.27) encontramos que el potencial entre las placas es de la forma

$$\phi(\vec{x}) = \phi(0) - Ex = \phi(0) - \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x, \quad 0 < x < d, \quad (2.141)$$

con lo que podemos evaluar (2.121) (la densidad de carga sólo es no nula sobre las placas), obteniendo

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(x) \phi(x) dV = \frac{1}{2} [\sigma A \phi(0) - \sigma A \phi(d)] = \frac{\sigma^2 Ad}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0} \frac{d}{A}. \quad (2.142)$$

En términos de la capacidad del condensador,  $C = Q/\Delta V = \varepsilon_0 A/d$ , tenemos

$$U = \frac{C(\Delta V)^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (2.143)$$

## Ejemplo 2

En este ejemplo veremos como aplicar la ecuación 2.130 para modelar la interacción de dos átomos neutros que se acercan entre si con una energía  $E$  en el sistema de C.M. Como cada átomo esta constituido por un núcleo con carga (positiva)  $Ze$  y  $Z$  electrones, donde estos últimos orbitan el núcleo apantallándolo, es de esperarse que este apantallamiento solo sea efectivo para distancias grandes comparadas al radio atómico. En el otro extremo si los átomos se acercan mucho superando la barrera de la nube electrónica, es de esperarse que ambos se repelan siguiendo la ley de Coulomb. De esto podemos modelar el potencial de interacción de la siguiente forma,

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \chi(r), \quad (2.144)$$

donde la función  $\chi(r)$  se llama función de apantallamiento y cumple con  $\chi(r \rightarrow 0) \rightarrow 1$  (límite coulombiano) y  $\chi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  (apantallamiento total del núcleo). En base a este modelo podemos estimar el potencial de interacción entre dos iones usando la ecuación 2.130.

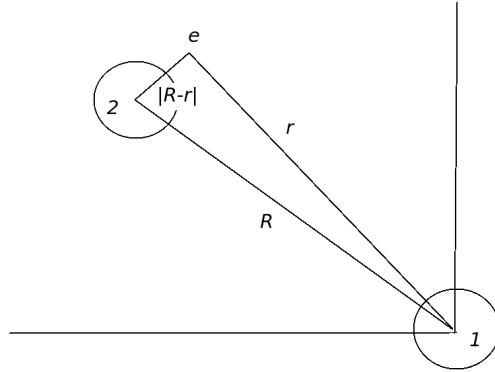


Figura 2.2: Interacción entre dos iones.

Supongamos que el ion (1), con  $Z_1$  electrones, está centrado en el origen y el ion (2) (con  $Z_2$  electrones) está separado una distancia  $R$  del ion (1), los potenciales de interacción entre los electrones de la nube del ion (1) y del ion (2) son, ver figura 2.2,

$$\phi_1 = \frac{-Z_1 e}{4\pi\epsilon_0 r} \chi_1(r),$$

$$\phi_2 = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 |\bar{R} - \bar{r}|} \chi_2(|\bar{R} - \bar{r}|).$$

Tomemos el caso de interacciones distantes  $R \gg r$ , entonces el potencial  $\phi_2$  puede aproximarse por  $\phi_2 = \frac{Z_2 e}{4\pi\epsilon_0 R} \chi_2(R)$ , es decir es constante. Evaluamos la interacción entre estos iones usando 2.130,

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int \rho_1 \phi_2 dV = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int \nabla^2 \phi_1 \phi_2 dV, \quad (2.145)$$

donde en el último paso se usó la ley de Gauss. Como el problema así planteado tiene simetría esférica, entonces podemos obtener el laplaciano para la coordenada  $r$ , y  $dV = 4\pi r^2 dr$ , haciendo los cálculos se llega a

$$U_{int} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_R^\infty \left( \frac{Z_1 e \chi_1''(r)}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \left( \frac{Z_2 e \chi_2(R)}{4\pi\epsilon_0 R} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1 Z_2 e^2 \chi_2(R)}{4\pi\epsilon_0 R} \right) \int_R^\infty r \chi_1''(r) dr. \quad (2.146)$$

Integramos por partes el último término de la ecuación anterior,  $\int \chi_1''(r) r dr = r \chi_1'(r) - \chi_1(r)$ , por lo que finalmente nos da,

$$U_{int} = \left( \frac{Z_2 Z_1 e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) (\chi_1(R) - R \chi_1'(R)), \quad (2.147)$$

donde usamos  $\chi_1(\infty) = 0$  al igual que  $r \chi_1'$ .

### 2.6.3. Frenado electrónico

## 2.7. Expansión multipolar cartesiana

### 2.7.1. Expansión Multipolar

El método de expansión multipolar permite calcular los campos (potencial y campo eléctrico) de una distribución compacta, pero arbitraria, de carga en forma relativamente sencilla y general. Consideramos entonces una distribución compacta de carga, situaremos (sin pérdida de generalidad) el origen del sistema coordenado en un punto representativo de la distribución (no necesariamente el centro de masa o el centro de carga), y consideraremos el problema de describir el campo generado por esta distribución en puntos muy alejados de ella, de modo que  $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ . Esto permite reescribir la expresión general (2.25) para el potencial eléctrico, en forma de una expansión en serie, ya que el término  $1/|\vec{x} - \vec{x}'|$  puede ser expandido<sup>14</sup> en potencias de las componentes del vector  $\vec{x}'$ :

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - x'_i \partial_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)_{x'_i=0} + \dots + (-1)^2 \frac{1}{2!} x'_i x'_j \quad (2.148)$$

$$, \partial_i \partial_j \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)_{x'_i=0} + \dots \quad (2.149)$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} - x'_i \partial_i \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{(-1)^2}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{x}|} + \dots \quad (2.150)$$

$$= \frac{1}{r} - x'_i \partial_i \frac{1}{r} + \frac{(-1)^2}{2!} x'_i x'_j \partial_i \partial_j \frac{1}{r} + \dots \quad (2.151)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} \partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (2.152)$$

Note que los términos con derivadas de la forma  $\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} r^{-1}$  son funciones (relativamente) simples y conocidas. Por ejemplo:

$$\partial_i \frac{1}{r} = -\frac{x_i}{r^3}, \quad (2.153)$$

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \quad (2.154)$$

$$\partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{r} = \frac{3(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})}{r^5} - \frac{15x_i x_j x_k}{r^7}, \quad (2.155)$$

etc. Con esto, podemos escribir hasta segundo orden

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{x_i x'_i}{r^3} + \frac{1}{2} x'_i x'_j \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + O(x_i^3). \quad (2.156)$$

<sup>14</sup>Para esto usamos la expresión general para una expansión en serie de Taylor de una función de varias variables:  $f(x_i + x'_i) = f(x_i) + x'_i (\partial_i f)|_x + (1/2!) x'_i x'_j (\partial_i \partial_j f)|_x + (1/3!) x'_i x'_j x'_k (\partial_i \partial_j \partial_k f)|_x + \dots$



En general, el término de orden  $n$ ,  $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} r^{-1}$ , decrecerá con la distancia como  $r^{-(n+1)}$ .

Con la expansión (2.152) podemos reescribir la expresión (2.25) para un potencial electrostático general (imponiendo  $\phi = 0$  en el infinito) como

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (2.157)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x}') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r} dV' \quad (2.158)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[ \int_V \rho(\vec{x}') x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} dV' \right] \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (2.159)$$

Definiendo el momento multipolar de orden  $n$  como el tensor de rango  $n$  dado por

$$Q_{i_1 \cdots i_n} = \int_V \rho(\vec{x}) x_{i_1} \cdots x_{i_n} dV, \quad (2.160)$$

podemos expresar un campo electrostático general por medio de la expansión multipolar

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (2.161)$$

En otras palabras, podemos descomponer el potencial electrostático en una suma de términos de distinto orden en la expansión multipolar

$$\phi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(\vec{x}), \quad (2.162)$$

donde  $\phi^{(n)}(\vec{x})$  es la contribución multipolar de orden  $n$ , definida por

$$\phi^{(n)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)^n}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \frac{1}{r}. \quad (2.163)$$

Los primeros términos de esta expansión general son de la forma:

$$\phi(\vec{x}) = \phi^0(\vec{x}) + \phi^{(1)}(\vec{x}) + \phi^{(2)}(\vec{x}) + \dots \quad (2.164)$$

El término *monopolar* es

$$\phi^0(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.165)$$

donde  $Q$ , el momento monopolar, es simplemente la carga total del sistema:

$$Q = \int \rho(\vec{x}) dV. \quad (2.166)$$

El segundo término, el término *dipolar* es dado por

$$\phi^{(1)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i p_i}{r^3}, \quad (2.167)$$

donde  $p_i = Q_i$  es el momento dipolar del sistema:

$$p_i = \int x_i \rho(\vec{x}) dV. \quad (2.168)$$

La tercera contribución viene dada por el término *cuadrupolar*:

$$\phi^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{ij} \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right). \quad (2.169)$$

El momento cuadrupolar  $Q_{ij}$  es dado por

$$Q_{ij} = \int x_i x_j \rho(\vec{x}) dV. \quad (2.170)$$

Con esto, la expansión multipolar del potencial es de la forma:

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{ij} \left( \frac{3x_i x_j}{r^5} - \frac{\delta_{ij}}{r^3} \right) + O(r^{-4})} \quad (2.171)$$

Podemos también encontrar una expansión multipolar para el campo eléctrico simplemente derivando el potencial. Con esto, obtenemos

$$E_i(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x_i}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(3p_j x_j x_i - r^2 p_i)}{r^5} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} Q_{jk} \left[ \frac{3(x_i \delta_{jk} + x_j \delta_{ki} + x_k \delta_{ij})}{r^5} - \frac{15x_i x_j x_k}{r^7} \right] + O(r^{-5}). \quad (2.172)$$

Observaciones:

- El momento multipolar de orden  $n$ ,  $Q_{i_1 \dots i_n}$  es un tensor simétrico de rango  $n$  respecto a transformaciones ortogonales de coordenadas. Por eso,  $Q_{i_1 \dots i_n}$  tiene  $(n+1)(n+2)/2$  componentes linealmente independientes.
- Los momentos multipolares son cantidades aditivas (o extensivas). Esto quiere decir que si se divide un sistema en dos partes (el volumen donde están contenidas las cargas, en dos volúmenes más pequeños o, equivalentemente, la densidad de carga en la suma de dos densidades) entonces cada momento multipolar (de un orden dado) es la suma de los momentos multipolares de cada subsistema.

- Note que los momentos multipolares **dependen en general de la elección del origen**. Si se desplaza el origen del sistema coordenado de modo que el origen  $O$  original tenga coordenadas  $\vec{d}$  respecto al nuevo origen  $O'$  entonces  $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{d}$  y los nuevos momentos multipolares respecto al origen  $O'$  están dados por:

$$Q' = Q, \quad (2.173)$$

$$Q'_i = Q_i + Qd_i, \quad (2.174)$$

$$Q'_{ij} = Q_{ij} + Q_id_j + Q_jd_i + Qd_id_j, \quad (2.175)$$

etc.

### Momento cuadrupolar sin traza (Opcional)

El momento cuadrupolar (2.170) es un tensor simétrico, por lo que tiene  $3 \cdot (3 + 1)/2 = 6$  componentes linealmente independientes (que hay que calcular!). Sin embargo, debido a que este tensor siempre está multiplicado en la expansión multipolar del potencial por  $(3x_ix_j/r^5 - \delta_{ij}/r^3)$ , puede verificarse que no todas las componentes de  $Q_{ij}$  contribuyen a la expansión multipolar. En efecto, debido a que la contracción  $\delta_{ij}(3x_ix_j/r^5 - \delta_{ij}/r^3)$  se anula idénticamente, es posible sumar un término proporcional a  $\delta_{ij}$  al momento cuadrupolar, sin por ello alterar la expansión multipolar. En otras palabras, existe una libertad para redefinir el momento cuadrupolar ya que  $\tilde{Q}_{ij} = Q_{ij} + \lambda\delta_{ij}$  puede ser considerado como un momento cuadrupolar útil y legítimo.

Una posibilidad sería elegir  $\lambda \stackrel{!}{=} -Q_{ii}$ , en cuyo caso obtendríamos

$$Q'_{ij} = \int (x_ix_j - x_kx_k\delta_{ij}) \rho(\vec{x}) dV, \quad (2.176)$$

que, salvo un signo global, tiene la misma forma que el conocido tensor momento de inercia asociado a un cuerpo en rotación. En este sentido, el momento cuadrupolar eléctrico es el análogo al tensor momento de inercia en mecánica.

Sin embargo, es más común explotar la libertad para elegir  $\lambda$  para definir el momento cuadrupolar libre de traza, definido tal que  $\tilde{Q}_{ii} \equiv 0$ . Esto equivale a considerar  $\lambda \stackrel{!}{=} -Q_{ii}/3$ , es decir,  $\tilde{Q}_{ij} = Q_{ij} - Q_{kk}\delta_{ij}/3$  o, más explícitamente:

$$\tilde{Q}_{ij} = \int (x_ix_j - \frac{1}{3}x_kx_k\delta_{ij}) \rho(\vec{x}) dV. \quad (2.177)$$

La ventaja de usar este tensor es que, por ser libre de traza, sólo tiene 5 componentes linealmente independientes (que calcular, por ejemplo:  $\tilde{Q}_{11}$ ,  $\tilde{Q}_{12}$ ,  $\tilde{Q}_{13}$ ,  $\tilde{Q}_{22}$ ,  $\tilde{Q}_{23}$ , ya que  $\tilde{Q}_{21} = \tilde{Q}_{12}$ ,  $\tilde{Q}_{31} = \tilde{Q}_{13}$ ,  $\tilde{Q}_{32} = \tilde{Q}_{23}$  y  $\tilde{Q}_{33} =$

$-\tilde{Q}_{11} - \tilde{Q}_{22}$ ) (pero, por otro lado, la integral que se necesita calcular es algo más complicada).

Además, el momento cuadrupolar (con o sin traza), por ser un tensor simétrico de segundo rango, puede ser diagonalizado, es decir, es posible encontrar sus vectores (y valores) propios, que definen direcciones “principales”, ortogonales entre si. En el sistema coordenado definido por estas tres direcciones principales el momento cuadrupolar adopta una forma diagonal.

### Monopolo ideal

Una carga puntual es un “monopolo ideal”, ya que (eligiendo el origen en la posición de la carga) el único momento distinto de cero es el momento monopolar.

### Dipolo ideal

Un “dipolo ideal” (también llamado “dipolo puntual”) es un sistema idealizado cuyo único momento multipolar eléctrico no nulo es el momento dipolar.

El sistema formado por una carga  $q^{(1)} = -q$  y otra  $q^{(2)} = +q$ , separados una distancia  $d$  tiene momento monopolar nulo, mientras que

$$p_i = (-q)x_i^{(1)} + (+q)x_i^{(2)} = q(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) = qd_i, \quad (2.178)$$

$$Q_{ij} = (-q)x_i^{(1)}x_j^{(1)} + (q)x_i^{(2)}x_j^{(2)}, \quad (2.179)$$

$$Q_{ijk} = (-q)x_i^{(1)}x_j^{(1)}x_k^{(1)} + (q)x_i^{(2)}x_j^{(2)}x_k^{(2)}, \quad (2.180)$$

etc. En el límite  $\vec{d} \rightarrow \vec{0}$ , pero tal que  $\vec{p}$  sea finito (esto, por supuesto, requiere  $q \rightarrow \infty$ ), tendremos que  $Q_{ij} \rightarrow 0$ ,  $Q_{ijk} \rightarrow 0$ , y lo mismo ocurrirá para todo momento multipolar de orden superior (las componentes del momento multipolar de orden  $n$  son en este caso proporcionales a  $qd^n = pd^{n-1}$ ).

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x_j - x'_j)p_j}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \quad (2.181)$$

### 2.7.2. Distribuciones de carga en campos externos

En las secciones anteriores hemos considerado la expansión multipolar generada por una distribución compacta de carga  $\rho(\vec{x})$ . Ahora discutiremos una situación distinta: consideraremos una (pequeña) distribución de cargas en un campo eléctrico externo (es decir, generado por alguna otra distribución de carga). En particular, calcularemos la energía potencial de la distribución de carga en el campo externo dado, así como la fuerza y el torque que el campo externo ejerce.

#### Energía Potencial

Para evaluar esta integral, consideramos un punto representativo  $P$  de la distribución con coordenadas  $\vec{x}$  y un punto  $P'$  cualquiera de la distribución (con coordenadas  $\vec{x} + \vec{x}'$  respecto al origen) determinado por el vector  $\vec{x}'$  respecto al punto representativo  $P$  de la distribución, y expandiremos los valores  $\phi(P')$  en una serie de Taylor en torno a  $P$ :

$$\phi(P') = \phi(\vec{x} + \vec{x}') \quad (2.182)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} \quad (2.183)$$

$$= \phi|_{\vec{x}'=\vec{0}} + x'_i (\partial_i \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2} x'_i x'_j (\partial_i \partial_j \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \cdots \\ + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \cdots \quad (2.184)$$

$$= \phi(\vec{x}) - x'_i E_i(\vec{x}) - \frac{1}{2} x'_i x'_j (\partial_i E_j)(\vec{x}) \\ - \cdots - \frac{1}{n!} x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n-1}} E_{i_n})(\vec{x}) + \cdots \quad (2.185)$$

Con esto, podemos escribir (2.114) como

$$U = \int \rho(P') \phi(P') dV' \quad (2.186)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[ \int \rho(P') x'_{i_1} \cdots x'_{i_n} dV' \right] (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)|_{\vec{x}'=\vec{0}} \quad (2.187)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_n} \phi)(\vec{x}) \quad (2.188)$$

$$= Q\phi(\vec{x}) - Q_i E_i(\vec{x}) - \frac{1}{2} Q_{ij} (\partial_i E_j)(\vec{x}) \\ - \cdots - \frac{1}{n!} Q_{i_1 \cdots i_n} (\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{n-1}} E_{i_n})(\vec{x}) + \cdots \quad (2.189)$$

Por lo tanto, obtenemos que la energía potencial de una distribución de carga, caracterizada por sus momentos multipolares, en un campo externo

es dado por

$$U = Q \phi(\vec{x}) - \vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x}) - \frac{1}{2} Q_{ij} \partial_i E_j(\vec{x}) + \dots \quad (2.190)$$

El primer término de esta expansión, la contribución monopolar, es equivalente a la de una carga puntual en un potencial externo. El término siguiente (dipolar) representa la energía potencial de un dipolo ideal en un campo eléctrico externo. **Note que este término es mínimo cuando el momento dipolar es paralelo al campo eléctrico externo** (y es, en general, proporcional al coseno del ángulo entre  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$ ). El término cuadrupolar es distinto de cero sólo cuando el campo es no homogéneo. Note que en esta expresión también es posible usar un momento cuadrupolar redefinido como se discutió en la sección (2.7.1). En particular puede usarse el momento cuadrupolar sin traza. La energía potencial calculada usando distintos momentos cuadrupolares equivalentes es la misma puesto que un término proporcional a  $\delta_{ij}$  contribuirá con un término proporcional a  $\delta_{ij}(\partial_i E_j) = \partial_i E_i$ , que es cero en virtud de la ley de Gauss y el hecho que  $\vec{E}$  describe un campo eléctrico externo, es decir, un campo generados por fuentes fuera de la región bajo consideración.

### Fuerza

Una carga puntual  $q$  experimenta una fuerza  $\vec{F}(\vec{x}) = q \vec{E}(\vec{x})$  cuando está situada en un punto donde existe un campo externo  $\vec{E}(\vec{x})$ . Como consecuencia, la fuerza total sobre una distribución con densidad  $\rho$  en un campo externo puede escribirse como

$$F_i = \int \rho(P') E_i(P') dV'. \quad (2.191)$$

Expandimos  $E_i(P')$  en serie de Taylor, de forma similar a como lo hicimos en la sección anterior con el potencial

$$E_i(P') = E_i(\vec{x}) + x'_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \frac{1}{2} x'_j x'_k (\partial_j \partial_k E_i)(\vec{x}) + \dots + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \dots \quad (2.192)$$

Con esto, podemos reescribir (2.191) como

$$F_i = \int \rho(P') \left[ E_i(\vec{x}) + x'_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \frac{1}{2} x'_j x'_k (\partial_j \partial_k E_i)(\vec{x}) + \dots + \frac{1}{n!} x'_{i_1} \dots x'_{i_n} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \dots \right] dV' \quad (2.193)$$

$$= Q E_i(\vec{x}) + p_j (\partial_j E_i)(\vec{x}) + \dots + \frac{1}{n!} Q_{i_1 \dots i_n} (\partial_{i_1} \dots \partial_{i_n} E_i)(\vec{x}) + \dots \quad (2.194)$$

El primer término,  $Q \vec{E}(\vec{x})$ , es nuevamente la contribución monopolar correspondiente a la fuerza sobre una carga puntual. La contribución dipolar es

ahora proporcional al gradiente del campo eléctrico. Usando el hecho que el campo electrostático satisface  $\partial_i E_j = \partial_j E_i$  podemos expresar el término dipolar como  $\partial_i(p_j E_j)$ , es decir.

$$\boxed{\vec{F}(\vec{x}) = Q\vec{E}(\vec{x}) - \vec{\nabla}(-\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{x})) + \dots} \quad (2.195)$$

Note que el segundo término es el gradiente de la contribución dipolar a la energía potencial de la distribución.

### Torque

Análogamente al caso de la fuerza total, podemos calcular el torque neto ejercido por el campo externo sobre la distribución, respecto del punto representativo que hemos considerado:

$$\vec{\tau} = \int \rho(P') \vec{x}' \times \vec{E}(P') dV'. \quad (2.196)$$

En componentes, y usando la expansión (2.192) obtenemos que el componente que depende de  $\vec{r}$  que es el de primer orden en la expansión no contribuye al torque debido a que el producto vectorial de  $\vec{r} \times \vec{r} = 0$ . Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{x}) + \dots} \quad (2.197)$$

Es posible expresar la primera contribución (dipolar) al torque como un “gradiente” del término dipolar de la energía potencial  $U_{\vec{p}} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ , esta vez, sin embargo, no respecto a variaciones de la posición  $\vec{x}$  de la distribución, sino con respecto a cambios en la orientación del momento dipolar respecto al campo externo. La magnitud del torque es dada por

$$\begin{aligned} \tau &= pE \sin(\theta) & (2.198) \\ &= -\frac{d}{d\theta} (pE \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$= \frac{dU_{\vec{p}}}{d\theta}. \quad (2.199)$$

## 2.8. Electrostática macroscópica

Hasta ahora hemos estudiado las propiedades de los campos electrostáticos en el vacío y en el interior de conductores ideales. Estamos ahora interesados en las propiedades del campo eléctrico macroscópico en el interior de un material aislante. El término macroscópico se refiere al campo promedio en una pequeña región que, sin embargo, es grande comparada con el tamaño de las moléculas que constituyen el material.

Consideraremos entonces materiales aislantes, también llamados dieléctricos, en los que las cargas internas no tienen la libertad de desplazarse distancias macroscópicas (conducir) en presencia de un campo eléctrico aplicado, sino que están confinadas por la estructura atómica/molecular del material. La mayoría de los materiales son, en buena aproximación, dieléctricos.

En presencia de un campo eléctrico los dieléctricos redistribuyen sus cargas constituyentes. éstas no pueden desplazarse distancias macroscópicas, como ocurre en los conductores, sino sólo distancias del orden de magnitud determinado por su estructura molecular. Estos pequeños desplazamientos de carga tienen, sin embargo, consecuencias que se acumulan hasta ser perceptibles a escalas macroscópicas. Concretamente, en presencia de un campo eléctrico, el material se polariza. El campo eléctrico que causa (el cambio en) la polarización puede ser un campo “externo” (producido por “cargas externas”<sup>15</sup>, que no forman parte de la estructura atómica/molecular característica del medio).

El campo eléctrico total (“EL” campo eléctrico) es influenciado por la polarización del medio. Modelaremos este campo eléctrico (macroscópico)  $\vec{E}$  como la suma del campo producido por las cargas externas y el campo producido por la distribución de cargas de polarización (descrita por el vector de polarización  $\vec{P}$ ) del medio.

### 2.8.1. Vector y cargas de Polarización

Se define el vector de polarización como la densidad de momento dipolar (momento dipolar por unidad de volumen),

$$\vec{P}(x) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta V}, \quad (2.200)$$

donde  $\Delta \vec{p}$  es el momento dipolar total de las cargas del material contenidas en el volumen  $\Delta V$ . La región con volumen  $\Delta V$  se considera centrada en el punto  $\vec{x}$ , suficientemente pequeña desde el punto de vista macroscópico, pero grande comparada con la escala determinada por la estructura atómica/molecular del material. Equivalentemente, el vector de polarización es

<sup>15</sup>También llamadas “cargas libres” o “cargas no ligadas”.



definido tal que el momento dipolar  $d\vec{p}$  en un elemento de volumen (macroscópico)  $dV$  es dado por  $d\vec{p} = \vec{P}(\vec{x})dV$ .

Como consecuencia de la definición anterior, el momento dipolar total de las cargas contenidas en un volumen finito  $V$  es dado por

$$\vec{p}_V = \int_V \vec{P}(\vec{x}) dV. \quad (2.201)$$

Por otro lado, sabemos que el potencial generado por un dipolo ideal de momento dipolar  $\vec{p}$  ubicado en un punto con coordenadas  $\vec{x}'$  es de la forma (2.181). Luego, el potencial generado por una pequeña región de un medio polarizado con elemento de volumen  $dV'$  y polarización  $\vec{P}$  es dada por

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{P}(\vec{x}') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}. \quad (2.202)$$

De esta forma, si el sistema contiene además cargas libres en  $dV'$  entonces

$$d\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{x}') dV'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{P_i(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (2.203)$$

Por lo tanto, el potencial (macroscópico, total), de acuerdo a nuestro modelo, es dado por

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \frac{P_i(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right] dV'. \quad (2.204)$$

Usando la identidad (2.19) podemos escribir

$$\frac{P_i(\vec{x}')(\vec{x} - \vec{x}')_i}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = P_i(\vec{x}') \partial'_i \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \quad (2.205)$$

$$= \partial'_i \left( \frac{P_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{(\partial'_i P_i)(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.206)$$

De esta forma, considerando que la integral sobre los términos que dependen de la polarización están confinados al volumen  $V$  del material (lo que no necesariamente es así para el término conteniendo las cargas libres), podemos escribir

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \partial'_i P_i dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{P_i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_i \quad (2.207)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{ext}}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V} \frac{\sigma_P(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'. \quad (2.208)$$

La expresión anterior muestra que el campo (macroscópico) total es equivalente al campo producido por una densidad volumétrica de carga total,

$$\rho_T = \rho_{\text{ext}} + \rho_P, \quad (2.209)$$

donde

$$\boxed{\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}, \quad (2.210)$$

es la densidad (volumétrica) de carga de polarización, (definida en cada punto del material), más una densidad de carga de polarización de superficie,

$$\boxed{\sigma_P = \vec{P} \cdot \hat{n}}, \quad (2.211)$$

distribuida en la superficie  $S = \partial V$  del dieléctrico.

Note que la carga total de polarización, tal como se espera, es nula:

$$Q_P = \int_V \rho_P dV + \oint_{\partial V} \sigma_P dS \equiv 0, \quad (2.212)$$

en virtud del teorema de Gauss.

### 2.8.2. Desplazamiento eléctrico

Usando (2.209) en la ley de Gauss, podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho_T \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{ext}} - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}). \end{aligned}$$

Luego,

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) = \frac{\rho_{\text{ext}}(x)}{\epsilon_0}. \quad (2.213)$$

Definimos el vector de desplazamiento eléctrico (también llamado excitación eléctrica o inducción eléctrica) como

$$\boxed{\vec{D}(\vec{x}) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})}, \quad (2.214)$$

de modo que

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{ext}}}. \quad (2.215)$$

Las unidades del vector desplazamiento son de carga por unidad de área:  $[\vec{D}] = [\vec{P}] = [\sigma] \stackrel{\text{S.I.}}{=} C/m^2$ .

La utilidad de usar  $\vec{D}$  en lugar de  $\vec{E}$  en esta "ley de Gauss" (2.215) es que esta relación sólo involucra explícitamente a las cargas externas (que son usualmente conocidas y/o controlables). Por ejemplo, como consecuencia de (2.215) tenemos que

$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q_{\text{ext}}}. \quad (2.216)$$

**Ejemplo: Esfera dieléctrica isótropa y carga central**

Consideremos una carga (externa)  $Q$  situada en el centro de una esfera dieléctrica isótropa, podemos encontrar el vector de desplazamiento aplicando (2.216). Debido a la simetría del sistema (ya que asumimos que el dieléctrico es isótropo, ver secciones 2.8.5 y 2.8.6), tendremos que  $\vec{D}(\vec{x}) = D(r)\hat{r}$ . Eligiendo una superficie Gaussiana esférica de radio  $r$  centrada en la carga  $Q$ , encontramos entonces que

$$D(r) \oint_S dS = D(r)4\pi r^2 = Q, \quad (2.217)$$

y por lo tanto

$$\vec{D}(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (2.218)$$

**2.8.3. Relación Constitutiva, susceptibilidad, permeabilidad**

Cada medio se caracteriza por la polarización  $\vec{P}(\vec{x})$  que presenta, dados los campos/cargas externas. Esta polarización  $\vec{P}(\vec{x})$  depende entonces de los campos/cargas externas y de la constitución atómica/molecular del material (y en principio de otras propiedades, como la temperatura, presión, etc).

En un elemento de volumen dado del medio éste modificará su distribución microscópica de cargas como respuesta al campo eléctrico "total" que actúa sobre este elemento, hasta finalmente adoptar una cierta polarización. Podemos, por tanto, considerar que  $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$  o, equivalentemente  $\vec{D} = \vec{D}(\vec{E})$ . Esta última relación es llamada relación constitutiva del medio. El problema es que el campo  $\vec{E}(\vec{x})$  en un punto dado (con vector de polarización  $\vec{P}(\vec{x})$  y por tanto desplazamiento  $\vec{D}(\vec{x})$ ) depende también de cómo se polariza el medio en otras regiones, e.d.,  $\vec{E}(\vec{x})$  depende en general de<sup>16</sup>  $\vec{P}(\vec{x}')$ . En otras palabras, en general la polarización que se presentará en un medio es fruto de la respuesta colectiva del material a los campos externos.

Vemos entonces que calcular  $\vec{P}(\vec{x})$  desde "primeros principios" es en general difícil y requiere conocer los detalles de la estructura del material en estudio.

Existe una gran variedad de medios materiales con propiedades eléctricas diferentes e interesantes. Existen por ejemplo medios que tienen polarización no nula aún en ausencia de campos/cargas externas. Estos medios son conocidos como electretos (análogos eléctricos de los imanes permanentes), y ferro-eléctricos (que presentan polarización no nula bajo una cierta temperatura crítica, de Curie, análogamente a los ferro-magnetos). Un ejemplo de material ferro-eléctrico es el  $BaTiO_3$  (titanato de bario), que exhibe un momento dipolar eléctrico no nulo a temperaturas bajo  $120^\circ C$ . Un ejemplo

<sup>16</sup>Matemáticamente, esto significa que, en general,  $\vec{E}$  es un funcional, una "función de funciones" o una "función no-local" de  $\vec{P}$ .

de electreto es el cuarzo ( $SiO_2$ , dióxido de Silicio), que presenta propiedades piezoeléctricas.

Es útil además distinguir entre distintos tipos de polarización, dependiendo del mecanismo que gobierne dicha propiedad: polarización electrónica, p.ej. cuando un átomo se "deforma" en presencia de un campo externo; polarización iónica, causada por arreglo de iones (p.ej.  $NaCl$ ); polarización polar que se manifiesta en los gases (cuando la temperatura aumenta, disminuye la polarización porque las moléculas se "desordenan").

Más aún, en algunos materiales ("no-lineales") la respuesta (polarización) del material puede depender no-linealmente del campo eléctrico.

Sin embargo, existe una gran variedad de materiales que, desde el punto de vista macroscópico, pueden ser modelados adecuadamente (es decir, con precisión suficiente en la mayoría de las situaciones) por una relación lineal entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ . Un material lineal, pero en general no-local, puede describirse a través de una relación de la forma

$$D_i[\vec{E}](\vec{x}, t) = \int f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t') E_j(\vec{x}', t') dV' dt', \quad (2.219)$$

donde  $f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$  es un cierto tensor que describe las propiedades del medio. Como la polarización y por tanto el vector desplazamiento en un punto  $\vec{x}$  del medio están influenciadas en forma más determinante por lo que le ocurre al material en la inmediata vecindad de  $\vec{x}$  es de esperar que la función  $f_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$  sea concentrada en torno a  $\vec{x}$ , es decir, que decaiga rápidamente para  $|\vec{x}' - \vec{x}| \gg d$  donde  $d$  es la escala característica de la estructura microscópica del medio.

Por otro lado, existen muchos casos en que es suficiente considerar una relación constitutiva local en la que el vector desplazamiento en un punto dado puede modelarse como dependiendo exclusivamente del valor del campo eléctrico en el mismo punto (macroscópico), es decir  $\vec{D}(\vec{x}) = \vec{D}(\vec{E}(\vec{x}))$  o, equivalentemente  $\vec{P}(\vec{x}) = \vec{P}(\vec{E}(\vec{x}))$ .

En un material descrito por una relación constitutiva local podemos considerar la dependencia de  $\vec{P}$  con  $\vec{E}$  a través de una expansión en serie de la forma:

$$P_i(x) = P_i(E_j(x)) = (P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + E_j(\partial_j P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + \frac{1}{2} E_j E_k (\partial_j \partial_k P_i)_{\vec{E}=\vec{0}} + \dots, \quad (2.220)$$

que esperamos sea útil para campos eléctricos suficientemente débiles (en el presente contexto sólo podemos saber a posteriori qué tan débil requiere ser el campo). Note que en el lado derecho de (2.220) las derivadas  $\partial_i$  denotan derivadas respecto a la componente  $i$ -ésima del campo eléctrico, es decir  $\partial_i P_j = \partial P_j / \partial E_i$ , etc.. Las cantidades  $(P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$ ,  $(\partial_j P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$ ,  $(\partial_j \partial_k P_i)_{\vec{E}=\vec{0}}$ , etc. son tensores (cartesianos) que asumen diferentes valores para cada material y pueden ser considerados como parámetros (a determinar). Con esto,

podemos escribir

$$\boxed{P_i(x) = \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_{ij}E_j + \mathcal{A}_{ijk}E_jE_k + \dots} \quad (2.221)$$

En general, si el material es no homogéneo (por ejemplo, si está formado por capas de distintos materiales), los tensores  $\mathcal{A}_i$ ,  $\mathcal{A}_{ij}$ ,  $\mathcal{A}_{ijk}$ , etc. dependerán de la posición. Para materiales no-ferro-eléctricos (la gran mayoría) tenemos que  $\mathcal{A}_i = 0$ .

### Modelo microscópico para la polarización

En esta sección intentaremos motivar el efecto de la polarización en medios materiales dieléctricos. Considerando el caso más simple donde el medio sea un cristal formado por solo un tipo de átomo (o molécula) podemos pensar en un arreglo de  $N$  (del orden de  $10^{23}$ ) de estos átomos en una red periódica.

Partiendo de que el átomo es un sistema estable constituido por una nube de  $Z$  electrones, la cual consideraremos continua y un núcleo que consideraremos puntual de carga  $Ze$  donde  $Z$  es el número atómico del medio. Si queremos hacer un modelo clásico que describa el comportamiento de este sistema bajo la influencia de un campo eléctrico, podemos modelar cada átomo de la red como un conductor ideal (formado por la nube de electrones).

Como un conductor ideal el potencial de este átomo debe ser constante<sup>17</sup>, más aun podemos establecer como ya sabemos esta constante como cero.

Estableciendo estas hipótesis donde cada átomo del medio lo podemos considerar como una esfera conductora centrada en el origen de radio  $R$  el cual esta sometido a un campo eléctrico externo, podemos plantear nuestro modelo de forma matemática usando las ecuaciones 2.63, ver figura 2.3,

$$\nabla^2\phi = 0, \quad Q = 0, \quad \phi|_{r=R} = 0, \quad (2.222)$$

a estas ecuaciones falta poner la información de que la esfera se encuentra en un campo (idealizado como infinito) uniforme, para esto es lógico establecer que el campo resultante de esta interacción tiende a ser uniforme (en el eje  $z$ , por ejemplo) cuando la distancia de un punto a la esfera tiende a ser infinito, es decir

$$\vec{E} \rightarrow (0, 0, E_z), \quad \text{si } r \rightarrow \infty, \quad (2.223)$$

<sup>17</sup>Es interesante remarcar que un modelo cuántico más detallado, como por ejemplo el modelo de Thomas Fermi, predice que la contribución principal del potencial de un átomo (nube electrónica) es constante más términos de orden  $O(r^{1/2})$

donde  $E_z$  es una constante que determina el campo uniforme, en términos del potencial equivale a pedir que

$$\phi \rightarrow -E_z z, \quad \text{si } r \rightarrow \infty. \quad (2.224)$$

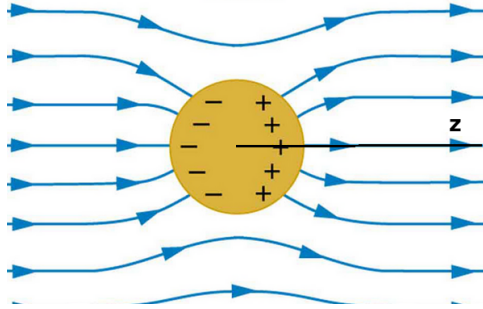


Figura 2.3: Esquema de una esfera conductora en un campo eléctrico uniforme.

Resolver este problema podría parecer difícil, pero podemos ver de la figura 2.3, el sistema se debería comportar como una superposición de dipolos, más aun sabemos que el potencial dipolar

$$\phi_{dip} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

donde  $p$  es la constante de polarización la cual por el momento es desconocida, satisface la ecuación de laplace y también sabemos que por ser un dipolo ideal  $Q = 0$ . Con esto en efecto casi tenemos cumplidas las condiciones de borde 2.222 y 2.223, para la condición al infinito 2.224 podemos simplemente superponer el término  $-E_z z$ . Como estamos usando el eje  $z$  como referencia el producto  $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos(\theta)$  en coordenadas esféricas, por lo que el potencial que proponemos debe ser de la forma

$$\phi = -E_z z + \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -E_z r \cos(\theta) + \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.225)$$

Del potencia definido por 2.225 podemos ver que se cumplen las primeras dos ecuaciones de 2.222 y la condición 2.224, solo falta imponer la condición de borde

$$\phi|_{r=R} = 0,$$

lo cual nos permitirá determinar  $p$ . Haciendo esto, lo cual es posible ya que los dos términos de la ecuación 2.225 tienen como factor común el  $\cos(\theta)$ , se deduce que

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E_z \equiv \alpha E_z. \quad (2.226)$$

Podemos ver como primera observación de nuestro modelo, que de la ecuación 2.226 la polarización es **linealmente proporcional al campo eléctrico externo**. Como segunda observación podemos calcular con este modelo clásico que la polarización de cada átomo debe ser  $4\pi\epsilon_0 R^3$ , donde  $R \sim 10^{-10}$  m, este resultado se compara muy bien a orden de magnitud con los datos experimentales (para gases).

### Modelo de Clausius-Mossotti

Como vimos en la sección anterior hay muy buenas razones para pensar que en la mayoría de los cuerpos, los átomos (moléculas) se polarizan proporcionalmente al campo externo al que dichos átomos están sometidos,  $\vec{E}_m$ :

$$\vec{p}_m = \alpha\epsilon_0\vec{E}_m$$

donde  $\vec{p}_m$  y  $\vec{E}_m$  son el momento dipolar molecular y el campo local en la molécula, siendo  $\alpha$  una constante. Pero en un sólido cristalino el campo  $\vec{E}_m$  no es igual al campo medio que aparece en las ecuaciones macroscópicas  $\vec{E}$  (porque debemos considerar el campo creado por la propia molécula vecina que no aparece en  $\vec{E}_m$ ). El campo promedio que "ven" las moléculas se puede calcular como la suma de tres campos:

$$\vec{E}_m = \vec{E} - \vec{E}_{esf} + \sum_{esf} \vec{E}_i,$$

donde  $\vec{E} - \vec{E}_{esf}$  es el campo creado en la posición de la molécula por todas las cargas exteriores a una esfera de radio suficientemente grande como para que sólo se observen efectos promedio, y  $\sum_{esf} \vec{E}_i$  es el campo creado por las moléculas interiores a la esfera, calculado sumando los efectos de cada una de ellas.

Ahora procederemos a calcular el campo local  $\vec{E}_m$  del átomo en una red cristalina. Primero demostraremos que el campo creado por las moléculas interiores a la esfera  $\sum_{esf} \vec{E}_i$  es cero.

Para demostrarlo consideraremos una red cúbica de dipolos orientados según el eje  $z$  (para las orientaciones  $x$  ó  $y$  el resultado será idéntico por simetría, y para una orientación arbitraria también, por superposición) y calcularemos el campo eléctrico en el nudo (en una red cúbica)  $(0, 0, 0)$  de la red, debido a los dipolos en los demás nodos. El campo eléctrico de un dipolo viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right)$$

Es claro que por simetría  $E_x = E_y = 0$  en el nodo  $(0, 0, 0)$ . En cuanto a la componente  $E_z$ , ésta vendrá dada por

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,k} \left( \frac{3 \cos^2(\theta_{ijk})}{r_{ijk}^3} - \frac{1}{r_{ijk}^3} \right)$$

donde

$$\cos^2(\theta_{ijk}) = \frac{k^2}{i^2 + j^2 + k^2}.$$

Como cada suma al ser una red cúbica tiene los mismo índices de inicio y de fin, entonces se debe cumplir que

$$\sum_{i,j,k} \frac{2k^2 - i^2 - j^2}{i^2 + j^2 + k^2} = 0,$$

otra forma de ver esto es considerando el caso continuo, lo que implicaría que esta suma se transforme en una integral de volumen sobre la esfera de radio  $R$  arbitrariamente grande,

$$\int_V \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{R^2} dV = 0,$$

que se puede demostrar fácilmente en coordenadas esféricas. Esto demuestra que el campo para  $\sum_{esf} \vec{E}_i$  es cero.

Con este resultado podemos ahora calcular el campo producido por la esfera el cual según la ecuación 2.226 debe estar dado por

$$\vec{E}_{esf} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (2.227)$$

donde  $\vec{P}$  es la densidad dipolar (dipolo entre volumen de la esfera  $\frac{4}{3}\pi R^3$ ), con lo que llegamos a

$$\vec{E}_m = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \quad (2.228)$$

La ecuación 2.228 permite establecer la relación entre las propiedades microscópicas de las moléculas y las propiedades macroscópicas de los materiales. En efecto, la polarización del medio vendrá dada por 2.226

$$\vec{P} = N\vec{p}_m = N\epsilon_0\alpha\vec{E}_m$$

donde  $N$  es el número de moléculas por unidad de volumen. Sustituyendo en 2.228 se obtiene:

$$\vec{P} = \frac{N\alpha\epsilon_0}{1 - (N\alpha/3)} \vec{E}$$



donde  $\vec{E}$  es el campo macroscópico. Este resultado se conoce como ecuación de Clausius-Mossotti, y nos permite estimar la polarización de un medio sólido cristalino conociendo su polarización individual. Veremos más adelante como podemos usar este modelo para estimar los índices de refracción.

#### 2.8.4. Modelo estadístico básico, para estimar la polarización

En esta sección daremos un razonamiento intuitivo y simple de como modelar el vector de polarización considerando las fluctuaciones térmicas del material. En principio en ausencia de fuerzas térmicas la energía que polariza el medio sometido a un campo eléctrico  $\vec{E}$  esta dada solo por el dipolo 2.190;  $U_{tot} = -N\vec{p} \cdot \vec{E}$ , donde  $N$  es el número de átomos en el material. Cuando consideramos la energía térmica  $\approx NkT$  (donde  $k$  es la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura absoluta) entonces la energía total tiende a ser más positiva ;  $U_{tot} = -N\vec{p} \cdot \vec{E} + NkT$ .

Ahora como es poco práctico considerar todos los movimientos del material uno a uno, consideramos en su lugar promedios sobre las variables de interés; como la energía, velocidad etc. Dadas las consideraciones anteriores el promedio de la energía total:  $\langle U_{prom} \rangle$  puede ser positiva o negativa, en el primer caso nos dice que físicamente el efecto de la polarización empieza a ser despreciable hasta que este ya no pueda mantener una polarización promedio, en el otro caso la polarización es lo suficientemente fuerte para estar sesgada en la dirección del campo eléctrico. Por ende podemos decir que debe existir una temperatura **crítica** en la cual sin importar el campo eléctrico aplicado la polarización es cero, más en general esperamos que debajo de esta temperatura la polarización disminuya al aumentar la temperatura alcanzando su máximo cuando  $T \rightarrow 0$ .

La siguiente pregunta evidente es como considerar los promedios (en equilibrio termodinámico) sobre la energía, velocidad, etc. Lo matemáticamente razonable seria considerar una distribución de probabilidad sobre la posición y la velocidad de cada partícula en el sistema sometida a ciertas fuerzas (conservativas). En estas notas no pretendemos dar una respuesta formal a este problema, ya que es en general un tema más avanzado y se aparta demasiado sobre nuestra discusión. En lugar de ello consideraremos el gas ideal (monotónico) y de ahí podemos hacer una inferencia de cual debe ser esta distribución.

**Breve y simple introducción a la estadística de Maxwell-Boltzman**

Consideremos un gas ideal sometido al potencial gravitacional en la superficie de un planeta esférico. En este caso como el gas es compresible esperamos que la mayor parte del gas este concentrada en la superficie del planeta. Además consideremos que el gas se mueve con una velocidad arbitraria  $\vec{v}$ , podemos sobre la presión que ejerce esta gas en un elemento pequeño de volumen si usamos la ecuación de Bernoulli

$$\Delta P = -(\rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2), \quad (2.229)$$

donde  $g$  es la gravedad del planeta,  $\rho$  es la densidad del gas y  $z$  es la altura medida sobre la superficie. Por tratarse el fluido de un gas ideal podemos escribir la ecuación de estado

$$PV = NkT, \quad P = \rho(kT/M_a) \quad (2.230)$$

donde  $M_a$  es la masa atómica molar del gas. De las ecuaciones 2.229 y 2.230 podemos deducir el cambio de presión en función de la densidad,

$$-dP = \rho g dz + \frac{1}{2}\rho \vec{v} \cdot d\vec{v} = (\frac{1}{2}g dz + \frac{1}{2}\vec{v} \cdot d\vec{v})(PM_a/kT),$$

resolvemos esta ecuación fácilmente lo que resulta

$$P = P_0 e^{-(M_a g z + \frac{1}{2}M_a v^2)/(kT)}, \quad (2.231)$$

donde  $P_0$  es la presión en la superficie.

Observemos que el término dentro del argumento de la exponencial se puede interpretar como la energía de cada partícula del gas con una velocidad  $v$  a una altura  $z$  en un potencial gravitatorio lineal, por ende fuerza constante.

Analicemos ahora el problema desde un punto de vista estadístico. Podemos generalizar la energía por  $E = \phi + \frac{1}{2}mv^2$ , donde  $\phi$  es un potencial cualquiera, en nuestro caso es  $\phi = mgz$  y también la velocidad por simplicidad solo será unidimensional. Desde un punto de vista estadístico la partícula puede variar su posición de  $z$  a un valor arbitrario  $z'$  asimismo su velocidad de  $v$  a  $v'$  por lo que la energía ahora sería  $E' = mg(z - z') + \frac{1}{2}m(v - v')^2$ .

Bajo esta consideraciones podemos proponer como .Anzats que la distribución de partículas debe ser de la forma

$$f(z', v') = C e^{-E'/kT}, \quad (2.232)$$

donde  $C$  es una constante de normalización determinada por

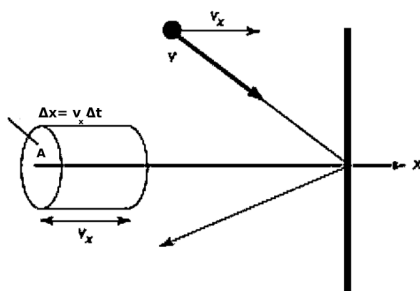


Figura 2.4: En una unidad infinitesimal de tiempo, todos los átomos con velocidad en  $x$  ( $v_x$ ) habrán atravesado un cilindro de longitud numéricamente igual  $\Delta x$ .

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} f(z', v') dz', dv' = N.$$

donde  $N$  es el número total de partículas. La ecuación 2.232 se conoce como distribución de Maxwell-Boltzman (en una dimensión). En nuestro caso recordando que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , podemos determinar la constante  $1/C = (e^{mgz/kT})(\frac{kT}{mg})(\sqrt{\frac{2kT\pi}{m}})$ .

Si la distribución 2.232 es correcta debe ser capaz de deducir 2.230 y 2.231. Empecemos con un gas ideal en reposo  $v = 0$ , por lo que la distribución de Maxwell-Boltzmann normalizada es

$$f(\vec{x}, \vec{v}) = (N/V) \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{kT}}$$

donde  $V$  es el volumen que ocupa la partícula. La presión desde el punto de vista estadístico se debe a la transferencia de momento de las partículas del gas a la pared. Así el momento transferido (en dirección  $x$ ) a la pared, ver figura 2.4 cuando la partícula rebota es:  $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$ . Considerando que el número total de partículas debe ser,

$$N = \int \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} f(\vec{x}, \vec{v}) d^3x d^3v = V \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{x}, \vec{v}) d^3v, \quad (2.233)$$

entonces el flujo de partículas, se puede definir como el número de partículas por unidad de tiempo y área:  $\frac{dN}{dt dA}$ . Si consideramos un cilindro dirigido hacia la pared donde chocan las partículas ( $v > 0$ ) podemos considerar que la partículas de ese cilindro ocupan un volumen  $dA dx$  donde  $dA$  es el área de la tapa del cilindro.

Dadas estas consideraciones la presión debe ser el momento transferido por el flujo de partículas (obsérvese que se tienen las mismas unidades), por lo que podemos escribir

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (2mv_x)(v_x)f(\vec{x}, \vec{v})d^3v = 2m \langle v_x^2 \rangle .$$

Antes de efectuar la integral debemos notar que los valores esperados de la velocidad cuadrática media son iguales dada la distribución de Maxwell-Boltzman, i.e  $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$ , lo cual es obvio de 2.232. Con esto podemos expresar  $\langle v_x^2 \rangle = 1/3 \langle v^2 \rangle$ , lo que implica (haciendo la integral)

$$P = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (2mv_x)(v_x)f(\vec{x}, \vec{v})d^3v = \frac{2}{3}m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3}m(N/2V)(3kT),$$

ecuación que podemos reescribir como  $PV = NkT$  que es la ecuación del gas ideal!

### Modelo dipolar para la susceptibilidad eléctrica de un material homogéneo e isótropo

Un gas (o un cristal que estadísticamente esta en equilibrio consiste en  $N$  moléculas con momento dipolar idénticas, que tiene un momento dipolar individual  $p$ . Podemos usar el modelo de Maxwell-Boltzmann para calcular la dependencia del vector de polarización  $\vec{P}$  en un campo eléctrico externo aplicado  $\vec{E}$ , despreciando como modelo simple la interacción entre moléculas y deformación electrónico-molecular. Primero usaremos la ec.2.190 para cada dipolo y evaluamos el promedio de la energía dipolo-campo;  $\langle U \rangle = - \langle \vec{p} \cdot \vec{E} \rangle = -pE \langle \cos(\theta) \rangle$ . El efecto total de los  $N$  dipolos (por unidad de mol) del medio debe ser igual a la energía total macroscópica caracterizada por el vector de polarización  $\vec{P}$ ,

$$U_{tot} = N \langle U \rangle = -NpE \langle \cos(\theta) \rangle = -\vec{P} \cdot \vec{E}, \quad (2.234)$$

es evidente que en este caso el vector de polarización se determina por medio del ángulo promedio de alineación de los dipolos con el campo externo. Podemos evaluar en coordenadas esféricas el valor de  $\langle \cos(\theta) \rangle$ , lo que finalmente da como resultado

$$P = Np \frac{\int_0^\pi \cos \vartheta \exp[(pE/T) \cos \vartheta] \sin \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \exp[(pE/T) \cos \vartheta] \sin \vartheta d\vartheta} = \frac{\partial}{\partial a} \ln \int_{-1}^1 e^{ax} dx, \quad (2.235)$$

donde  $U = -pE \cos \vartheta$ ,  $a = pE/kT$  y  $x = \cos(\theta)$ . La integral en 2.235 se puede hacer en términos de funciones elementales, lo cual queda

$$P(T) = Np \frac{d}{da} \ln \left( \frac{2}{a} \sinh a \right) = Np \left( \coth a - \frac{1}{a} \right), \quad (2.236)$$

a esta ecuación se le conoce como ecuación de Langevin. En el caso de temperaturas o interacción dipolar débil  $a \ll 1$  y la ecuación anterior se puede desarrollar en Taylor como

$$P(T) = Np\left(\frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots\right), \quad a \ll 1, \quad (2.237)$$

Dejando solo el término lineal se encuentra que el vector de polarización depende de la temperatura como  $1/T$ , resultado conocido como **Ley de Curie** y además el vector de polarización es directamente proporcional al campo eléctrico externo.

### 2.8.5. Medios lineales anisótropos (Opcional)

Adicionalmente, si la polarización de un material es descrita apropiadamente por una relación lineal, como ocurre en el caso de campos eléctricos suficientemente débiles, como vimos en la sección anterior en la ecuación 2.237, tendremos

$$\boxed{P_i(x) = \varepsilon_0 \chi_{ij}(x, T) E_j(x)}, \quad (2.238)$$

entonces decimos que el medio es lineal y por 2.237  $\chi_{ij}(x, T) \propto 1/T$ . El tensor  $\chi_{ij}$  es llamado tensor de susceptibilidad eléctrica del medio. El factor  $\varepsilon_0$  es incluido de modo que  $\chi_{ij}$  es un tensor adimensional. En este caso, usando (2.214) y (2.238), tenemos que

$$\boxed{D_i(x) = \varepsilon_{ij}(x) E_j(x) = \varepsilon_0 \kappa_{ij}(x) E_j(x)}, \quad (2.239)$$

donde hemos definido el tensor de permitividad del medio  $\varepsilon_{ij}$ , por

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}) \quad (2.240)$$

y, alternativamente, el tensor dieléctrico,

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \chi_{ij}, \quad (2.241)$$

que tiene la ventaja de ser una cantidad adimensional.

Es posible probar por argumentos energéticos que si el medio no es disipativo (no existen mecanismos de transferencia de energía del campo eléctrico a otras formas de energía) entonces necesariamente  $\chi_{ij}$  (y por tanto  $\varepsilon_{ij}$  y  $\kappa_{ij}$ ) es un tensor simétrico y que posee, por lo tanto, 6 componentes independientes. La descripción de las propiedades de un medio lineal a través de un tensor de susceptibilidad eléctrica incluye el caso en que el medio sea anisótropo, es decir, que sus propiedades no sean invariantes bajo rotaciones o, en otras palabras, que posea ciertas direcciones preferentes. En un medio anisótropo, la polarización no será en general paralela al campo eléctrico

(excepto para las direcciones preferentes dadas por las direcciones principales. Ver sección 2.8.8.), esto como resultado de la estructura microscópica del material (típicamente, cristales), que tienen como consecuencia que el material se polariza en algunas direcciones más fácilmente que en otras.

Note que en el caso más general en que se consideran campos eléctricos dependientes del tiempo (esto es necesario, por ejemplo, en el caso de propagación de ondas electromagnéticas), aún cuando un medio pueda considerarse lineal y local respecto a su dependencia con la posición, la relación constitutiva es de la forma

$$D_i(x, t) = \int f_{ij}(t, t') E_j(x, t') dt'. \quad (2.242)$$

En estos casos es conveniente considerar las transformadas de Fourier temporal de los campos, es decir  $\tilde{D}_i(x, \omega)$ ,  $\tilde{E}_i(x, \omega)$ , etc., ya que permiten escribir la relación constitutiva como

$$\tilde{D}_i(x, \omega) = \tilde{\varepsilon}_{ij}(x, \omega) \tilde{E}_j(x, \omega). \quad (2.243)$$

Comparando (2.243) con (2.239) vemos que en el caso más general, el tensor  $\tilde{\varepsilon}_{ij}(x, \omega)$  juega un rol análogo a  $\varepsilon_{ij}$  en (2.239) y también es llamado, por esta razón, el tensor dieléctrico del medio. Note, sin embargo, que este tensor asume valores complejos y depende en general de la frecuencia  $\omega$ .

### 2.8.6. Medios lineales isótropos

Si el material es isótropo, es decir, si éste no posee ninguna dirección preferente, la polarización debe necesariamente ser paralela al campo eléctrico, independientemente de la dirección de este último. Esta condición requiere que el tensor de susceptibilidad sea proporcional al tensor identidad,

$$\chi_{ij} = \chi \delta_{ij}, \quad (2.244)$$

de modo que

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (2.245)$$

Muchos materiales presentan propiedades de polarización independientes de la dirección del campo eléctrico, es decir, son isótropos. Por ejemplo, los gases, líquidos (excepto los, así llamados, cristales líquidos), sólidos amorfos (plásticos, vidrio). Los medios no-lineales, pero isótropos, pueden ser descritos usando  $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi(|\vec{E}|) \vec{E}$ .

**En este curso, a menos que se explicita lo contrario, consideramos siempre materiales lineales, isótropos y homogéneos.** En este caso, es suficiente introducir la (“constante de”) permitividad y/o la constante dieléctrica por

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi), \quad \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi. \quad (2.246)$$

Note que en un medio polarizable es de esperar que  $\chi > 0$ , de modo que  $\varepsilon > \varepsilon_0$  o, equivalentemente,  $\kappa > 1$ . El vacío puede ser considerado como un “medio isótropo” con  $\chi = 0$  y  $\kappa = 1$ , es decir, no polarizable. Recuerde también que el índice de refracción de la mayoría de los medios (“no-magnéticos”) es dado por  $n \approx \sqrt{\kappa}$ .

Material	$\kappa$
Vacío	1
Aire (seco, 0°C, 1 bar)	1,00059
Agua (110°C, 1 bar)	1,0126
Agua (20°C)	80,0
Hielo (-30°C)	99
$SrTiO_3$ (cristal, 10K)	12.000

Cuadro 2.1: Algunos materiales isótropos y sus constantes dieléctricas.

### 2.8.7. Ecuación de Poisson y su generalización

Usando (2.215) y (2.24) encontramos la generalización de la ecuación de Poisson para el potencial en un dieléctrico lineal y local:

$$\partial_i (\kappa_{ij} \partial_j \phi) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho_{\text{ext}}. \quad (2.247)$$

Para un material homogéneo e isótropo, esta ecuación se reduce a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho_{\text{ext}}, \quad (2.248)$$

que tiene la misma forma (matemáticamente, es la misma ecuación) que en caso del campo en el vacío ( $\varepsilon = \varepsilon_0$ ). Finalmente, en regiones fuera de cargas externas (¡pero no de cargas de polarización!), el potencial satisface la ecuación de Laplace. Como consecuencia, es posible usar las técnicas conocidas para solucionar esta ecuación. **Como veremos a continuación, una diferencia importante respecto al caso en el vacío será la implementación de las condiciones de borde o frontera.**

### 2.8.8. Direcciones principales de un medio anisótropo

Como vimos, en un medio anisótropo, el campo eléctrico no tiene en general la misma dirección que el vector desplazamiento. Existen, sin embargo, direcciones “especiales” a lo largo de las cuales el campo eléctrico sí tiene la misma dirección que la polarización. Esto significa que, si  $\hat{n}$  es una de estas

direcciones, conocidas como direcciones principales del material, entonces  $\vec{E} = E\hat{n}$  y  $\vec{D} = D\hat{n}$ . Insertando estas condiciones en (2.239) obtenemos que

$$\kappa_{ij} \hat{n}_j = \lambda \hat{n}_i, \quad D = \varepsilon_0 \lambda E. \quad (2.249)$$

Vemos de aquí que las direcciones principales corresponden a los vectores propios de la matriz  $\kappa_{ij}$ , mientras que el valor propio  $\lambda$  es el valor de la constante dieléctrica del material a lo largo de aquella dirección principal. Como la matriz  $\kappa_{ij}$  es real y simétrica, es posible encontrar tres vectores propios ortonormales, es decir, una base ortonormal formada por las direcciones principales del material. Existen distintos casos particulares e interesantes de materiales anisótropos correspondiendo a si los valores propios son todos diferentes o iguales. Si todos los valores propios son iguales, el material es isótropo, puesto que en ese caso  $\kappa_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ . Si dos valores propios son iguales y uno diferente, se dice que el material es uniaxial (puesto que tienen una dirección distintiva, aquella descrita por el vector propio del valor propio distinto a los otros dos. Esta dirección es llamada eje óptico). Un ejemplo de material uniaxial natural es la Calcita ( $CaCO_3$ ). En materiales uniaxiales la propagación de la luz presenta el fenómeno llamado birefringencia, en los que la luz en su interior se propaga, en general, por dos trayectorias diferentes (rayo “ordinario” y “extraordinario”) correspondientes a dos índices de refracción diferentes. Además, es posible inducir anisotropía (y por tanto, en general, birefringencia), comprimiendo un material en una dirección dada, o con un campo eléctrico intenso externo (efecto Kerr). Finalmente, si los tres valores propios del tensor dieléctrico son diferentes, entonces el material (típicamente un cristal) es llamado biaxial.

Mineral    Fórmula química     $n_o = \sqrt{\kappa_{\perp}}$      $n_e = \sqrt{\kappa_{\parallel}}$

Berilo	$Be_3Al_2(Si_6O_{18})$	1.602	1.557
Calcita	$CaCO_3$	1.658	1.486
Hematita	$Fe_2O_3$	2.940	3.220
Hielo	$H_2O$	1.309	1.313
Niobiato de litio	$LiNbO_3$	2.272	2.187
Fluoruro de magnesio	$MgF_2$	1.380	1.385
Quarzo	$SiO_2$	1.544	1.553
Rubí	$Al_2O_3:Cr$	1.770	1.762
Zafiro	$Al_2O_3$	1.768	1.760
Nitrato de sodio	$NaNO_3$	1.587	1.336
Circón, high	$ZrSiO_4$	1.920	-1.960 1.967-2.015

Cuadro 2.2: Algunos cristales uniaxiales y sus índices de refracción. Datos tabulados para  $\lambda \sim 590$  [nm] [?].



Mineral	Fórmula química	$\sqrt{\kappa_x}$	$\sqrt{\kappa_y}$	$\sqrt{\kappa_z}$
Bórax	$\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$	1.447	1.469	1.472
Sulfato de magnesio	$\text{MgSO}_4 \cdot 7(\text{H}_2\text{O})$	1.433	1.455	1.461
Olivina	$(\text{Mg,Fe})_2\text{SiO}$	1.640	1.660	1.680
Perovskita	$\text{CaTiO}_3$	2.300	2.340	2.380

Cuadro 2.3: Algunos cristales biaxiales. Datos tabulados para  $\lambda \sim 590$  [nm] [?].

### 2.8.9. Condiciones de frontera para $\vec{D}$

El vector desplazamiento eléctrico satisface la ecuación (2.215), que es de la misma forma que la ley de Gauss (2.39), con la diferencia que en (2.215) el factor  $\varepsilon_0$  está ausente y que la densidad de carga en el lado derecho es sólo la densidad de cargas externas (no las de polarización). Como consecuencia, podemos aplicar el mismo procedimiento discutido en la sección 2.2.2 para derivar las condiciones que el vector desplazamiento debe satisfacer en la frontera de dos materiales. Consideramos una superficie que divide dos dieléctricos de propiedades diferentes, en la que, eventualmente, existe una densidad de carga externa  $\sigma_{\text{ext}}$ . Si  $\hat{n}$  es el vector unitario normal a la superficie en un punto dado, que apunta desde el material 1 hasta el 2, entonces

$$\boxed{\vec{D}_2 \cdot \hat{n} - \vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \sigma_{\text{ext}}.} \quad (2.250)$$

Por otro lado, el campo eléctrico  $\vec{E}$  sigue satisfaciendo (2.26), de modo que, como consecuencia, su componente tangencial es continua a través de la superficie, tal como lo expresa la condición (2.56). Recuerde finalmente que el potencial eléctrico siempre es una función continua, de modo que el campo eléctrico, aunque eventualmente discontinuo, es finito en todo punto.

### 2.8.10. Caso de un medio lineal e isótropo

Consideramos aquí el caso particular de medios lineales e isótropos caracterizados por las constantes dieléctricas  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  respectivamente. Consideramos además el ángulo entre los vectores campo eléctrico a cada lado de la superficie y el vector normal.

Aquí tendremos que, en ausencia de cargas externas, la componente normal del vector desplazamiento es continua a través de la superficie,  $\vec{D}_1 \cdot \hat{n} = \vec{D}_2 \cdot \hat{n}$ , que puede escribirse más explícitamente como:

$$\kappa_1 E_1 \cos \alpha_1 = \kappa_2 E_2 \cos \alpha_2. \quad (2.251)$$

Por otro lado, la condición sobre la componente tangencial a la superficie implica que

$$E_1 \sin \alpha_1 = E_2 \sin \alpha_2. \quad (2.252)$$

Dividiendo (2.252) por (2.251) (asumiendo naturalmente que  $E_1$  y  $E_2$  son no nulos), obtenemos una simple relación entre los ángulos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ :

$$\frac{\tan \alpha_1}{\kappa_1} = \frac{\tan \alpha_2}{\kappa_2}. \quad (2.253)$$

### 2.8.11. Energía electrostática en un dieléctrico

En la sección 2.6.2 vimos una expresión para la energía almacenada en un campo dado o, equivalentemente la energía necesaria para formar el sistema de cargas correspondientes a un campo. Ahora calcularemos algo análogo, pero diferente: la energía almacenada en una configuración de campo en un sistema que consta de cargas externas y un dieléctrico dado. En otras palabras, no incluiremos la energía necesaria para formar el dieléctrico, sino sólo la energía necesaria para montar una cierta distribución de cargas externas en un dieléctrico preexistente.

El trabajo necesario para aumentar (en general, para cambiar) la densidad de cargas externas en  $\delta\rho_{\text{ext}}(x)$  en un medio con potencial  $\phi(x)$  es dado por

$$\delta U = \int_{R^3} \phi(x) \delta\rho_{\text{ext}}(x) dV. \quad (2.254)$$

Usando (2.215) encontramos que el cambio en densidad de cargas externas está relacionado con el cambio en el vector desplazamiento por medio de  $\vec{\nabla} \cdot (\delta\vec{D}) = \delta\rho_{\text{ext}}$ . Usando esto, e integrando por partes, podemos reescribir (2.254) como:

$$\delta U = \oint_{\infty} \phi(x) \delta\vec{D}(x) \cdot d\vec{S} + \int_{R^3} \vec{E} \cdot \delta\vec{D} dV. \quad (2.255)$$

Asumiendo, como es usual, que los campos se anulan suficientemente rápido en el infinito, llegamos a

$$\delta U = \int_{R^3} \vec{E}(x) \cdot \delta\vec{D}(x) dV. \quad (2.256)$$

Si las cargas externas están posicionadas de forma tal que (en cada punto) su densidad es una fracción  $\lambda$  de la densidad final, es decir, si es  $\lambda\rho_{\text{ext}}(x)$ , entonces el vector desplazamiento correspondiente será  $\lambda\vec{D}(x)$  (como consecuencia de (2.215)) y el campo eléctrico correspondiente lo denotaremos  $\vec{E}_\lambda(x)$ . Al incrementar ahora la densidad en  $\delta\rho_{\text{ext}}(x) = \rho_{\text{ext}}(x) d\lambda$  el cambio respectivo del vector desplazamiento es  $\delta\vec{D}(x) = \vec{D}(x) d\lambda$ . Entonces, la energía total requerida para “montar” una distribución de carga (final)  $\rho_{\text{ext}}(x)$  o,

equivalentemente, la energía necesaria para que el campo eléctrico sea  $\vec{E}(x)$  y el vector desplazamiento  $\vec{D}(x)$  puede calcularse “sumando” las energías necesarias en cada incremento, desde la situación inicial donde no hay cargas externas ( $\lambda = 0$ ) hasta alcanzar el 100 % de las cargas y campos ( $\lambda = 1$ ):

$$U = \int_0^1 d\lambda \int_{R^3} \vec{E}_\lambda \cdot \vec{D} dV. \quad (2.257)$$

Esta expresión es válida en general, para cualquier tipo de dieléctrico.

Para medios lineales las componentes del vector desplazamiento son directamente proporcionales a las componentes del campo eléctrico, luego  $\vec{E}_\lambda(x) = \lambda \vec{E}(x)$ . En este caso, la energía necesaria para obtener, en un medio dieléctrico lineal preexistente, una cierta configuración de campos y cargas es

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{E} \cdot \vec{D} dV. \quad (2.258)$$

La respectiva densidad de energía electrostática asociada es, entonces,

$$u(x) = \frac{1}{2} \vec{E}(x) \cdot \vec{D}(x). \quad (2.259)$$

En general, para un medio anisótropo tendremos

$$u(x) = \frac{\epsilon_0}{2} \kappa_{ij}(x) E_i(x) E_j(x). \quad (2.260)$$

Finalmente, para un medio isótropo

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \kappa \vec{E}^2. \quad (2.261)$$

Note además que, en términos del potencial y la densidad de carga externa, la energía (2.258) puede escribirse como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \phi(x) \rho_{\text{ext}}(x) dV. \quad (2.262)$$

### 2.8.12. Fuerzas y torques

El conocimiento de la energía electrostática de sistemas que constan de cargas, conductores y dieléctricos puede ser usada para calcular (generalmente en forma simple) fuerzas y torques actuando sobre una parte del sistema. Para esto, deben considerarse dos subcasos: a) aquellos sistemas que están aislados y, por lo tanto, la carga y la energía total del sistema son constantes, y b) sistemas que no están aislados, pero en los que, fuentes (baterías) externas mantienen constante las diferencias de potencial entre los conductores presentes.

**Sistema aislado**

En este caso, el trabajo  $\delta W$  realizado por las fuerzas que actúan sobre una de las partes móviles del sistema debe producirse a costa de la variación de la energía electrostática del mismo sistema,  $\delta U$ , es decir,

$$\delta W + \delta U = 0. \quad (2.263)$$

Si la parte móvil realiza un desplazamiento (real o virtual)  $\delta x_i$  a partir de su posición inicial  $x_i$ , y la fuerza sobre ella es  $F_i$  entonces

$$\delta W = F_i \delta x_i. \quad (2.264)$$

Usando (2.263) y (2.264) podemos entonces escribir

$$F_i = - \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_Q, \quad (2.265)$$

donde el subíndice  $Q$  indica que al efectuar las derivadas parciales debe tenerse en cuenta que la carga del sistema se mantiene constante, y la energía electrostática debe ser escrita en función de la posición de la parte móvil,  $U = U(x_i)$ .

En el caso que la parte móvil rota en un ángulo  $\delta\theta$  respecto a un eje determinado por el vector  $\hat{n}$ , tenemos que  $\delta W = \hat{\tau} \cdot \hat{n} \delta\theta$ , de modo que el torque sobre la parte móvil puede ser calculado usando

$$\vec{\tau} \cdot \hat{n} = - \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_Q. \quad (2.266)$$

Análogamente al caso “traslacional” de la fuerza, la expresión (2.266) asume que se ha determinado la dependencia de la energía electrostática del sistema en función de la posición angular de la parte móvil, es decir, que se conoce la función  $U(\theta)$ .

**Sistema con conductores a potencial constante**

En este caso, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre una de las partes móviles del sistema, más la variación de la energía electrostática del sistema, debe ser igual a la energía suministrada por las baterías que mantienen los conductores a potenciales constantes,  $\delta W_b$ , de modo que

$$\delta W + \delta U = \delta W_b. \quad (2.267)$$

Ahora, la variación de la energía electrostática de los conductores con potenciales fijos es dada, ver (2.254), por

$$\delta U = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \delta Q^{(\alpha)}, \quad (2.268)$$

donde  $\delta Q^{(\alpha)}$  es el cambio de las cargas en el conductor  $\alpha$ -ésimo, necesaria para mantener su potencial  $\phi^{(\alpha)}$  constante. Por otro lado, la energía suministrada por las baterías es igual al trabajo necesario para transportar las cargas  $\delta Q^{(\alpha)}$  hasta cada conductor, es decir,

$$\delta W_b = \sum_{(\alpha)} \phi^{(\alpha)} \delta Q^{(\alpha)}. \quad (2.269)$$

De esta forma encontramos que

$$\delta W_b = 2\delta U. \quad (2.270)$$

Con este resultado y (2.267) llegamos a

$$\delta U = \delta W, \quad (2.271)$$

que, en los casos de desplazamientos y rotaciones, implica

$$F_i = \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} \right)_\phi, \quad (2.272)$$

y, para el torque,

$$\vec{\tau} \cdot \hat{n} = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)_\phi. \quad (2.273)$$

### Ejemplo: Fuerza sobre un condensador semi-lleno con un dieléctrico

Consideremos el caso en que el sistema está cargado, con cargas  $+Q$  y  $-Q$  respectivamente, y aislado. Debemos determinar los campos en la región con dieléctrico (región 1) y sin él (región 2). Despreciando efectos de borde, podemos aproximar que todos los campos son verticales, con sus sentidos hacia abajo. Ya que la componente tangencial del campo eléctrico es continua en una interfase entre dos dieléctricos, encontramos que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es igual en todo punto entre las placas del condensador, es decir,

$$E_1 = E_2. \quad (2.274)$$

Usando (2.216) encontramos directamente que

$$D_1 = \varepsilon_0 \kappa E = \sigma_1, \quad D_2 = \varepsilon_0 E = \sigma_2, \quad (2.275)$$

donde  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son las densidades de carga en las placas en la región correspondiente. La carga total en cada placa es entonces dada por

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (2.276)$$

$$= \varepsilon_0 \kappa E w x + \varepsilon_0 E w (l - x) \quad (2.277)$$

$$= \varepsilon_0 E w (\kappa x + l - x), \quad (2.278)$$

donde  $w$  es la longitud de la otra arista del rectángulo que define cada placa (es decir, en la dirección perpendicular).

La energía electrostática del sistema puede ser calculada evaluando (2.258):

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} dV \quad (2.279)$$

$$= \frac{1}{2} (D_1 E V_1 + D_2 E V_2) \quad (2.280)$$

$$= \frac{1}{2} [\varepsilon_0 \kappa x w d + \varepsilon_0 (l - x) w d] E^2 \quad (2.281)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\kappa x + l - x) w d E^2. \quad (2.282)$$

Usando (2.278), podemos finalmente expresar la energía electrostática del sistema como

$$U(x) = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 w} \frac{1}{(\kappa x + l - x)}. \quad (2.283)$$

Ya que el sistema está aislado y  $Q$  es constante, la fuerza sobre el dieléctrico puede ser calculada a partir de (2.265). Así obtenemos

$$F(x) = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 w} \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa x + l - x)^2}, \quad (2.284)$$

que es una fuerza que atrae al dieléctrico hacia el interior de las placas.

## 2.9. Ejercicios

### 2.9.1. Ley de Coulomb.

Considere una configuración de cargas fijas  $q_n$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , de magnitud  $q$ . En términos de coordenadas polares estas cargas están ubicadas en  $q_n(R, \frac{\pi}{4}n)$ , con  $R > 0$  constante. Calcula la fuerza que actúa sobre una carga  $Q$  ubicada en el origen.

**Solución:** Comencemos por definir  $\phi_n = \frac{\pi}{4}n$ . Nos interesa calcular la fuerza sobre  $Q$  debido a la carga  $q_n$ ,  $F_{Qn}$ . Para esto consideremos la ley de Coulomb,

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\mathfrak{R}^2} \hat{\mathfrak{R}} \quad (2.285)$$

En nuestro caso  $\mathfrak{R} = R$ . Si realizamos un diagrama, para analizar el problema con más detalle, podemos extraer de este las componentes de  $\vec{F}_{Qn}$

$$F_{xQn} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_n}{R^2} \cos(\phi_n)$$

$$F_{yQn} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_n}{R^2} \text{sen}(\phi_n)$$

Así que para obtener la fuerza total sobre  $Q$ , debemos sumar las contribuciones de todas las  $q_n$ 's. Si recordamos que  $q_n = q$ , entonces la fuerza total en  $x$  es:

$$\begin{aligned} F_{xQ} &= \sum_{n=0}^4 (F_{xQn}) = \sum_{n=0}^4 \left[ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_n}{R^2} \cos(\phi_n) \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \sum_{n=0}^4 \cos(\phi_n) \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}(0)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}(1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}(2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}(3)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}(4)\right) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \left[ \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \left[ (1) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (-1) \right] = 0 \end{aligned}$$

De la misma manera, podemos realizar los cálculos correspondientes a la componente componente  $y$  de la fuerza total; lo que nos resulta en:

$$\begin{aligned}
 F_{yQ} &= \sum_{n=0}^4 (F_{yQn}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \sum_{n=0}^4 \text{sen}(\phi_n) \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} \left[ \text{sen}(0) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \text{sen}(\pi) \right] \\
 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{R^2} (1 + \sqrt{2})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fuerza total sobre  $Q$  debido a las 5 cargas  $q_n$  es:

$$\vec{F}_Q = -\frac{(1 + \sqrt{2}) Qq}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{y}$$

### 2.9.2. Distribución uniforme de carga.

Calcule el campo eléctrico en el punto  $P$  el cual se encuentra a una distancia  $r$  sobre uno de los extremos de un segmento de una varilla recta de longitud  $L$ . Esta varilla contiene una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ . Analice el caso cuando  $r \gg L$ . Ver figura 2.5.

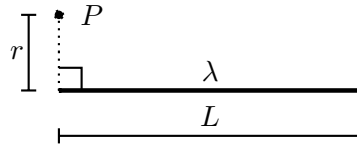


Figura 2.5: Varilla con distribución uniforme de carga  $\lambda$ .

**Solución:** Coloquemos nuestro sistema de referencia de tal forma que la varilla esté sobre el eje  $z$  con los extremos izquierdo y derecho ubicados, respectivamente, en 0 y  $L$ .

Entonces tenemos que, en general, para una distribución volumétrica de carga,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\mathfrak{R}^2} d\tau' \hat{\mathfrak{R}} \quad (2.286)$$

Sin embargo, en el caso de una distribución lineal de carga, la ecuación 2.286 se reduce a:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')}{\mathfrak{R}^2} dl' \hat{\mathfrak{R}}$$

Ahora analicemos la contribución de un segmento diferencial de la varilla  $dz$ , centrado en  $z \in (0, L)$ . Notemos que al tener una distribución uniforme de carga, entonces la carga de nuestro segmento  $dz$  es  $dq = \lambda dz$ .



Consideremos  $\theta$  como el ángulo entre el segmento de recta que va de  $z$  a  $P$  y el eje  $r$ , que va de 0 a  $P$ .

Entonces podemos escribir las componentes  $z$  y  $r$  del campo eléctrico ( $d\vec{E}$ ), en el punto  $P$ , producido por  $dq = \lambda dz$  como:

$$dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\mathfrak{R}^2} \cos(\theta)$$

$$dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\mathfrak{R}^2} \text{sen}(\theta)$$

Y notemos que  $\mathfrak{R}^2 = r^2 + z^2$ ,  $\cos(\theta) = r/\mathfrak{R}$  y  $\text{sen}(\theta) = z/\mathfrak{R}$ . Así que para encontrar el campo eléctrico total, en  $P$ , generado por la varilla; es necesario “sumar” todas las contribuciones generadas por cada segmento diferencial en la varilla. Es decir, tenemos que integrar.

$$E_r = \int_0^L dE_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda r \int_0^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda r \left[ \frac{1}{r^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \left[ \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right]$$

De manera completamente análoga, calculamos la  $E_z$ ,

$$E_z = \int_0^L dE_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\lambda dz}{r^2 + z^2} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \int_0^L \frac{z dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^L = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} - \frac{1}{r} \right]$$

Finalmente, obtenemos que el campo eléctrico total en el punto  $P$  es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \left[ \left( \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \hat{r} + \left( \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} - 1 \right) \hat{z} \right]$$

Considerando el límite  $r \gg L$ , tenemos que,

$$\left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + L^2}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + L^2/r^2}} - 1 \approx 1 - 1 = 0$$

$$\left( \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) = \frac{L}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + L^2/r^2}} \approx \frac{L}{r}$$

Si definimos  $Q = \lambda L$ . El campo eléctrico, cuando  $r \gg L$ , se reduce a:

$$\vec{E} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{r} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

que tiene la misma estructura matemática que el campo eléctrico generado por una carga puntual en el vacío.

### 2.9.3. Potencial eléctrico

Calcule el potencial eléctrico en el punto  $P$  el cual se encuentra a una distancia  $z$  sobre uno de los extremos de un segmento de una varilla recta de longitud  $L$ . Esta varilla contiene una densidad lineal de carga uniforme  $\lambda$ . Ver figura 2.5.

**Solución:** En términos generales, el potencial eléctrico está definido como:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.287)$$

donde  $d\vec{l}$  es el elemento diferencial de línea, esté depende únicamente de nuestro sistema de coordenadas.

Dado que hemos calculado el campo eléctrico, de esta varilla en el punto  $P$ , en el ejercicio 2.9.2, entonces podemos proceder a calcular directamente el potencial eléctrico en coordenadas rectangulares.

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\infty}^P \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{z'} \left[ \left( \frac{z'}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - 1 \right) \hat{x} + \left( \frac{L}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} \right) \hat{z} \right] \cdot (dx' \hat{x} + dz' \hat{z}) \\ &= - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^P \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{1}{z'} \right) dx' + \frac{L}{z' \sqrt{(z')^2 + L^2}} dz' \right] \\ &= - \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{1}{z'} \right) x' \right]_{\infty}^P + \left[ \ln(z') - \ln \left( L \left( \sqrt{L^2 + (z')^2} + L \right) \right) \right]_{\infty}^P \right\} \end{aligned}$$

Notemos que en la última expresión no es muy clara su evaluación respecto a los límites de integración. Así que analicémoslas una a una.

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{1}{z'} \right) x' \right]_{\infty} &= \lim_{x' \rightarrow \infty} \lim_{y' \rightarrow \infty} \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{1}{z'} \right) x' \right] \\ &= \lim_{x' \rightarrow \infty} \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[ \frac{x'}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{x'}{z'} \right] = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \log(z') - \log \left( L \left( \sqrt{L^2 + (z')^2} + L \right) \right) \right]_{\infty} &= \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[ \ln(z') - \ln \left( L \left( \sqrt{L^2 + (z')^2} + L \right) \right) \right] \\ &= \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[ \ln(z') - \ln \left( \sqrt{L^2 + (z')^2} + L \right) - \ln(L) \right] \\ &= \lim_{z' \rightarrow \infty} \left[ \ln \frac{z'}{\sqrt{L^2 + (z')^2} + L} - \ln(L) \right] \\ &= 0 - \ln(L) = -\ln(L) \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $P(0, 0, z)$ . Nos encontramos preparados para terminar de calcular  $V(\vec{r})$ .

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{\sqrt{(z')^2 + L^2}} - \frac{1}{z'} \right) x' \right]_{\infty}^P + \left[ \ln(z') - \ln \left( L \left( \sqrt{L^2 + (z')^2} + L \right) \right) \right]_{\infty}^P \right\} \\ &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ [(0) - (0)] + \left[ \left( \ln(z) - \ln \left( L \left( \sqrt{L^2 + z^2} + L \right) \right) \right) - (-\ln(L)) \right] \right\} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \sqrt{L^2 + z^2} + L \right) - \ln(z) \right] = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{L^2 + z^2} + L}{z} \right) \right] \end{aligned}$$

y este último es el resultado que estábamos buscando.

#### 2.9.4. Ley de Gauss en el vacío.

Considere un cilindro *infinito* de radio  $R$  contiene una densidad de carga que es proporcional a la distancia de su eje:  $\rho = ks$ , con  $k \in \mathbb{R}$  y  $s$  la coordenada radial. Calcule el campo eléctrico fuera del cilindro usando ley de Gauss.

**Solución:** Comenzamos por enunciar la ley de Gauss, en su forma integral, para alguna superficie cerrada  $S$ :

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (2.288)$$

Posterior, es necesario elegir la superficie gaussiana adecuada. En este caso, es evidente que debemos usar un cascarón cilíndrico concéntrico de radio  $s > R$  y largo  $L$ .

Dado que el problema contiene simetrías cilíndricas, consideremos trabajar en coordenadas cilíndricas  $(s, \phi, z)$ . Entonces, gracias a la simetrías de la configuración de carga, observemos que  $\vec{E} = (E, 0, 0)$ . Es decir, el campo eléctrico generado por la distribución de carga tiene únicamente componente radial. Entonces, si dividimos a nuestra superficie gaussiana cilíndrica en una pared y 2 tapas,

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{a} &= \int_{Pared} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{Tapa1} \vec{E} \cdot d\vec{a} + \int_{Tapa2} \vec{E} \cdot d\vec{a} \\ &= \int_{Pared} E da + 0 + 0 = E \int_{Pared} da = E(2\pi sL) \end{aligned}$$

pues en las tapas  $\vec{E} \perp d\vec{a}$ , así  $\vec{E} \cdot d\vec{a} = 0$ .

Ahora procedemos a calcular la carga encerrada por nuestra superficie gaussiana:

$$Q_{enc} = \int_{Vol.} \rho d\tau = \int_{Vol.} (ks')(s'ds'd\phi'dz') = k \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R (s')^2 ds'd\phi'dz' = 2\pi kL \frac{R^3}{3}$$

Finalmente, usando ley de Gauss (2.288),

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = E(2\pi sL) = \frac{1}{\epsilon_0} (2\pi kL \frac{R^3}{3}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

De esta manera, obtenemos que el campo eléctrico fuera de nuestro cilindro *infinito* es:

$$\vec{E} = \frac{k}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{s} \hat{s}$$

### 2.9.5. Energía de una distribución de carga.

Calcule la energía electrostática de un cascarón esférico uniformemente cargado, con una carga total  $q$  y radio  $R$ .

**Solución:** Sabemos que la energía potencial electrostática (trabajo necesario para ensamblar el sistema) para una distribución de carga volumétrica  $\rho$ , es:

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2 d\tau \quad (2.289)$$

Notemos que es posible resolver este problema de dos maneras.

La primera manera de resolver el problema es considerando que  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$  y que el potencial de este cascarón esférico en su superficie es:  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{Superficie} \sigma V da = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{q}{4\pi R^2} \right) \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} \right) [R^2 \text{sen}(\theta) d\phi d\theta] \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 R} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{sen}(\theta) d\phi d\theta = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 R} (4\pi) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R} \end{aligned}$$

Y la segunda manera de resolver el problema es considerando el campo eléctrico producido por nuestro cascarón esférico

$$\vec{E} = \begin{cases} \text{si } r < R & \vec{0} \\ \text{si } r \geq R & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \end{cases}$$

Con esta información podemos calcular directamente la energía:

$$\begin{aligned}
W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^3} E^2 d\tau \\
&= \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R (\vec{0})^2 d\tau + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2} \right)^2 d\tau \\
&= \frac{q^2}{2(4\pi)^2\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{1}{(r')^4} ((r')^2 \text{sen}(\theta') dr' d\phi' d\theta') \\
&= \frac{q^2}{2(4\pi)^2\epsilon_0} (4\pi) \left[ -\frac{1}{r'} \right]_R^\infty = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{R}
\end{aligned}$$

que concuerda con el resultado obtenido anteriormente.

### 2.9.6. Condensador cilíndrico.

Calcule la capacitancia por unidad de longitud de dos cilindros metálicos, coaxiales, de largo  $L$ , y radios  $a$  y  $b$ , figura 2.6.

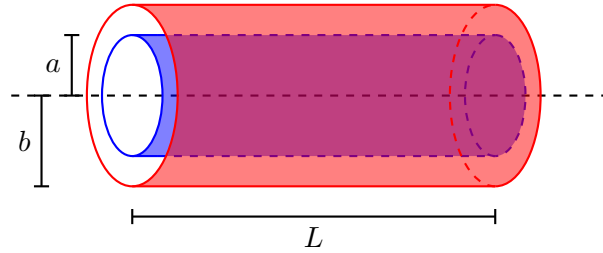


Figura 2.6: Cilindros metálicos coaxiales.

**Solución:** Consideremos que la longitud total de los cilindros es mucho mayor a  $b$ , esto con el fin de poder aproximar el campo eléctrico generado por cada cilindro por el campo generado por un cilindro *infinito* uniformemente cargado. Además pensemos que el cilindro interior tiene una densidad de carga  $\sigma_1 = \frac{Q_L}{2\pi aL}$  y el exterior una densidad de carga  $\sigma_2 = \frac{-Q_L}{2\pi bL}$

Entonces, podemos calcular el campo eléctrico entre los dos cilindros usando ley de Gauss con una superficie gaussiana cilíndrica, coaxial a los dos cilindros metálicos, de longitud  $L$ . Lo que daría como resultado:

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < a \\ \frac{\sigma_1 a}{\epsilon_0 s} \hat{s} & \text{si } a \leq r < b \\ \vec{0} & \text{si } b \leq r \end{cases}$$

pues la carga encerrada por nuestra superficie gaussiana sería  $Q_{enc} = \int \sigma da = \sigma_1(2\pi aL) = Q_L$ .

Entonces, la diferencia de potencial entre los cilindros es:

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\sigma_1 a}{\epsilon_0} \int_a^b \frac{1}{s'} ds' = \frac{\sigma_1 a}{\epsilon_0} [\ln(s')]_a^b = \frac{\sigma_1 a}{\epsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$$

Y tenemos que la capacitancia se define como:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.290)$$

Hechos los pasos anteriores, nos encontramos en condiciones de calcular la capacitancia en una longitud  $L$  de nuestros cilindros:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_{enc}}{V_{ab}} = \frac{\sigma_1(2\pi aL)}{\frac{\sigma_1 a}{\epsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Por lo tanto, se dividimos este último resultado entre  $L$ , obtendremos la **capacitancia por unidad de longitud**:  $\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$ .

### 2.9.7. Cargas inducidas.

Un esfera de radio  $R$  porta una polarización  $\vec{P}(\vec{r}) = k\vec{r}$ , donde  $k$  es una constante y  $\vec{r}$  el vector radial.

- Calcule las cargas inducidas  $\sigma_b$  y  $\rho_b$ .
- Calcule el campo dentro y fuera de la esfera.

**Solución: a)** Debido a que contamos con la forma explícita de la polarización, notemos que la carga superficial y volumétrica inducidas las podemos calcular como:

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (2.291)$$

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (2.292)$$

Como nuestro cuerpo geométrico polarizado es una esfera, entonces el vector normal a la superficie  $\hat{n} = \hat{r}$ . Por tanto, la carga inducida en la superficie es:

$$\sigma_b = \vec{P}(\vec{R}) \cdot \hat{r} = k\vec{R} \cdot \hat{r} = kR$$

De manera análoga, la carga volumétrica inducida es:

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2(kr)) = -\frac{1}{r^2} (3kr^2) = -3k$$

b) Para calcular el campo eléctrico dentro de la esfera consideremos una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio  $r < R$ .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_S E da = E \int_S da = E(4\pi r^2)$$

A continuación procedemos a calcular la carga encerrada:

$$Q_{enc} = \int_V \rho_b d\tau = \int_V (-3k) \left( (r')^2 \sin(\phi') dr' d\theta' d\phi' \right) = -3k \left( 4\pi \frac{r^3}{3} \right) = -k(4\pi r^2)r$$

De esta manera usamos la ley de Gauss para calcular la magnitud del campo eléctrico y gracias a la simetría esférica también le podemos asignar dirección:

$$\vec{E}_{r < R} = \frac{-k}{\epsilon_0} \vec{r}$$

Para el campo eléctrico fuera de la esfera, consideremos primero la carga encerrada por una superficie gaussiana esférica concéntrica, de radio  $r \geq R$ .

$$Q'_{enc} = \int_V \rho_b d\tau + \int_S \sigma_b da = -k(4\pi R^3) + kR(4\pi R^2) = 0$$

por lo que el campo eléctrico fuera de la esfera es, *a fortiori*,  $\vec{E}_{r \geq R} = \vec{0}$ . Por lo tanto el campo eléctrico producido por la esfera polarizada será:

$$\vec{E} = \begin{cases} \text{si } r < R & \frac{-k}{\epsilon_0} \vec{r} \\ \text{si } R \leq r & \vec{0} \end{cases}$$

### 2.9.8. Ley de Gauss en dieléctricos.

Un cascarón esférico de metal y de radio  $R$  contiene una carga  $Q$  uniformemente distribuida. Si en todo el espacio dentro y fuera del cascarón se encuentra un dieléctrico, calcule el desplazamiento eléctrico.

**Solución:** Debido a las simetrías presentadas en este problema, usaremos la ley de Gauss en dieléctricos:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = Q_{enc.lib} \quad (2.293)$$

donde  $\vec{D}$  es el desplazamiento eléctrico.

Entonces, como primer superficie gaussiana usaremos una esfera concéntrica de radio  $r \geq R$ . Con esta superficie, tenemos que:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{a} = \oint D da = D \oint da = D(4\pi r^2)$$

ahora, necesitamos calcular la carga libre encerrada:

$$Q_{enc.lib} = \int_S \sigma da = \sigma \int_S da = \sigma(4\pi R^2) = \left( \frac{Q}{4\pi R^2} (4\pi R^2) \right) = Q \quad (2.294)$$

Usando la ley de Gauss en dieléctricos, el desplazamiento eléctrico fuera del cascarón metálico es:

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2}$$

Por otra parte, notemos que si construimos una superficie gaussiana análoga de radio  $r < R$ , entonces  $Q_{enc.lib} = 0$ . Así que el desplazamiento eléctrico tiene que ser forzosamente:

$$\vec{D} = \begin{cases} \text{si } r < R & \vec{0} \\ \text{si } R \leq r & \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \end{cases}$$

Nótese que le hemos dado dirección radial ( $\hat{r}$ ) pues la simetría del problema nos conduce de manera natural a ello.

### 2.9.9. Energía en un sistema dieléctrico.

Un cascarón esférico de metal y de radio  $R$  contiene una carga  $Q$  uniformemente distribuida. Si en todo el espacio dentro y fuera del cascarón se encuentra un dieléctrico con susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$ . Encuentre la energía de esta configuración.

**Solución:** Para comenzar, tenemos que en presencia de dieléctricos lineales, la energía de la configuración electrostática (trabajo necesario para ensamblar el sistema) está dada por:

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \quad (2.295)$$

Dado que el dieléctrico tiene una susceptibilidad eléctrica  $\chi_e$ , entonces podemos escribir su polarización como:  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ . Por lo tanto, el desplazamiento dieléctrico será:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} \equiv \epsilon \vec{E}$$

donde definimos  $\epsilon \equiv \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ .

Dado que ya hemos calculado el desplazamiento eléctrico de esta configuración en el ejercicio 2.9.8. Entonces podemos obtener fácilmente el campo eléctrico pues el dieléctrico resulta ser un dieléctrico lineal,  $E = \frac{1}{\epsilon} \vec{D}$ .



$$\vec{E} = \begin{cases} \text{si } r < R & \vec{0} \\ \text{si } R \leq r & \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \end{cases}$$

Finalmente, con toda la información anterior nos encontramos en condiciones de calcular el trabajo necesario para ensamblar el sistema y este resulta ser:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{D} \cdot \vec{E} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \vec{D} \cdot \vec{E} \left( (r')^2 \text{sen}(\phi) dr' d\phi' d\theta' \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \left( \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{(r')^2} \hat{r} \right) \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{(r')^2} \hat{r} \right) \left( (r')^2 \text{sen}(\phi) dr' d\phi' d\theta' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{Q}{4\pi} \right)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{1}{(r')^4} \left( (r')^2 \text{sen}(\phi) dr' d\phi' d\theta' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{Q}{4\pi} \right)^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_R^\infty \frac{1}{(r')^2} \left( \text{sen}(\phi) dr' d\phi' d\theta' \right) \\ &= \frac{1}{2\epsilon} \left( \frac{Q}{4\pi} \right)^2 \left[ -(4\pi) \frac{1}{r'} \right]_R^\infty = \frac{1}{2\epsilon} \frac{Q^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{8\pi\epsilon} \frac{Q^2}{R} \end{aligned}$$

### 2.9.10. Condensador placas paralelas.

Considere un condensador de placas paralelas de lado  $L$  con densidad de carga  $\sigma$ , figura (2.7). Considerando  $L \gg (a + b)$ , calcular la capacitancia.

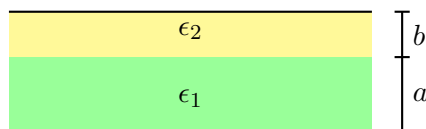


Figura 2.7: Condensador de placas paralelas.

**Solución:** Antes que nada, ubiquemos nuestro sistema de referencia en el extremo izquierdo de la placa inferior del condensador. Con la placa inferior contenida en el plano  $x - y$ .

Por definición, la capacitancia  $C$  es  $\frac{Q}{V}$ . En nuestro caso,  $Q = \int_{Placa} \sigma da = \sigma A = \sigma L^2$ .

Por otro lado, la diferencia de potencial dentro de un condensador de placas paralelas uniformemente cargado, el cual contiene un dieléctrico cuya permitividad es  $\epsilon$ , entre dos puntos  $A(a_1, a_2, a_3)$  y  $B(b_1, b_2, b_3)$  es:

$$V_{AB} \equiv V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(b_3 - a_3) = \frac{\sigma}{\epsilon} (b_3 - a_3)$$

Por lo que la diferencia de potencial desde  $z = 0$  hasta  $z = (a + b)$  es:

$$V = V_{0a} + V_{a(b+a)} = \frac{\sigma}{\epsilon_1}(a - 0) + \frac{\sigma}{\epsilon_2}((b + a) - a) = \frac{\sigma}{\epsilon_1}a + \frac{\sigma}{\epsilon_2}b = \frac{\sigma}{\epsilon_1\epsilon_2}(\epsilon_2a + \epsilon_1b)$$

Entonces, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma L^2}{\frac{\sigma}{\epsilon_1\epsilon_2}(\epsilon_2a + \epsilon_1b)} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2L^2}{\epsilon_2a + \epsilon_1b}$$

## Introducción

*“Hay síntesis cuando, al combinar los juicios que se nos dan a conocer a partir de relaciones más simples, uno deduce de ellos juicios relativos a relaciones más complicadas. Hay análisis cuando de una verdad complicada se deducen verdades más simples.”*

– André-Marie Ampère

Los fenómenos magnéticos fueron conocidos por los antiguos griegos. Se dice que por primera vez se observaron en la ciudad de Magnesia del Meandro, ciudad antigua situada en el interior de la península turca de la que apenas quedan hoy algunos restos arqueológicos, de ahí el término magnetismo. Sabían que ciertas piedras atraían el hierro, y que los trozos de hierro atraídos atraían a su vez a otros. Estas se denominaron imanes naturales. El primer filósofo que estudió el fenómeno del magnetismo fue Tales de Mileto. Descubrió la propiedad de atracción de ciertos metales en un mineral denominado "magnetita" (óxido férrico), que era abundante en la región de Magnesia.

También descubrió que frotando el hierro con magnetita, o manteniéndola durante un cierto tiempo bajo su influencia, se imantaba, es decir, adquiría la virtud magnética. Tales atribuye alma, es decir, vida al imán, porque atrae al hierro, y la noción de atracción magnética era explicada por él de esta forma. El conocimiento del magnetismo se mantuvo limitado a los imanes, hasta que en 1820, el físico y químico Danés Hans Christian Orsted (1777 - 1851), descubre que la electricidad y el magnetismo están relacionados.

Según historiadores, Ørsted llevó a cabo en su lugar de residencia, experimentos demostrativos dedicados a amigos y estudiantes sobre electricidad y magnetismo. Con la ayuda de una pila voltaica hizo circular una corriente eléctrica a través de un alambre. Ørsted notó que cada vez que la corriente circulaba por el alambre, la aguja de una brújula que había colocado cerca se movía, sugiriendo así, que debía haber una relación entre la electricidad y el magnetismo.

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX era muy común describir este descubrimiento como resultado de una casualidad. Sin embargo, para algunos historiadores, Ørsted ya había sugerido en 1812, que una corriente eléctrica tenía efectos sobre un material imantado [2]. Pero recién 8 años después, el 21 de Julio de 1820, Ørsted publica sus observaciones concluyendo que la simetría de las fuerzas que actuaban sobre la aguja de la brújula debía ser circular, es decir círculos concéntricos perpendiculares al alambre conductor. Este retraso de 8 años es atribuido al hecho de que repetidamente estaba realizando el experimento equivocado, con lo que nunca llegaba a una explicación satisfactoria del fenómeno observado, ya que hasta 1820, Ørsted estaba convencido de que las líneas de fuerza debían ser paralelas al alambre o que tenían dirección radial.

El 4 de Septiembre de 1820, el matemático y físico Francés André-Marie Ampère (1775 - 1836), se entera del descubrimiento de Ørsted de que una corriente eléctrica crea efectos magnéticos en el espacio que la rodea [3]. A pesar de que la mayoría de los científicos de la época mantenían firme la creencia de que electricidad y el magnetismo no estaban relacionados, Ampère acepta el descubrimiento de Ørsted y rápidamente llevó a cabo sus propios experimentos comenzando por repetir el experimento de Ørsted. Dos semanas después publica un trabajo más completo sobre este fenómeno y otros fenómenos afines y desarrolla la teoría matemática de la electrodinámica.

### **Oersted Experimento**

El experimento de Oersted sobre la desviación que sufre una aguja magnética situada en las proximidades de un conductor eléctrico, publicado en Copenhague el 21 de julio de 1820. Oersted para llevar cabo el experimento dispuso de una aguja imantada que puede girar en torno a un eje que pasa por su centro. Inicialmente, sobre la aguja sólo actúa el campo magnético terrestre de forma que ésta se orienta en la dirección Norte-Sur. Con la aguja en equilibrio, colocamos un tramo de conductor recto paralelo a la aguja. Un amperímetro conectado en serie con el conductor nos indicará cuando circula corriente por el mismo. En esta situación, si hacemos circular una corriente elevada por el conductor, del orden de 6 amperios, observamos que

la aguja se desvía de su posición de equilibrio, oscilando en torno a las direcciones paralela y perpendicular al conductor. Al eliminar la corriente, la aguja vuelve a oscilar entorno a la dirección paralela al conductor (Norte-Sur) hasta que se detiene. Seguidamente se invierte el sentido de la corriente, observándose que ahora la aguja se desvía en sentido contrario. Podemos concluir que cuando circula corriente por el conductor sobre la aguja magnética actúan dos fuerzas, la fuerza debida al campo magnético terrestre y la fuerza originada por el campo magnético que el conductor crea en su entorno. A continuación se realiza un montaje en el que mediante imanes se contrarresta el campo magnético terrestre en la zona donde se encuentra situada la aguja magnética. Haciendo pasar nuevamente corriente por el conductor se observa que la aguja, afectada casi exclusivamente por la fuerza magnética que origina la corriente, oscila en torno a la dirección perpendicular al conductor. El experimento de Oersted puso por primera vez de manifiesto que existía una

conexión entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. La publicación de este trabajo causó inmediatamente sensación, dando lugar a muchas interrogantes y estimulando un gran número de investigaciones. A partir de esta experiencia pudo revelarse la verdadera naturaleza del magnetismo, cuyo origen debe situarse en el movimiento de cargas eléctricas. Tomando como punto de partida el experimento de Oersted, a fines de 1820 se conocía las primeras leyes cuantitativas de la electrodinámica y hacia 1826 Ampère ultimaba una teoría que permaneció durante

### 3.1. Corriente y densidad de corriente

Cuando existen cargas en movimiento, se define la corriente eléctrica  $I$  como la cantidad de carga neta que pasa por unidad de tiempo a través de una superficie  $S$  en una dirección determinada,

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}, \quad (3.1)$$

de modo que la carga neta que atraviesa entre los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  una superficie por donde circula una corriente  $I(t)$  es

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt. \quad (3.2)$$

La unidad S.I. para la corriente es el **Ampère**:  $1A = 1C/1s$ .

#### 3.1.1. Densidad de Corriente

El paso de carga eléctrica hacia un lado de una superficie se llama corriente eléctrica a través de dicha superficie y hacia ese lado. Si hay cargas

libres en un volumen, puede crearse una corriente eléctrica a través de una superficie de su interior moviendo las cargas libres con velocidad de dirección adecuada para que atraviesen esa superficie. Eso puede conseguirse aplicando fuerzas a las cargas libres del conductor, o sea, creando un campo eléctrico  $\vec{E}$  en el conductor. Las cargas libres de los conductores reales son electrones o iones de volumen muy pequeño, por lo que pueden considerarse, sin error, cargas puntuales.

Consideremos una superficie sobre la cual inciden cargas con densidad  $\rho$ , moviéndose con velocidad  $\vec{v}$ , cruzando un elemento de superficie (orientado)  $d\vec{S}$ .

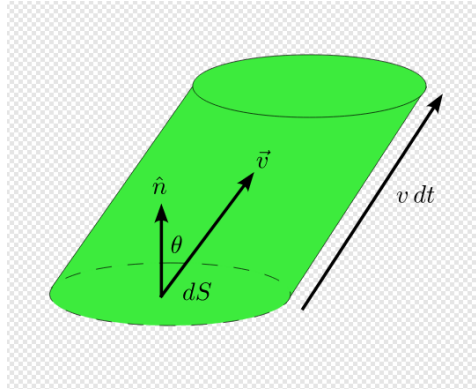


Figura 3.1: Carga con densidad  $\rho$  fluyendo con velocidad  $\vec{v}$  a través de un elemento de superficie  $d\vec{S}$ .

La carga neta que atraviesa el área  $dS$  en un intervalo de tiempo  $dt$  es la que está contenida en un cilindro oblicuo de base  $dS$  y de largo  $v dt$ . Ver figura 3.1.

Esto permite escribir:

$$dQ = \rho dV = \rho dS (v dt) \cos \theta = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt. \quad (3.3)$$

Definimos la **densidad de corriente**

$$\boxed{\vec{J}(x) = \rho(x)\vec{v}(x)}, \quad (3.4)$$

de modo que

$$dQ = \vec{J} \cdot d\vec{S} dt. \quad (3.5)$$

En otras palabras, la densidad de corriente es la carga por unidad de tiempo y por unidad de superficie que atraviesa un elemento de área normal dado. Como consecuencia, la corriente, es decir, la carga por unidad de tiempo, que atraviesa una superficie  $S$  es dada por

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (3.6)$$

Es importante notar que si  $\rho > 0$ , entonces  $\vec{J}$  y  $\vec{v}$  tienen igual sentido, mientras que si  $\rho < 0$ , entonces  $\vec{J}$  y  $\vec{v}$  tienen sentidos opuestos.

### 3.2. Conservación de la carga eléctrica

La ley (experimental) de conservación (local) de la carga eléctrica puede ser escrita en general, como

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (3.7)$$

que expresa el hecho que todo cambio en la carga neta contenida en un volumen  $V$  dado (pero arbitrario) es debido al flujo neto de carga por la superficie  $\partial V$  que lo encierra. Usando el teorema de Gauss, podemos transformar la integral de superficie a una integral de volumen, obteniendo

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) dV = 0. \quad (3.8)$$

Como esta relación debe ser válida para todo volumen  $V$ , es decir, de tamaño y forma arbitraria, es necesario que

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0.} \quad (3.9)$$

Esta relación es conocida como la ecuación de continuidad.

#### 3.2.1. Corrientes Estacionarias

Corriente eléctrica que se produce en un conductor de forma que la densidad de carga de cada punto del conductor es constante, es decir, en las que tanto  $\rho$  como  $\vec{J}$  no dependen del tiempo. Bajo estas condiciones, la ecuación de continuidad requiere que la divergencia de la densidad de corriente sea nula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (3.10)$$

Este será el caso de estudio en este capítulo, consideraremos que las corrientes son independientes del tiempo y por ende los campos que producen (magnéticos) lo serán también.

### 3.3. Campo magnético y fuerza magnética

Se ha encontrado experimentalmente que la fuerza que actúa sobre una pequeña carga  $q$ , moviéndose con velocidad  $\vec{v}$  en un campo magnético dado es proporcional a  $q$ , a la rapidez  $v$ , y que tiene dirección perpendicular a  $\vec{v}$ .

Esto permite definir la intensidad de campo magnético  $\vec{B}$  como un vector tal que (en el sistema internacional de unidades)

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3.11)$$

Por lo tanto, la fuerza total que actúa sobre una carga  $q$  en un punto del espacio con campo eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{B}$  es dada por la fuerza de Lorentz<sup>1</sup>

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.12)$$

La unidad de medida de la intensidad de campo magnético  $\vec{B}$  es entonces  $[B] = Ns/Cm = Vs/m^2$ , que se define como un Tesla:  $1T = Vs/m^2$ . Alternativamente se define un Gauss como  $1G = 10^{-4}T$ .<sup>2</sup>

Como consecuencia directa del hecho que la fuerza magnética es perpendicular a la velocidad de las cargas, el campo magnético no realiza trabajo sobre ellas. Esto tiene como consecuencia que el campo magnético sólo puede cambiar la dirección de la velocidad de una carga y no su módulo (energía cinética).

Si las cargas están distribuidas continuamente, entonces la fuerza magnética total sobre una región  $V$  con densidad  $\rho$  y velocidad  $\vec{v}$  será

$$\vec{F}_m = \int_V \rho\vec{v} \times \vec{B} dV = \int_V \vec{J} \times \vec{B} dV. \quad (3.13)$$

Podemos describir esta situación usando la **densidad de fuerza magnética**  $\vec{f}_m$ , definida como la fuerza por unidad de volumen, dada por

$$\vec{f}_m = \vec{J} \times \vec{B}, \quad (3.14)$$

de modo que

$$\vec{F}_m = \int_V \vec{f}_m dV. \quad (3.15)$$

En resumen:

- La fuerza es perpendicular a ambas, a la velocidad  $v$  de la carga y al campo magnético  $B$ .
- La magnitud de la fuerza es  $F = qvB\sin(\theta)$  donde  $\theta$  es el ángulo entre la velocidad y el campo magnético. Esto implica que la fuerza magnética sobre una carga estacionaria o una carga moviéndose paralela al campo magnético es cero.

<sup>1</sup>En honor a Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928): físico y matemático holandés. Ganador del Premio Nobel de Física en 1902.

<sup>2</sup>Por ejemplo, la magnitud campo magnético interestelar oscila entre 0,1 y 10 nT, el campo magnético de la Tierra es de orden  $\approx 0,5G$ , mientras que un imán de Neodimio ( $Nd_2Fe_{14}B$ ) produce un campo del orden de 1,25 T. Un magneto de un sistema de resonancia magnética produce campos entre 1,5 T y 3 T. Los campos magnéticos más intensos producidos en un laboratorio son del orden de 100 T. El campo magnético en una estrella de neutrones puede oscilar entre 1 MT y 100 MT.



- La dirección de la fuerza está dada por la regla de la mano derecha. La fórmula de la fuerza de arriba está en forma de producto vectorial.
- Una implicación importante sobre las fuerzas magnéticas es que no trabajan, ya que  $\vec{F}_m \cdot d\vec{x} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}dt = 0$ . Esto explica porque existen imanes permanentes y no existe algo así en el caso electrostático (cuerpos electrizados), ya que los imanes no desgastan su magnetización en energía.

### Acoplamiento mínimo

Si nosotros nos preguntamos si existe un potencial magnético que deduzca la ley de Lorentz  $\vec{F}_m$ , no encontraremos una respuesta afirmativa, ya que de ser así la fuerza magnética podría hacer un trabajo no nulo sobre una curva no cerrada, siendo esto contradictorio con  $\vec{F}_m \cdot d\vec{x} = 0$ . Una forma heurística de deducir la fuerza de Lorentz consiste en definir un potencial dependiente de la velocidad que pueda ser incluido en la definición de fuerza de modo que esta nueva fuerza tenga la propiedad deseada de no inducir trabajo. Pensemos en las unidades que tiene el potencial vectorial magnético  $e\vec{A}$ , estas son unidades de Kg por velocidad, es decir, momento. Se puede pensar que al encender el campo magnético se crea un momento (electromagnético) en todo el espacio, a partir del cual se mueve la partícula con referencia a él.

Definamos el "potencial" magnético como el potencial que sea mínimo cuando la partícula sea paralela a  $\vec{A}$  (momento electromagnético), es decir, que este momento electromagnético tienda a empujar a la partícula,  $\phi_m = -q(\vec{v} \cdot \vec{A})$ . Si usamos la identidad (considerando el vector velocidad constante)  $\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) = \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ . Podemos reescribir la fuerza de Lorentz como:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi_m = q\vec{v} \times \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{\vec{B}} + q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}. \quad (3.16)$$

Además notamos también usando la regla de la cadena que

$$q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = q \frac{d\vec{A}}{dt}.$$

Por ende podemos concluir que la segunda ley de Newton se ve modificada debido al potencial  $\phi_m$ , en donde se define el momento de **acoplamiento mínimo**  $\vec{p}' = \vec{p} - q\vec{A}$ , es decir:

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = \vec{F}' = q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (3.17)$$

### 3.3.1. Partícula cargada en el seno de un campo magnético uniforme

Consideraremos el caso de una partícula puntual cargada que se mueve en un campo magnético uniforme (tomaremos la dirección de este campo en dirección  $z$ ). Escribimos las ecuaciones dinámicas usando la fuerza de Lorentz (dada una velocidad y posición dadas):

$$F_x = m\ddot{x} = qyB_z, \quad F_y = m\ddot{y} = -qx B_z, \quad F_z = 0. \quad (3.18)$$

Usaremos el método matricial para resolver esta ecuación diferencial. Esto consiste en primero definir la exponencial de una matriz de la siguiente forma:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!}, \quad A \text{ es una matriz cuadrada y } t \text{ es un escalar.} \quad (3.19)$$

Dado esto podemos darnos cuenta que la derivada de esta exponencial con respecto a  $t$  es  $Ae^{At}$ , es decir, se cumple la ecuación  $\dot{y} = Ay$ , donde  $y = e^{At}$ . Esto nos demuestra que la exponencial de una matriz se comporta de modo semejante a una exponencial de una variable.

Entonces reescribimos 3.18 en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \quad \ddot{z} = 0 \quad (3.20)$$

donde  $\omega = \frac{qB_z}{m}$ . Definiendo la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  podemos reescribir la ecuación anterior (solo las variables  $x$  e  $y$ ) en forma vectorial

$$\ddot{\vec{x}} = \omega A \dot{\vec{x}}, \quad \vec{x} = (x, y). \quad (3.21)$$

Notase que la ecuación para  $z$  es trivial. Primero podemos hacer el cambio de variable  $\vec{x} \rightarrow \vec{w}$ . Lo que sigue es fijarnos en el hecho de que la exponencial de una matriz satisface una ecuación del tipo  $\dot{y} = Ay$ , entonces la solución a la ecuación anterior debe ser:

$$\vec{w} = e^{A\omega t} \vec{w}_0, \quad (3.22)$$

lo cual se puede comprobar fácilmente si se sustituye en la ecuación 3.20. El siguiente paso es notar que  $A^2 = -I$ , lo cual implica que  $A^{2n} = (-1)^n I$  y  $A^{2n+1} = (-1)^n A$ . Esto simplifica el cálculo para  $e^{At}$ , lo cual resulta:

$$e^{A\omega t} = I \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n}}{2n!} + A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\omega t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = I \cos(\omega t) + A \sin(\omega t), \quad (3.23)$$

con este resultado podemos reescribir nuestra solución de la forma

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \\ -\text{sen}(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix} \vec{w}_0. \quad (3.24)$$

Ahora solo falta deshacer el cambio de variable  $\vec{x} \rightarrow \vec{w}$  integrando entrada a entrada la matriz con respecto a  $t$ , lo que resulta

$$\boxed{\vec{x}(t) = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) & -\cos(\omega t) \\ \cos(\omega t) & \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix} \vec{w}_0 + \vec{x}_0, \quad z(t) = v_{0z}t + z_0,} \quad (3.25)$$

donde  $\vec{w}_0$  y  $\vec{x}_0$  son constantes iniciales determinadas por la velocidad y la posición inicial. En general la ecuación 3.25 es una ecuación que corresponde a una hélice circular.

Supóngase que  $v_{0z} = 0$  entonces el movimiento solo se da en un plano, el cual según la ecuación 3.25, satisface  $(\vec{x}(t) - \vec{x}_0) \cdot (\vec{x}(t) - \vec{x}_0) = (w_0/\omega)^2$ , lo que demuestra que la curva es una **circunferencia** de radio  $w_0$  y centro en  $\vec{x}_0$ .

Veamos un ejemplo concreto: Supóngase que la posición inicial de la partícula es el origen, y solo tiene una velocidad inicial en  $x$  ( $\vec{v}_0 = (v_{0x}, 0, 0)$ ). Obtenemos las constantes  $\vec{w}_0$  y  $\vec{x}_0$  de la ecuación 3.25 (es obvio que  $z(t) = 0$  en este caso).

Entonces se debe satisfacer primero que:  $\vec{x}(t=0) = \vec{0} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{w}_0 + \vec{x}_0$ , es decir,  $w_{0x} = -\omega y_0$  y  $w_{0y} = \omega x_0$ .

Ahora para la velocidad inicial tomamos la derivada y evaluamos en  $t=0$ :  $\vec{v}(t=0) = (v_{0x}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{w}_0$ , es decir,  $w_{0x} = v_{0x}$  y  $w_{0y} = 0$ .

Esto nos determina el radio y centro de la circunferencia que sigue esta partícula:  $(\vec{x}(t) - (0, -v_{0x}/\omega)) \cdot (\vec{x}(t) - (0, -v_{0x}/\omega)) = (v_{0x}/\omega)^2$ . De aquí concluimos que el radio de curvatura debe ser:

$$R = v_{0x}/\omega = mv_{0x}/qB_z. \quad (3.26)$$

En el caso general es fácil comprobar que la velocidad inicial es igual al vector  $\vec{w}_0$ . Y tendríamos que el radio de curvatura es en general ( $p = mv$ );

$$\boxed{R = \frac{\|\vec{v}_0\|}{\omega} = \frac{\|\vec{p}\|}{qB_z}.} \quad (3.27)$$

### ciclotrón

EL ciclotrón es un tipo de acelerador de partículas ideado en 1931 por Ernest O. Lawrence y M. Stanley Livingstone, en la Universidad de Berkley (California), como acelerador de partículas cargadas.

Un ciclotrón es básicamente una cámara cilíndrica de alto vacío en la que mediante un campo magnético uniforme paralelo al eje del cilindro y un sistema de radiofrecuencia para generar un campo eléctrico alternante, es posible acelerar a energías muy elevadas ( 10 MeV) partículas elementales (como protones y deuterones) producidas mediante una fuente de iones situada en el centro de la cavidad. Estas partículas se hacen chocar con los blancos, en los que tienen lugar reacciones nucleares.

La parte interna del ciclotrón es como lo muestra la figura 3.2(izquierda),

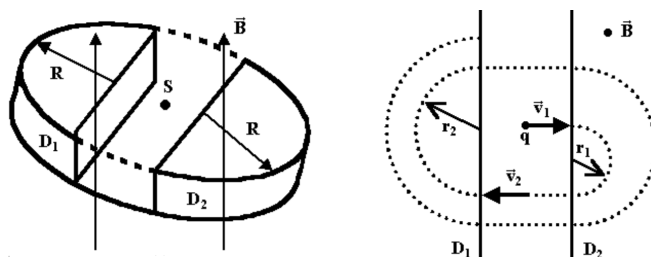


Figura 3.2: Izquierda: Estructura interna de un ciclotrón. Derecha: Movimiento de una partícula dentro de un ciclotrón

D1 y D2 son dos cámaras metálicas de forma semicilíndrica huecas llamadas “dees”, por su similitud con la letra D. El punto S es dónde se encuentra la fuente de iones situada en el centro de la des. Las dos des se hallan separadas una de la otra y las dos están en el seno de un campo magnético uniforme y perpendicular (normal) al plano de las “dees”. Las dos des están conectadas a los bornes de un circuito eléctrico que crea una diferencia de potencial alterna de frecuencia  $\omega$ . En la figura 3.2 (derecha) se detalla el funcionamiento del ciclotrón, inicialmente la partícula cargada  $q$  entra en D2 con velocidad  $v_1$  debido a la aceleración que le produce al campo eléctrico existente entre las dos des. Bajo la acción de el campo magnético describe una circunferencia de radio  $r_1$  y frecuencia  $\omega_1$ . Cuando  $q$  sale de D2 se ha invertido al campo eléctrico siendo la partícula acelerada entre las dos des, por lo cual entra en D1 con una velocidad  $v_2 > v_1$  describiendo una circunferencia según la ecuación 3.27 de radio  $r_2 > r_1$ . Siendo R el radio de las des, la velocidad máxima con que sale la partícula esta dada por la ecuación 3.27 (sustituyendo R). Así su energía cinética final será tantas veces mayor que la que corresponde al voltaje aplicado a los electrodos multiplicado por el número de veces que el ion ha pasado por la región intermedia entre las “dees” .

### 3.4. Leyes fundamentales de la magnetostática

Hasta ahora sabemos que el campo magnético debe ser producido por cargas en movimiento, o sea, corrientes eléctricas. También podría ser el caso que el campo magnético fuese producido por cargas magnéticas (monopolos) en analogía con el campo eléctrico.

Un monopolo magnético sólo tendría una "carga", ya que es una carga magnética aislada. Y aunque en la naturaleza no hay ninguna ley que prohíba la existencia de un monopolo magnético, lo cierto es que hasta ahora no se ha encontrado y tampoco sus efectos han sido observados. Hasta la fecha este tema sigue siendo controversia y los defensores de la existencia de los monopolos magnéticos argumentan: que es probable que aún no se haya descubierto la manera en cómo observar este fenómeno.

Hasta la fecha no se ha logrado observar un campo que sólo tenga una carga magnética en lugar de dos tal y como lo dictan los experimentos con imanes, que al dividirlos, las partes siguen teniendo dos polos. **En conclusión la teoría electromagnética no considera hoy en día que existan monopolos magnéticos.**

Entonces solo nos queda el ingrediente de las corrientes estacionarias para producir campos magnéticos. Como vimos en electrostática, esperamos que los campos magnéticos estén definidos por las ecuaciones de Helmholtz, es decir, una divergencia y un rotacional. Además se debe cumplir  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ . La forma única de hacer esto es poniendo al rotacional del campo magnético proporcional a la densidad de corriente y el divergente igual a cero (que implica ausencia de monopolos), esto quedaría:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}. \quad (3.28)$$

Donde  $\mu_0$  es una constante llamada **permeabilidad magnética del vacío** que vale  $4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$ . Estas son las ecuaciones básicas de la magnetostática y podemos de ellas inferir cualquier fenómeno magnético-estático. La segunda de estas ecuaciones es conocida como ley de Ámpere

De las ecuaciones 3.28 podemos deducir ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ) que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , donde  $\vec{A}$  se le conoce como **potencial vectorial magnético**. Notando que existe la simetría que deja invariante los campos magnéticos  $\vec{A}' \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$ , donde  $\psi$  es una función escalar cualquiera. Esto como vimos en la sección 2.2.6, nos permite imponer una restricción cualquiera sobre el potencial vectorial, en este caso conviene imponer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , que llamaremos norma de Coulomb.

Introduciendo el potencial vectorial y la norma de Coulomb, en la ley de Ámpere resulta :

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \boxed{-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.} \quad (3.29)$$

Esta ecuación vuelve a ser del tipo Poisson, solo que ahora es de carácter vectorial. Como vimos en electrostática esta ecuación tiene una solución que ya es conocida, solo que ahora es necesario extenderla al régimen vectorial. Así por la ecuación 2.48 la solución de la ecuación anterior debe ser:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (3.30)$$

Apliquemos a esta ecuación el rotacional para obtener el campo magnético (observando que el rotacional no actúa sobre las coordenadas primadas).

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left( \vec{\nabla} \times \frac{J(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV, \quad (3.31)$$

ahora usaremos la identidad vectorial  $\vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{a}_0}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) \times \vec{a}_0 = -\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \times \vec{a}_0$ . donde  $\vec{a}_0$  es un vector constante,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V J(\vec{x}') \times \left( \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \right) dV', \quad (3.32)$$

esta ecuación es conocida como ley de **Biot-Savart**. En honor a los científicos Biot<sup>3</sup> y Savart<sup>4</sup>, ellos encontraron ( $\sim 1820$ ) que el campo magnético  $d\vec{B}$  que un pequeño segmento  $dx'$  orientado en la dirección de flujo de la corriente  $I$  y ubicado en la posición  $\vec{x}'$  produce en un punto de posición  $\vec{x}$  es proporcional a la intensidad de corriente, al largo del pequeño segmento, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el segmento y el punto de observación, es decir,

$$|d\vec{B}| \propto \left( I, dx', \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right), \quad (3.33)$$

Lo cual es comprobado directamente en la ecuación 3.32, sustituyendo la densidad de corriente por una corriente en un hilo infinitesimal a lo largo de una trayectoria en lugar de un volumen.

<sup>3</sup>Jean Baptiste Biot: Físico, Astrónomo y Matemático francés (1774-1862).

<sup>4</sup>Félix Savart: Físico, Médico y Profesor francés (1791-1841).

### 3.4.1. Ejemplo: Campo magnético producido por una línea infinita de corriente

Tomando el hilo de corriente como el eje  $z$  y usando coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  podemos observar que la ecuación 3.30, el potencial vectorial magnético no depende de  $\theta$  ni de  $z$ , es decir,  $\vec{A} = \vec{A}(r)\hat{e}_z$ . De aquí es fácil deducir que el campo magnético debe ser de la forma  $\vec{B} = -B(r)\hat{e}_\theta$ . Lo que demuestra que el campo magnético debe ser de forma circular alrededor del alambre.

Ahora aplicando la ley de Ampère a la circunferencia de radio  $r$  encontramos que (note que solo nos interesa la parte  $\hat{e}_\theta$  del diferencial de trayectoria que es  $r d\theta \hat{e}_\theta$ , ver sección 1.3 )

$$\oint_{\mathcal{C}_{\text{circulo}}} \vec{B} \cdot d\vec{x} = (2\pi r)B = \mu_0 I, \quad (3.34)$$

de modo que

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat{e}_\theta}{r}. \quad (3.35)$$

Un potencial vectorial posible para describir este campo es

$$\vec{A}(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \hat{e}_z. \quad (3.36)$$

### 3.4.2. Ley de fuerza de Ampère

En esta sección deduciremos la ley de acción a distancia, para describir la fuerza entre dos hilos de corriente. Esto nos permitirá ver la similitud del formalismo de la magnetostática con el formalismo de la electrostática.

Sustituimos en la ecuación 3.13 la ecuación de Biot-Savart 3.32 obtenemos:

$$\vec{F}_{12} = \int_{V_1} \vec{J}_1 \times \vec{B} dV = \int_{V_1} \vec{J}_1 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_2} \vec{J}_2 \times \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) dV_2 \right) dV_1. \quad (3.37)$$

Considerando ahora en lugar de densidades de corriente hilos de corriente la ecuación anterior se transforma en :

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_1} I_1 \times \vec{B} d\vec{l} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} I_1 d\vec{l}_1 \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} (I_2 d\vec{l}_2) \times \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) \right), \quad (3.38)$$

utilizamos ahora la identidad del triple producto vectorial, y nos queda:

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ I_2 d\vec{l}_2 (I_1 d\vec{l}_1 \cdot \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right)) - \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) (I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2) \right], \quad (3.39)$$

aplicamos ahora el teorema de Stokes al último término de la ecuación anterior, es decir,  $I_2 d\vec{l}_2 \oint_{C_1} \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) \cdot I_1 d\vec{l}_1 = \int_{S_2} (I_1) \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) \cdot d\vec{S}_1 \cdot (I_2 d\vec{l}_2) = 0$ , con esto podemos simplificar la ecuación 3.39,

$$\vec{F}_{12} = - \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left[ \left( \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \right) (I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2) \right]. \quad (3.40)$$

De la ecuación 3.40 podemos hacer las siguientes observaciones, las cuales fueron comprobadas por Ampere experimentalmente;

1. La fuerza entre dos hilos conductores sigue una ley de inverso al cuadrado.
2. Dos hilos conductores en el mismo plano sienten una fuerza que es invariante ante una deformación de estos, es decir, si los alambres de alimentación se retuercen uno alrededor del otro, entonces se cancelan mutuamente de manera efectiva y tampoco influyen en el resultado del experimento. Esto se debe a que en la ecuación 3.40 esta en términos de integrales de línea.
3. La fuerza entre dos hilos conductores es proporcional al producto de las intensidades de corriente y esta fuerza es repulsiva si las corrientes fluyen en la misma dirección y es atractiva en el caso contrario.
4. La ecuación 3.40 es una ley de fuerza a distancia y cumple con la tercera ley de Newton  $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$ . Esto se debe a la simetría del producto escalar  $(I_1 d\vec{l}_1 \cdot I_2 d\vec{l}_2)$ .

aquí hemos partido del formalismo de la magnetostática hasta la ecuación de fuerza de Ampere. Cabe señalar que estas observaciones por si mismas permiten derivar la ley de Boit-Savart, y fueron expuestas originalmente por Ampere en el año 1820.

### 3.5. Expansión multipolar magnética

Análogamente al caso electrostático, deseamos calcular el campo magnético  $\vec{B}$  lejos de una distribución de corrientes, descritas por una densidad de corriente  $\vec{J}$ , localizada en una región pequeña comparada con la distancia a la cual se calculará el campo.



Situando el origen en un punto representativo de la distribución de corrientes, tendremos que para distancias grandes comparadas con el tamaño de la distribución se satisface  $|\vec{x}| \gg |\vec{x}'|$ . Con esto, podemos usar la expansión (2.152) y reescribir la expresión (3.30) como una expansión multipolar magnética:

$$\vec{A}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \left[ \frac{d\vec{l}'}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}'}{r^2} d\vec{l}' + \dots \right] \quad (3.41)$$

donde solo hemos considerado hasta el orden dipolar. Claramente la primer integral no contribuye  $\oint_C \frac{d\vec{l}'}{r} = 0$ . Esto es de esperarse si consideramos que no existen monopolos magnéticos.

Para el término dipolar usamos la identidad <sup>5</sup>  $\oint \vec{r}' \cdot \vec{r}' d\vec{l}' = -\vec{r}' \times \oint d\vec{S}'$ . Lo cual nos permite definir el momento magnético dipolar como:

$$\vec{\mu} = I d\vec{S}, \quad (3.42)$$

$$\vec{A}^{(1)}(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times \vec{x}}{r^3}. \quad (3.43)$$

Más importante que el potencial, que sabemos no es único, es el campo magnético. La contribución dipolar al campo generado por una corriente es:

$$\vec{B}^{(1)} = \vec{\nabla} \times \vec{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{3\hat{r}(\vec{\mu} \cdot \hat{r}) - \vec{\mu}}{r^3} \right], \quad \hat{r} := \frac{\vec{x}}{r}. \quad (3.44)$$

### 3.5.1. Relación entre momento magnético y momento angular

En algunos sistemas se tiene que la densidad de carga eléctrica (en cada punto) es proporcional a la densidad de masa, de modo que

$$\rho(x) = \frac{Q}{M} \rho_m(x). \quad (3.45)$$

donde  $Q$  es la carga total y  $M$  la masa total del sistema. Esto ocurre, en general, en sistemas constituidos por un sólo tipo de partículas, masivas y cargadas. En este caso, si cada elemento del sistema se mueve con velocidad  $\vec{v}(x)$ , entonces

$$\vec{J} = \rho(x) \vec{v}(x) = \frac{Q}{M} \rho_m(x) \vec{v}(x) \quad (3.46)$$

<sup>5</sup>Use en el teorema de Stokes  $\oint_S \vec{\nabla} \times \vec{v} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \vec{c}T$ , donde  $\vec{c}$  es un vector constante y  $T$  es una función escalar cualquiera. Esto implica  $\oint \vec{\nabla} T \times d\vec{S} = -\oint T d\vec{l}$ . Ahora sustituya en esta última identidad  $T = \vec{c} \cdot \vec{r}$  y obtendrá la identidad deseada.

y entonces el momento magnético puede escribirse como

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int_V \vec{x} \times \vec{J} dV = \frac{Q}{2M} \int_V \vec{x} \times \rho_m(x) \vec{v}(x) dV = \frac{Q}{2M} \int_V \vec{x} \times d\vec{p}, \quad (3.47)$$

donde  $d\vec{p} := \rho_m(x) \vec{v}(x) dV$  denota el **momento lineal** de la masa en el elemento de volumen  $dV$ . De esta forma  $d\vec{L} := \vec{x} \times d\vec{p}$  es el **momento angular** del pequeño elemento de masa (respecto al origen elegido) y, finalmente,

$$\boxed{\vec{\mu} = \frac{Q}{2M} \vec{L}.} \quad (3.48)$$

### 3.6. Fuerza y torque sobre una distribución compacta de corriente

Consideramos ahora el caso en que una pequeña distribución de corriente se ubica en una región donde existe un campo magnético externo  $\vec{B}(x)$ .

La fuerza total que la distribución de corrientes experimenta, debido al campo externo (es decir, sin tomar en cuenta la auto-interacción de la distribución), es dada por (3.13). Empecemos por calcular la torca que siente un dipolo magnético en el seno de un campo magnético. No obstante, dado que el dipolo tiene un tamaño pequeño, a la hora de calcular la integral que aparece en (3.13), podemos aproximar  $\vec{B}$  por el primer término del desarrollo en serie de Taylor que aparece en la ecuación, es decir,  $\vec{B} = \vec{B}_0$ .

$$\vec{\tau} = \vec{r}' \times \vec{F} = \vec{r}' \times \int_V \rho \vec{v} \times \vec{B}_0 dV = \int_V \vec{J} \times \vec{B}_0 dV. \quad (3.49)$$

Considerando en este caso que el dipolo consiste en una espira de corriente cerrada, cambiamos la integral de volumen por una integral de línea. Consideremos la identidad del doble producto vectorial para desarrollar la ecuación anterior:

$$\vec{\tau} = \oint \vec{r}' \times (I d\vec{r}' \times \vec{B}_0) = \oint I d\vec{r}' (\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) - \oint (d\vec{r}' \cdot \vec{r}') \vec{B}_0, \quad (3.50)$$

la última integral es una integral conservativa ya que  $(d\vec{r}' \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2} d(\vec{r}' \cdot \vec{r}') = \frac{1}{2} dr'^2$ . Por lo tanto este término no contribuye. Como el campo magnético es una constante en la ecuación anterior, como siguiente paso podemos usar las siguientes identidades básicas:

$$d(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) \vec{r}' = (d\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) \vec{r}' + (\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) d\vec{r}', \quad (3.51)$$

$$(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{B}_0 = (\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) d\vec{r}' - \vec{r}' (d\vec{r}' \cdot \vec{B}_0). \quad (3.52)$$

3.6. FUERZA Y TORQUE SOBRE UNA DISTRIBUCIÓN COMPACTA  
Electromagnetismo I DE CORRIENTE

Sumando las ecuaciones 3.51 y 3.52 obtenemos;  
 $(d\vec{r}')(\vec{r}' \cdot \vec{B}_0) = \frac{1}{2}(\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{B}_0 + \frac{1}{2}d((\vec{r}' \cdot \vec{B}_0)r')$ . Sustituimos este resultado en 3.50,

$$\vec{\tau} = I \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{B}_0 + \frac{1}{2} \oint [d(\vec{B}_0 r' \cdot \vec{r}')], \quad (3.53)$$

donde la última integral nuevamente es conservativa,

$$\boxed{\vec{\tau} = I \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}') \times \vec{B}_0 = \vec{\mu} \times \vec{B}.} \quad (3.54)$$

En la ecuación anterior usamos la fórmula de área de Green  $\vec{a} = \frac{1}{2} \oint (\vec{r}' \times d\vec{r}')$ . La cual puede ser demostrada geoméricamente, por medio de una suma de triángulos infinitesimales que pueden ser formador en la curva, ver figura 3.3 .

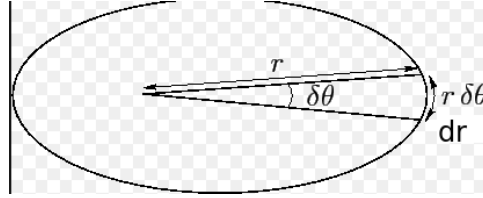


Figura 3.3: Representación gráfica de la formula de área de Green.

Ahora a partir de esta relación calculamos la energía de interacción de un campo magnético y un dipolo. Considerando que estas fuerzas son conservativas, entonces podemos relacionar la fuerza con un gradiente de un potencial energético (coordenadas esféricas):

$$\vec{F} = \vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \right), \quad (3.55)$$

ahora considérese en estar mismas coordenadas la torca,

$$\vec{\tau} = (r\hat{e}_r) \times \vec{F} = \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} \hat{e}_\phi - \frac{1}{\text{sen}(\theta)} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{e}_\theta \right). \quad (3.56)$$

Considere que el dipolo magnético tiene simetría azimutal, es decir,  $\frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$  y por ende podemos concluir que la magnitud de la torca debe ser (alienando el dipolo en el eje z);

$$\tau = \frac{\partial U}{\partial \theta} = \mu B \text{sen}(\theta), \quad (3.57)$$

integrando la ecuación anterior implica,

$$\boxed{U = -\mu B \cos(\theta) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}.} \quad (3.58)$$

Donde hemos tomado el cero de la energía magnética en  $\theta = 0$ . Puede verificarse usando (3.58) y (3.54) que un dipolo magnético situado en un campo (homogéneo) externo experimentará un torque que tenderá a alinear el momento magnético de la distribución con el del campo externo. La posición de equilibrio corresponde al caso en que  $\vec{\mu}$  es paralelo a  $\vec{B}$ , que es además un equilibrio estable ya que la energía de interacción es mínima. Más generalmente, el momento magnético puede realizar un movimiento de precesión en torno al campo magnético.

### 3.7. Campos magnéticos en la materia

Análogamente al caso electrostático, en el que un medio se polariza en presencia de un campo externo, éste puede además magnetizarse. Esto significa que en cada pequeño elemento de volumen (macroscópico) puede existir un momento magnético no nulo. Este momento magnético puede ser producto de los pequeños “loops” de corrientes inducidas por el campo aplicado sobre los electrones atómicos. Este tipo de dipolos se inducen en dirección contraria al campo aplicado, por lo que tienden a reducir el valor de la inducción magnética al interior del material. Los materiales **diamagnéticos** son aquellos en que este tipo de magnetización es dominante. El hecho que las partículas subatómicas, y en particular los electrones, posean momentos magnéticos intrínsecos (permanentes), hace posible que un material presente magnetización no nula, de origen distinto a la generada por las corrientes inducidas. En general, un campo magnético aplicado tenderá a alinear, en mayor o menor medida, los momentos magnéticos permanentes del material con el campo aplicado, pudiendo compensar y revertir la magnetización debida a las corrientes inducidas. Los materiales paramagnéticos presentan momentos magnéticos netos en la misma dirección del campo aplicado. En los ferro-magnetos, por otro lado, la alineación de los momentos magnéticos permanentes es tal que el momento magnético total es no nulo en ausencia de un campo aplicado, y puede asumir valores varios ordenes de magnitud mayor que el caso de los paramagnéticos.

#### 3.7.1. Magnetización

En resumen, consideraremos que en el interior de un medio, existen momentos magnéticos distribuidos en su interior. Modelaremos esta distribución definiendo el **(pseudo-)vector de magnetización** como la densidad de momento magnético, es decir, como el momento magnético por unidad de volumen en una pequeña región ( $\Delta V \rightarrow 0$ , desde el punto de vista macroscópico) del material:

Definición  
Magnetización

$$\vec{M}(x) := \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\mu}}{\Delta V}. \quad (3.59)$$

Como consecuencia, la magnetización tiene unidades de corriente por unidad de longitud:  $[\vec{M}] = [\vec{\mu}]/L^3 = IL^2/L^3 = I/L$ . Con esta definición, tenemos que el momento magnético  $d\vec{\mu}(x)$  contenido en un elemento de volumen (macroscópico)  $dV$  centrado en un punto con posición  $\vec{x}$  es

$$d\vec{\mu}(x) = \vec{M}(x) dV. \quad (3.60)$$

Entonces, a partir de (3.43) podemos calcular al campo (potencial vectorial) producido por la distribución de momentos dipolares como la superposición del campo correspondiente al momento dipolar magnético contenido en cada elemento de volumen:

$$\vec{A}^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{d\vec{\mu}(x') \times (\vec{x}_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} \quad (3.61)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M}(x') \times (\vec{x}_k - x'_k)}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV'. \quad (3.62)$$

Usando la identidad (2.19) podemos escribir este potencial vectorial producido por la magnetización del material como<sup>6</sup>:

$$\vec{A}^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \vec{M}(x') \times \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (3.63)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \vec{\nabla}' \times \left( \frac{\vec{M}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{M}(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (3.64)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{M}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times d\vec{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{M}(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (3.65)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \left( \frac{\vec{M}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \times \hat{n} \right) dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{\nabla}' \times \vec{M}(x'))}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (3.66)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{j}_{\text{superficie}}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (3.67)$$

En resumen

$$\boxed{\vec{A}^M(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\vec{j}_{\text{superficie}}^M(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'}, \quad (3.68)$$

donde hemos definido la **densidad de corriente de magnetización**  $\vec{J}^M$  y la **densidad de corriente superficial de magnetización**  $\vec{j}^M$  por

$$\boxed{\vec{J}^M(x) := \vec{\nabla} \times \vec{M}(x), \quad \vec{j}^M(x) := \vec{M}(x) \times \hat{n}(x)}. \quad (3.69)$$

corrientes de magnetización

<sup>6</sup>Usamos el teorema de divergencia  $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV = \int \vec{v} \cdot d\vec{S}$  con  $\vec{v} = \vec{v} \times \vec{c}$ , donde  $\vec{c}$  es un vector constante. Se deduce  $\int \vec{\nabla} \times \vec{v} dV = - \int \vec{v} \times d\vec{S}$

Estas definiciones de densidades de corriente, que pueden ser reales o ficticias dependiendo del origen de la magnetización  $\vec{M}$ , son de utilidad puesto que, de acuerdo a (3.68), el campo producido por la magnetización es equivalente al campo producido (a través de la ley de Biot-Savart) por las corrientes descritas por  $\vec{J}^M$  en el interior del material y por  $\vec{j}^M$  en su superficie.

### 3.7.2. Excitación magnética

Esta vez consideraremos los efectos de la magnetización en las leyes fundamentales de la magnetostática. Para ello introducimos ahora en la ley de Ampere la corriente magnética inducida,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \text{vec} J_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{J}^M, \quad (3.70)$$

en donde se sustituye la ecuación 3.69,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{ext}} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (3.71)$$

De aquí, podemos escribir

$$\vec{\nabla} \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_{\text{ext}}. \quad (3.72)$$

Esto motiva definir la **excitación magnética** (también llamada **intensidad de campo magnético**):

$$\vec{H}(x) := \frac{1}{\mu_0} \vec{B}(x) - \vec{M}(x), \quad (3.73)$$

que satisface entonces la ley de Ampère generalizada,

$$\text{L. de Ampère para } \vec{H} \quad \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\text{ext}}} \quad (3.74)$$

o, en su versión integral,

$$\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{ext}}}. \quad (3.75)$$

Análogamente al caso del vector de desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ , la intensidad de campo magnético  $\vec{H}$  es una cantidad útil puesto que está relacionada, a través de la ecuación (3.74), con las corrientes externas del sistema, que son las corrientes que (en principio) pueden ser manipuladas.

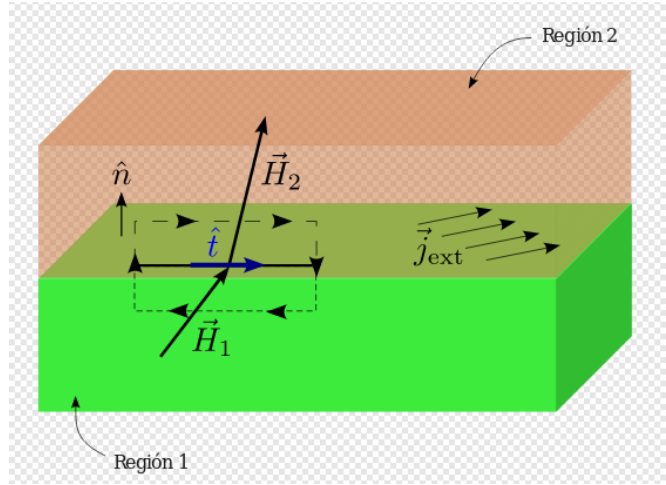


Figura 3.4: Condiciones de continuidad para  $\vec{H}$  en una interfase de dos medios magnéticos.

### 3.7.3. Condiciones de continuidad en interfaces

Al aplicar la ley de Ampère (3.75) al circuito de la figura 3.4, y considerando que

$$I_{\text{ext}} = \int_S \vec{J}_{\text{ext}} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_{\text{ext}} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dS = \vec{J}_{\text{ext}} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) \ell = (\vec{J}_{\text{ext}} \times \hat{n}) \cdot \hat{t} \ell, \quad (3.76)$$

encontramos

$$\boxed{(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} = (\vec{J}_{\text{ext}} \times \hat{n}) \cdot \hat{t}} \quad (3.77)$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_{\text{ext}}.} \quad (3.78)$$

Note que en (3.76) el lado derecho contiene a la **densidad de corriente superficial externa**  $\vec{J}_{\text{ext}}$ . En este caso puede considerarse que  $\vec{J}_{\text{ext}} = \vec{j}_{\text{ext}} \delta(z)$ , donde la superficie que limita las dos regiones está determinada por la condición  $z = 0$ , siendo  $z$  una coordenada normal a la superficie.

**Si no hay corrientes externas de superficie, entonces la componente tangencial de la excitación magnética cruza continuamente la interfase.** En general, si existen corrientes externas de superficie, la componente de la intensidad de campo magnético paralela a  $\vec{j}_{\text{ext}} = j_{\text{ext}} \hat{j}$  cruzará continuamente la interfase, mientras que la componente ortogonal tendrá una discontinuidad de magnitud  $j_{\text{ext}}$ . Esto puede verse directamente de (3.77) eligiendo  $\hat{t}$  en la dirección y sentido de  $\vec{j}_{\text{ext}}$ , es decir,  $\hat{t} = \hat{j}$ , obteniendo

$$H_2^{\parallel} = H_1^{\parallel}, \quad H^{\parallel} := \vec{H} \cdot \hat{j}, \quad (3.79)$$

mientras que, eligiendo  $\hat{t} = \hat{j} \times \hat{n}$ , encontramos

$$H_2^\perp - H_1^\perp = j_{ext}, \quad H^\perp := \vec{H} \cdot (\hat{j} \times \hat{n}). \quad (3.80)$$

Estas relaciones se complementan con aquella que se desprende del hecho que el campo magnético tiene siempre divergencia nula (independientemente del medio considerado). Análogamente al caso eléctrico, ver por ejemplo (2.250), la ecuación 3.28 implica

$$\boxed{(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0}, \quad (3.81)$$

es decir, la componente de  $\vec{B}$  normal a la superficie es continua en la interfase.

### 3.7.4. Relación constitutiva, susceptibilidad magnética

Análogamente al caso electrostático, se llama relación constitutiva a la relación entre la magnetización de un material (la “respuesta” de éste) con el campo magnético existente, por ejemplo:

$$\vec{M} = \vec{M}[\vec{H}]. \quad (3.82)$$

Esta relación puede ser no-local, no-lineal, anisótropa e inhomogénea, y es usualmente inferida a partir de experimentos. Sin embargo, muchos materiales pueden ser descritos por relaciones locales. En este caso puede parametrizarse la dependencia de la magnetización con la intensidad magnética por medio de una serie de la forma

$$M_i(x) = M_i(H_j(x)) = M_i|_{\vec{H}=\vec{0}} + \chi_{ij}^m(x)H_j(x) + \chi_{ijk}^m(x)H_j(x)H_k(x) + \dots \quad (3.83)$$

Para medios locales, lineales y sin magnetización permanente ( $M_i|_{\vec{H}=\vec{0}} = 0$ ), la relación se reduce a

$$\boxed{M_i(x) = \chi_{ij}^m(x)H_j(x)}, \quad (3.84)$$

donde  $\chi_{ij}^m$  es el **tensor de susceptibilidad magnética** del material. En este caso, la inducción magnética adopta la forma

$$\boxed{B_i(x) = \mu_{ij}(x)H_j(x) = \mu_0 \kappa_{ij}^m(x)H_j(x)}, \quad (3.85)$$

con el tensor de **permeabilidad magnética**  $\mu_{ij}$  y el tensor de **permeabilidad relativa**  $\kappa_{ij}^m$ , definidos por

$$\boxed{\mu_{ij} := \mu_0 (\delta_{ij} + \chi_{ij}^m) = \mu_0 \kappa_{ij}^m}. \quad (3.86)$$

Finalmente, en el caso de medios locales, lineales e isotropos, las expresiones anteriores para la relación constitutiva se reducen a

$$\vec{M}(x) = \chi_m(x)\vec{H}(x), \quad (3.87)$$

$$\vec{B}(x) = \mu(x)\vec{H}(x) = \mu_0 \kappa_m(x)\vec{H}(x), \quad (3.88)$$

$$\mu := \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \kappa_m. \quad (3.89)$$



### Ecuación de Laplace para el potencial escalar de magnetización

Como vimos en la sección 3.7.2, en regiones libres de corrientes externas la excitación magnética  $\vec{H}$  es proporcional al gradiente del potencial escalar de magnetización ( $\vec{\nabla}\phi^{*M}$ ). Si además el medio es lineal e isótropo, entonces  $\vec{B} = \mu\vec{H} = -\mu\vec{\nabla}\phi_M^*$ . Finalmente, si además el medio es homogéneo, encontramos, usando 3.28, que el potencial escalar de magnetización satisface la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\phi_M^* = 0. \quad (3.90)$$

### 3.7.5. Paramagnetismo, diamagnetismo, ferromagnetismo

#### Diamagnetismo

En este tipo de materiales  $\vec{M}$  tiene **dirección opuesta a  $\vec{H}$** , por lo que  $\chi_m < 0$  y  $\kappa_m < 1$  y la inducción magnética  $\vec{B}$  es **debilitada** (respecto al valor que asumiría en el vacío, dada la misma distribución de corrientes externas). Este tipo de materiales requiere que no existan momentos magnéticos permanentes significativos, de modo que la magnetización se deba principalmente a **corrientes inducidas**. Estas **corrientes inducidas generan momentos dipolares en sentido contrario al campo que las induce**, por lo que **la inducción magnética disminuye en el interior de un diamagneto**. En la mayoría de los casos de diamagnetismo la susceptibilidad magnética es independiente de la temperatura y posee un valor muy pequeño:  $\chi_m \ll 10^{-5}$ . El diamagnetismo es una propiedad general, es decir, que se presenta en todos los materiales (siempre se producen pequeñas corrientes inducidas), pero se dice que un material es diamagnético si este efecto es el dominante, es decir, cuando no existen otras fuentes de magnetización que reviertan la contribución diamagnética. Ejemplos de materiales diamagnéticos: casi todas las sustancias orgánicas, metales nobles (oro, plata, cobre, mercurio, ...). Un caso extremo de diamagnetismo es un **superconductor**, en el que la inducción magnética es **anulada en su interior**,  $\chi_m = -1$  y  $\kappa_m = 0$  (“diamagneto ideal”).

#### Paramagnetismo

En este tipo de materiales la magnetización  $\vec{M}$  tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{H}$ . Equivalentemente  $\vec{M}$  tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{B}$ , de modo que  $\chi_m > 0$ ,  $\kappa_m > 1$ . Por esto, en un material paramagnético la inducción magnética  $\vec{B}$  es **reforzada**. Este caso requiere que el material posea momentos magnéticos permanentes, que puedan alinearse con el campo magnético. A la tendencia de los momentos magnéticos a alinearse se contraponen el “desorden” relacionado con las agitaciones térmicas del material. Por esto, **en un material paramagnético  $\chi$  disminuye a medida que**

**la temperatura aumenta.** Muchos materiales paramagnéticos satisfacen la **ley de Curie:**  $\chi \propto 1/T$ .

Material	$\chi_m$
Aluminio	$2,1 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Oro	$-3,5 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-2,8 \times 10^{-5}$
Plata	$-2,4 \times 10^{-5}$
Sodio	$0,84 \times 10^{-5}$
Titanio	$18,0 \times 10^{-5}$
Tungsteno	$7,6 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-0,22 \times 10^{-8}$
Nitrógeno (1 atm)	$-0,67 \times 10^{-8}$
Oxígeno (1 atm)	$193,5 \times 10^{-8}$

Cuadro 3.1: Algunos materiales y sus susceptibilidades magnéticas, a temperatura ambiente (Reitz-Milford).

### Ferromagnetismo

En este tipo de materiales (típicamente materiales que contienen Hierro, Cobalto o Níquel) **la magnetización no es proporcional a la excitación magnética.** Esto es algunas veces expresado diciendo que la **susceptibilidad magnética efectiva**  $\chi_m := M/H$  depende del valor del campo (y de otras variables, como por ejemplo de la temperatura),  $\chi_m = \chi_m(T, \vec{H})$ . El ferromagnetismo requiere también que el material posea dipolos magnéticos permanentes. Debido a interacciones cuánticas, los momentos magnéticos de un ferro-magneto se ordenan espontáneamente (es decir, sin necesidad de campo magnético externo), cuando la temperatura baja de un cierto valor crítico, llamada temperatura de Curie,  $T_C$ . En el cero absoluto de temperatura, todos los momentos magnéticos estarían alineados. A medida que la temperatura aumenta, el desorden inducido por las vibraciones térmicas tiende a disminuir la alineación, pero sin conseguir anular la magnetización total. Cuando la temperatura cruza la temperatura de Curie, el sistema experimenta una transición de fase, y a partir de ese momento se comporta como un paramagneto usual.

Típicamente, los ferro-magnetos poseen susceptibilidades magnéticas muy altas y **la magnetización que presentan depende de su historia**, es decir, de cómo hayan sido expuestos a campos externos. En otras palabras, **dado un valor de la excitación  $\vec{H}$  el valor de  $\vec{M}$  no es único, sino que depende de cómo se haya alcanzado el valor  $\vec{H}$ .** Este fenómeno

Material	Fe	Co	Ni	Gd	EuO	CrBr <sub>3</sub>
$T_C$ [K]	1043	1393	631	290	69	37

Cuadro 3.2: Algunos materiales ferromagnéticos y sus temperaturas de Curie [?].

es conocido como **histéresis**. El comportamiento de histéresis típico de un ferro-magneto es ilustrado en la figura ??.

Un material ferromagnético sin magnetización previa sometido a un campo  $H$  se magnetiza siguiendo la curva I, llegando a una magnetización máxima  $M_S$  (“magnetización de saturación”). Si luego se disminuye la intensidad de campo magnético el sistema se comienza a desmagnetizar, pero siguiendo la curva II, de modo que, incluso cuando el campo  $H$  es cero, el material conserva una magnetización no nula (magneto permanente), llamada “magnetización remanente”. Esta magnetización puede ser anulada aplicando un campo en sentido inverso (intensidad de campo “coercitivo”). La propiedad de histéresis está relacionada con la existencia de **dominios magnéticos**, que poseen un momento magnético macroscópico no nulo y que requieren de energía para reorientarse. La histéresis de los ferro-magnetos es usada en la fabricación de **dispositivos de memoria**, en los que la información es codificada en la orientación del momento magnético de los dominios, que permanece indefinidamente hasta que campos externos sean usados para cambiar su estado.

### 3.8. Ejercicios

#### 3.8.1. Fuerza magnética.

Una partícula de carga  $q$  entra a una región de campo magnético uniforme  $\vec{B}$  (apuntando hacia dentro de la página). El campo desvía la partícula una distancia  $d$  encima de la línea original de movimiento, cómo se muestra en la figura 3.5.

- En términos de  $a$ ,  $d$ ,  $B$  y  $q$ , calcula el momento de la partícula.
- Calcula la distancia de deflexión  $d$ .

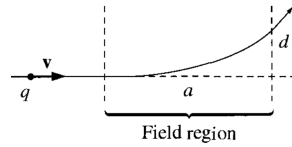


Figura 3.5: Partícula de carga  $q$  entrando a una región con un campo magnético uniforme,  $B$ . [1]

**Solución:** Primero, notemos la dirección del campo magnético, la dirección de movimiento y la dirección de deflexión, las podemos obtener fácilmente de la figura 3.5. Y mediante la ley de fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (3.91)$$

podemos deducir inmediatamente que  $q > 0$ .

a) La partícula, al entrar a la región de campo magnético uniforme, sigue una trayectoria de ciclotrón. Considerando  $R$  como el radio de curvatura, entonces podemos aplicar álgebra para obtener que:

$$R^2 = a^2 + (R - d)^2 = a^2 + R^2 + d^2 - 2Rd$$

Resolviendo para  $R$ , resulta de que

$$R = \frac{a^2 + d^2}{2d}$$

finalmente, dado que en el caso del ciclotrón, podemos calcular el momento de la partícula como:  $p = mv = qBR$ . Entonces, en nuestro caso,

$$p = qB \frac{(a^2 + d^2)}{2d}$$

b) Como  $R = \frac{a^2 + d^2}{2d}$  entonces podemos resolver la ecuación para  $d$ . Lo que resulta en:

$$d = R \pm \sqrt{R^2 - a^2}$$

es decir, tenemos dos posibles soluciones para  $d$ . Sin embargo, mediante un análisis a nuestro diagrama podemos convencernos rápidamente de que la solución  $d = R + \sqrt{R^2 - a^2}$  es válida únicamente si el campo magnético tiene un ancho mayor o igual a  $R$ ; tal que la partícula pueda retornar y este  $d$  indicaría la deflexión de la partícula, al regresar, a una longitud  $a$ . Análogamente, la solución  $d = R - \sqrt{R^2 - a^2}$  indica la distancia de deflexión de la partícula a una longitud  $a$  (sin haber retornado). Dado que el planteamiento del problema nos indica que la partícula no retorna, es decir, la región del campo magnético  $a$  es menor a  $R$ , entonces concluimos que:

$$d = R - \sqrt{R^2 - a^2}$$

### 3.8.2. Corriente y fuerza magnética.

Un circuito rectangular, el cual carga una masa  $m$ , cuelga verticalmente con el segmento de alambre superior dentro de una región de campo magnético uniforme. El campo magnético apunta hacia adentro de la hoja, ver figura 3.6. ¿Para que magnitud de corriente  $I$ , en el circuito, podría la fuerza magnética equilibrar la fuerza gravitacional?

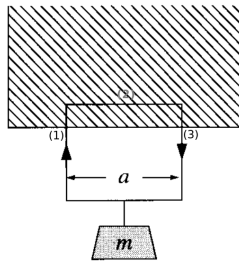


Figura 3.6: Circuito cuadrado semi-contenido en una región de campo magnético uniforme,  $B$ . [1]

**Solución:** Recordemos que la fuerza magnética sobre un segmento de alambre que lleva corriente es:

$$\vec{F}_m = \int I(d\vec{l} \times \vec{B}) \quad (3.92)$$

Entonces, en este caso, tenemos 3 segmentos de alambre a evaluar. Evidentemente estos segmentos son los que se encuentran contenidos dentro del campo magnético: (1), (2), y (3) de la figura 3.6.

Situemos nuestro sistema coordenado tal que el alambre se encuentra contenido en el plano  $y$ - $z$ , el campo magnético sólo tiene componente en la dirección  $x$  ( $\vec{B} = -B\hat{x}$ ) y la vertical corresponde a la dirección  $z$ .

Supongamos que de los segmentos (1) y (3), únicamente está dentro del campo magnético un pedazo de longitud  $h$ ,  $h < a$ . Por tanto:

$$\vec{F}_{m1} = \int I(d\vec{l}_1 \times \vec{B}) = \int I((dz\hat{z}) \times (-B\hat{x})) = \int_{a-h}^a IBdz(-\hat{y}) = -IB[z]_{a-h}^a \hat{y} = -IBh\hat{y}$$

$$\vec{F}_{m2} = \int I(d\vec{l}_2 \times \vec{B}) = \int I((dy\hat{y}) \times (-B\hat{x})) = \int_0^a IBdy(\hat{z}) = IB[y]_0^a \hat{z} = IBa\hat{z}$$

$$\vec{F}_{m3} = \int I(d\vec{l}_3 \times \vec{B}) = \int I((dz\hat{z}) \times (-B\hat{x})) = \int_a^{a-h} IBdz(-\hat{y}) = -IB[z]_{a-h}^a \hat{y} = IBh\hat{y}$$

Por lo que la fuerza magnética total sobre nuestro alambre cuadrado es:

$$\vec{F}_m = \vec{F}_{m1} + \vec{F}_{m2} + \vec{F}_{m3} = -IBh\hat{y} + IBa\hat{z} + IBh\hat{y} = IBa\hat{z}$$

Como vemos, la fuerza magnética total apunta en dirección  $\hat{z}$ . Y como la fuerza gravitacional es  $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$ . Entonces tenemos que el balance de fuerzas se da si:

$$\vec{F} = \vec{F}_m + \vec{F}_g = IBa\hat{z} - mg\hat{z} = 0$$

Por lo que la magnitud de la corriente que equilibra la fuerza magnética con la gravitacional es:

$$I = \frac{mg}{Ba}$$

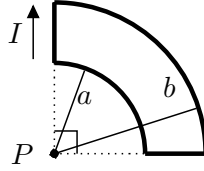
En este caso, el alambre se encontraría suspendido en el aire sin necesidad de ningún soporte.

### 3.8.3. Ley de Biot-Savart.

Calcula el campo magnético en el punto P para la configuración de la para la configuración de corriente mostrada en la figura 3.7, suponga que  $I$  es constante.

**Solución:** En este caso usaremos ley de Biot-Savart:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times \hat{\mathcal{R}}}{\mathcal{R}^2} \quad (3.93)$$

Figura 3.7: Circuito por el cual circula una corriente  $I$ .

Debido a la simetría del problema, es conveniente evaluar el problema en coordenadas cilíndricas  $(s, \theta, z)$  con el origen en el punto P y el eje  $z$  saliendo de la página.

Notemos que la configuración de la corriente nos lleva a tener que evaluar en 4 segmentos distintos la ley de Biot-Savart, a saber, (1), (2), (3) y (4).

Entonces, notemos que para los segmentos (1) y (3),  $\mathfrak{R} \parallel \hat{\mathfrak{R}}$ , por lo que  $\vec{B}_1 = \vec{0} = \vec{B}_3$ .

Por lo que para (2), tenemos que  $d\vec{l} = bd\phi\hat{\phi}$  y  $\mathfrak{R} = -b\hat{s}$ , por tanto,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{(bd\phi\hat{\phi}) \times (-\hat{s})}{(-b\hat{s})^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\pi/2}^0 \frac{bd\phi}{b^2} (\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{b} [\phi]_{\pi/2}^0 \hat{z} = -\frac{\mu_0 I}{8} \frac{1}{b} \hat{z}$$

De manera análoga con (4),  $d\vec{l} = ad\phi\hat{\phi}$  y  $\mathfrak{R} = -a\hat{s}$ . Por lo que el campo  $\vec{B}_4$  es:

$$\vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{a^2} (\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{8} \frac{1}{a} \hat{z}$$

De esta manera, el campo magnético total en el Punto P es:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{8} I \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{8} I \left( \frac{b-a}{ab} \right) \hat{z}$$

### 3.8.4. Potencial magnético.

Calcule el potencial magnético de:

- $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ .
- $\vec{B} = e^{-y^2} \hat{x}$ .

**Solución:** El potencial magnético se define como  $\vec{A}$  tal que  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  y, adicionalmente, se le pide que cumpla con la norma de Coulomb  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ .

- Usando la definición de potencial magnético

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{x} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{y} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{z} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Si ahora evaluamos por componentes,

$$(\partial_y A_z - \partial_z A_y) = 0$$

$$(\partial_z A_x - \partial_x A_z) = 0$$

$$(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = B_0$$

Para no complicarnos, consideremos  $A_x = a_1$  y  $A_z = a_3$  con  $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$ . De esta manera reducimos nuestro sistema de ecuaciones.

$$-\partial_z A_y = 0$$

$$\partial_x A_y = B_0$$

Lo que nos lleva a que  $A_y = A_y(x, y)$ . Y además, por simple integración  $A_y = B_0 x + c$  donde  $c \in \mathbb{R}$ . Resultando en que el potencial es:

$$\vec{A} = (a_1, B_0 x + c, a_3) + \vec{\nabla} f$$

con  $f$  es una función escalar. Finalmente, aplicando la norma de Coulomb, obtenemos que la condición que debe cumplir la función escalar  $f$  es  $\nabla^2 f = 0$ . Es decir,  $f$  debe de cumplir la ecuación de Laplace.

b) Análogamente,

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\hat{x} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\hat{y} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\hat{z} = e^{-y^2}\hat{x} = \vec{B}$$

Por lo que, igualando componente a componente,

$$(\partial_y A_z - \partial_z A_y) = e^{-y^2}$$

$$(\partial_z A_x - \partial_x A_z) = 0$$

$$(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = 0$$

Notemos que, podemos tomar  $A_x = a_1$  y  $A_z = a_3$  con  $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$ . Reduciendo así, la dificultad de nuestras ecuaciones.

$$-\partial_z A_y = e^{-y^2}$$

$$\partial_x A_y = 0$$



De esta manera, en principio,  $A_y = A_y(y, z)$ . Y además, por simple integración  $A_y = -ze^{-y^2} + c$  donde  $c \in \mathbb{R}$ . Quedando el potencial como:

$$\vec{A} = (a_1, -ze^{-y^2} + c, a_3) + \vec{\nabla} f$$

en donde  $f$  es una función escalar. Y aplicando la norma de Coulomb, obtenemos la condición que debe cumplir la función escalar  $f$ , a saber,  $\nabla^2 f = -2yze^{-y^2}$ .

### 3.8.5. Ley de Ampère.

Por un cable cilíndrico infinito, de radio  $R$ , fluye una corriente eléctrica  $I$  uniformemente distribuida por todo el cable. Calcular el campo magnético generado en todo el espacio.

**Solución:** La ley de Ampère nos dice que:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad (3.94)$$

En nuestro caso, consideremos dos casos:  $s < R$  y  $s > R$ .

Para  $s < R$ . Consideremos un circuito amperiano, de radio  $s$ , circular concéntrico al eje del cilindro. Entonces, por la simetría del problema.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \int_0^{2\pi} s d\phi = Bs \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi Bs \quad (3.95)$$

Por otra parte, como la carga total es  $I = \int J da = \int_0^{2\pi} \int_0^R j s ds d\phi = j\pi R^2$ , donde  $J = j$  es constante por ser la corriente uniforme por todo el cable. Entonces la carga encerrada es:

$$I_{enc} = \int J da = \int_0^{2\pi} \int_0^s j s ds d\phi = j\pi s^2 = I \frac{s^2}{R^2} \quad (3.96)$$

De esta forma, usamos ley de Ampère y obtenemos que  $2\pi Bs = \mu_0 I \frac{s^2}{R^2}$ . Resolviendo para  $B$ , obtenemos que  $B = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} I s$ . Finalmente, gracias a la simetría del problema podemos darle dirección al campo magnético. Quedando así:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi R^2} I s \hat{\phi}$$

Para  $s > R$ . El procedimiento es el mismo con la salvedad de que ahora la corriente encerrada es  $I$ . De esta manera.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

Por lo que el campo magnético en todo el espacio es:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I s}{2\pi R^2} \hat{\phi} & \text{si } s < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} & \text{si } s > R \end{cases}$$

### 3.8.6. Momento dipolar magnético.

Considere una superficie circular plana de radio  $R$ , la cual contiene una densidad de carga superficial  $\sigma = ks$ . Esta superficie gira, respecto a su centro, con velocidad angular constante,  $\vec{w} = w\hat{z}$ . Calcular:

- el momento dipolar magnético.
- el campo magnético  $\vec{B}$  usando la aproximación multipolar.

**Solución:** Sabemos que, en general, el momento dipolar magnético es:

$$\vec{\mu} = I \int d\vec{a} \quad (3.97)$$

sin embargo, si el circuito es plano,  $\int d\vec{a}$  es simplemente *vector* de área encerrada  $\vec{a}$ . Por lo tanto  $\vec{\mu} = I\vec{a}$ .

Consideremos coordenadas cilíndricas  $(s, \phi, z)$ . Como el momento dipolar magnético está definido únicamente para espiras cerradas con corriente. Procedemos a considerar un *aro* de grosor  $ds$  y radio  $s$  dentro de nuestra superficie circular. Entonces, este aro generará una corriente  $I_s$ , tal que  $I_s = v(\sigma ds)$  donde  $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{s} = ws\hat{\phi}$ , por lo que  $I_s = ws(ksds) = wks^2 ds$ . Y dado que el vector área de nuestro aro es  $\vec{A}_s = \pi s^2 \hat{z}$ . Entonces este *aro* contribuiría con el momento dipolar una cantidad:

$$d\vec{\mu}_s = I_s \vec{A}_s = wk\pi s^4 ds \hat{z}$$

Por tanto, para obtener el campo magnético total, es necesario sumar las contribuciones de todos los aros de nuestra superficie:

$$\vec{\mu} = \int_0^R d\vec{\mu}_s = \frac{wk\pi}{5} R^5 \hat{z}$$

- La aproximación multipolar del campo magnético es:

$$\vec{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\vec{\mu} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{\mu}] \quad (3.98)$$

Para mayor claridad, cambiemos a coordenadas cartesianas, en donde  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[ \frac{wk\pi R^5}{5} (3z\hat{r} - \hat{z}) \right] \\ &= \frac{wk\mu_0 R^5}{20} \left[ 3 \frac{xz\hat{x} + yz\hat{y} + z^2\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{\hat{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right]\end{aligned}$$

### 3.8.7. El campo magnético de un objeto magnetizado.

Tenemos un cilindro infinitamente largo, de radio  $R$ . Este cilindro tiene una magnetización permanente  $\vec{M} = m s \hat{\phi}$ . Además de esta magnetización, no hay corrientes libres. Calcule las corrientes inducidas. Calcular:

- las corrientes inducidas.
- el campo magnético en todo el espacio.

**Solución:** Dado un objeto magnetizado, tenemos que las corrientes inducidas son:

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (3.99)$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} \quad (3.100)$$

Dada la geometría del problema, usaremos coordenadas cilíndricas  $(s, \phi, z)$ .

a) En este caso, al tener  $\vec{M}$  únicamente componente  $z$ , la corriente volumétrica se reduce a :

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = -\partial_s(ms)\hat{\phi} = -m\hat{\phi}$$

Por otra parte, para la corriente superficial inducida, notemos que la superficie se define para  $s = R$ . Y en este caso el vector normal es  $\hat{n} = \hat{s}$ . Por tanto,

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}|_{s=R} = ms(\hat{z} \times \hat{s})|_{s=R} = mR\hat{\phi}$$

b) Recordemos que la ley de Ampère, en su forma integral, para materiales magnetizados es:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{lib. enc} \quad (3.101)$$

donde  $\vec{H}$  el campo auxiliar (o de intensidad magnética) se define como  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$ .

Notemos que en este problema  $I_{lib. enc} = 0$  pues se tiene por hipótesis que no existen corrientes libres. Esto nos conduce, gracias a la ley de Ampère, a que  $\vec{H} = \vec{0}$ . Sin embargo, es de suma importancia notar que esto no implica que el campo magnético  $\vec{B}$  sea nulo.

Para  $s < R$ :

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \vec{0} \text{ pero } \vec{M} = ms\hat{z}. \text{ Entonces, } \vec{B} = \mu_0 \vec{M} = \mu_0 ms\hat{z}.$$

Para  $s > R$ :

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \vec{0} \text{ y además, } \vec{M} = \vec{0}. \text{ Por lo que, } \vec{B} = \vec{0}.$$

Entonces, el campo magnético en todo el espacio es:

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 ms\hat{z} & \text{si } s < R \\ \vec{0} & \text{si } s > R \end{cases}$$

### 3.8.8. Medios lineales.

Un cable coaxial consiste en dos cascarones cilíndricos (coaxiales) muy largos, separados por un material aislante con susceptibilidad magnética  $\chi_m$ . Una corriente  $I$  (en dirección  $\hat{z}$ ) fluye por el cilindro interior, de radio  $a$ , y regresa por el cilindro exterior de radio  $b$ . En cada cilindro la corriente se distribuye uniformemente sobre la superficie.

a) Calcula el campo magnético entre los dos cilindros.

b) Como prueba, calcula las corrientes inducidas y la magnetización y confirma (usando, además, las corrientes libres) que juntas generan el campo magnético esperado.

**Solución:** a) Si  $a < s < b$ . La corriente libre encerrada, por el circuito amperiano, es  $I$  en dirección  $\hat{z}$ . Entonces, dada la simetría del problema,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \oint dl = H \int_0^{2\pi} (s d\phi) = H(2\pi s)$$

Por tanto, el campo auxiliar es  $\vec{H} = \frac{1}{2\pi s} I \hat{\phi}$ . Al tener, en esta zona, un material aislante con susceptibilidad magnética  $\chi_m$ , entonces  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . Por lo que  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H}$ . De manera que el campo magnético en  $a < s < b$  resulta ser:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

b) Ahora calculemos las corrientes inducidas, evidente, nos encontramos trabajando en coordenadas cartesianas  $(s, \phi, z)$ .

$$\vec{J}_b = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \frac{1}{s} \partial_s \left( s \frac{\chi_m I}{2\pi s} \right) \hat{z} = \vec{0}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = \left( \frac{\chi_m I}{2\pi s} \hat{\phi} \right) \times \hat{s} = \begin{cases} \frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z} & \text{en } s = a \\ -\frac{\chi_m I}{2\pi b} \hat{z} & \text{en } s = b \end{cases}$$

Con esto consideremos la ley de Ampère *normal* con un circuito amperiano circular, de radio  $s$  ( $a < s < b$ ), centrado en el eje de los cilindros.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B \int_0^{2\pi} (sd\phi) = B(2\pi s)$$

Por otra parte, notemos que la corriente encerrada por nuestro circuito amperiano es:

$$I_{enc} = I + \frac{\chi_m I}{2\pi a} (2\pi a) = (1 + \chi_m)I$$

Juntando ambas partes de la ley de Amperè resulta que  $B = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) I}{2\pi s}$  y por la geometría del problema,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

Recuperando así el resultado del inciso anterior.



---

## Electrodinámica y Teoría de conductividad

---

*“¿Nos educaremos a nosotros mismos en lo que se conoce, y luego, desechando todo lo que hemos adquirido, recurriremos a la ignorancia en busca de ayuda para guiarnos entre lo desconocido?”*

– Michael Faraday

Hasta ahora hemos estudiado el caso independiente del tiempo en los fenómenos eléctricos y magnéticos, sabiendo de antemano que no es evidente como introducir esta variable en las ecuaciones. Antes que eso empezaremos por la teoría de conducción eléctrica que hasta la fecha tiene una gran importancia práctica e incluso de investigación.

### 4.0.1. Ley de Child-Langmuir

Empezaremos por estudiar el caso físicamente más sencillo, el de un haz de electrones en el vacío impulsado entre dos terminales conductoras con diferencia de potencial fijo. Este fenómeno fue estudiado por Child en 1911 y fue Langmuir quien en 1913 descubrió que esta ley se puede aplicar como un dispositivo electrónico. Estos dispositivos son el diodo de vacío y el termistor, los cuales sirvieron como base para la electrónica moderna. El diodo de vacío es un dispositivo que permite la conducción eléctrica solo en un sentido de polarización. El termistor por otro lado es un dispositivo que permite regular una corriente alta por medio de una corriente pequeña, es decir un amplificador de potencia.

aquí estudiaremos de forma teórica este proceso de conducción. Considérese así el siguiente sistema: sean dos placas conductoras, una aterrizada llamada

cátodo y la otra a potencial  $V$  llamada ánodo. Entre estas placas solo hay vacío. Ahora para obtener electrones libres entre estas dos placas debemos idear un proceso para liberarlos del conductor en el que están contenidos. Para ello supondremos que estos siguen una estadística de Maxwell-Boltzman (esto es un supuesto ya que en realidad los electrones son fermiones y siguen la estadística de Fermi-Dirac). De ser así sabemos que si aumentamos la temperatura aumenta la energía promedio del electrón, la cual puede llegar a superar la barrera energética de confinamiento del conductor.

Para que este efecto, que es llamado termiónico, sea considerable debemos de elevar la temperatura del conductor cerca de  $1500K$ , donde la mayoría de los conductores se funden cerca de estas temperaturas excepto el Osmio y el Tungsteno los cuales tienen un punto de fusión de  $3500K$  aproximadamente. Fue Thomas Alva Edison quien pudo idear un proceso para malear el Osmio y estudio cual era la corriente de saturación en el efecto termiónico, y concluyo que la corriente máxima que puede extraerse depende de la forma  $J_{SAT} = CT^2e^{-e\phi/kT}$ , donde  $C$  es una constante que depende de la geometría de las placas,  $k$  es la constante de Boltzman, y  $e\phi$  es el potencial de trabajo (potencial para que un electrón pueda escapar del conductor). Esta ley esta deducida en el apéndiceF .

Considerando esto podemos añadir un filamento incandescente, ver figura 4.1 cerca del cátodo, de tal manera que en este filamento tengamos electrones "libres" disponibles para acelerar. Hay que considerar que estas cargas pueden afectar el potencial entre las placas (ver sección 2.3), de no ser así podríamos modelar el sistema como una ecuación con fuerza constante sobre las cargas (movimiento uniformemente acelerado). Asumiremos que la energía inicial de los electrones es despreciable en comparación con la energía final de aceleración, además supondremos que la distancia entre las placas es mucho menor que la longitud de estas (aproximación unidimensional). Puestas estas hipótesis en ecuaciones (en una dimensión)

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = eV(x), \tag{4.1}$$

$$J_x = \rho(x)v_x,$$

$$\vec{\nabla}^2V(\vec{x}) = \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0},$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{J_x(2e/m)^{-1/2}}{\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \equiv -C \frac{J_x}{\sqrt{V(x)}}. \tag{4.2}$$

Debemos añadir a esto las condiciones de frontera  $V(0) = 0$ ,  $V(d) = V$  y  $\frac{dV}{dx} \Big|_{x=0} = 0$ ,  $\frac{dV}{dx} \Big|_{x=d} = E$ . Para resolver esta ecuación multiplicamos por ambos lados  $\frac{dV(x)}{dx}$  y usamos la identidad básica  $\frac{df(x)^2}{dx} = 2f(x)\frac{df(x)}{dx}$ . Esto



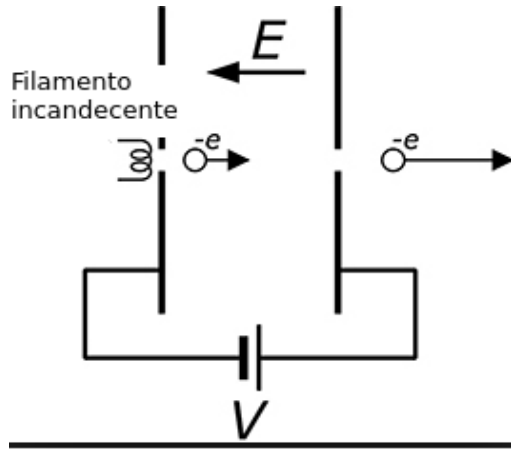


Figura 4.1: Diagrama de un diodo de vacío.

resulta,

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2}{dx} = -C \frac{J_x}{\sqrt{V(x)}} \frac{dV(x)}{dx}, \quad (4.3)$$

integraremos esta ecuación (entre 0 y  $d$ ) y usamos las condiciones de borde,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dV(x)}{dx}\right)^2 = 2CJ_x \sqrt{V(x)} \quad (4.4)$$

de aquí es fácil volver a integral y obtenemos la relación entre corriente y potencial conocida como **ley de Child-Langmuir**

$$\boxed{J = KV^{3/2}}, \quad \text{donde } K \text{ es una constante.} \quad (4.5)$$

Esta ecuación solo es válida hasta que la corriente se acerca a la corriente de saturación  $J_{SAT}$ , lo cual depende de la temperatura.

#### 4.0.2. Ley de Ohm

El siguiente paso para entender la conducción eléctrica, es estudiar el caso donde se aplica una diferencia de potencial en un medio conductor directamente. En la ley de Child-Langmuir una hipótesis fundamental fue considerar que el sistema estaba en un vacío perfecto. Ahora consideraremos un conductor por el cual se aplica en sus extremos una diferencia de potencial.

En este caso consideraremos el siguiente modelo: asumiremos que en un conductor las cargas se mueven de forma cuasi-libre. Además supondremos que los electrones colacionan de forma elástica con los átomos del medio y no consideraremos interacciones entre estos. Con este modelo podemos estudiar la energía de un electrón en un conductor debida a la energía cinética de este y la energía que pierde por la fuerza eléctrica. Esta energía de pérdida la modelaremos como  $E' = F\Delta x$ , donde la fuerza en este caso es  $F = qE$  y el desplazamiento esta dado por  $v_x\tau$  donde  $v_x$  es la velocidad de arrastre del electrón en dirección  $x$  y  $\tau$  es el tiempo promedio entre coaliciones (esta velocidad se diferencia de la velocidad instantánea en el hecho que esta última es la velocidad que tiene un electrón en el medio, mientras que la velocidad de arrastre es una velocidad promedio con respecto a las coaliciones del electrón con los átomos). Por ejemplo en el caso donde no se aplica un campo eléctrico se espera que la velocidad de arrastre sea cero (es decir el electrón en promedio no se desplaza).

### Deducción 1

Ya que tenemos este modelo, vamos a suponer que los electrones siguen una distribución uniforme (debido a que son fermiones y la estadística de Fermi-Dirac predice que la distribución debe ser así temperatura cero) y delimitada por un momento máximo  $P_F$ , de ahí podemos calcular el momento promedio debido a la aplicación del campo eléctrico, consideramos primero que en el campo eléctrico ejerce un movimiento de arrastre del electrón incrementando por una cantidad pequeña el momento máximo  $P_F$  a  $P_F + \Delta p$ , por lo que el valor promedio del electrón (en una dimensión) resulta

$$\langle p_x \rangle = \frac{\int_{-P_F}^{P_F+\Delta p} p_x dp_x}{\int_{-P_F}^{P_F} dp_x} = \frac{1}{2}\Delta p_x. \quad (4.6)$$

Esto implica que la fuerza debe ser  $F_x = \Delta \langle p_x \rangle / \tau = 2 \langle p_x \rangle / \tau = \Delta p_x / \tau$ , que en equilibrio debe ser iguala  $qE$ . De aquí se deduce que velocidad de arrastre es linealmente proporcional al campo eléctrico aplicado. A la cantidad  $\frac{q\tau}{m}$  se le conoce como movilidad eléctrica  $\mu$ . Reescribimos esta relación en general como  $\vec{v} = \mu\vec{E}$ .

Obsérvese que en este modelo hemos supuesto que los electrones colisionan elásticamente con los iones (átomos) del material, ver figura 4.2. Además hemos supuesto que el tiempo de relajación o de colisión de los electrones no depende del ángulo de dispersión ni de la energía.

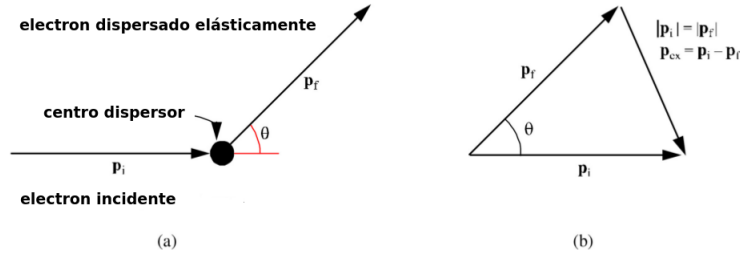


Figura 4.2: (a): Bosquejo conceptual en el espacio que muestra un electrón con impulso inicial  $p_i$  incidente en un centro de dispersor y, posteriormente, se dispersa elásticamente por un ángulo  $\theta$  en un estado final con momento  $p_f$ . (b): Ilustración de espacio-momento de un electrón involucrado en una colisión elástica en la cual el momento es intercambiado

## Deducción 2

Sea  $\bar{p}(t)$  el momento promedio de los electrones en un medio homogéneo. Vamos a calcular el momento a primer orden en un tiempo  $t + dt$  en presencia de un campo eléctrico  $\bar{E}$ . Teniendo en cuenta que la probabilidad de un la colisión con un ion es  $dt/\tau$  y la probabilidad de no colisión es  $(1 - dt/\tau)$ , donde el promedio del tiempo entre colisiones experimentado por un electrón es  $\tau$ .

Si no hay colisión, entonces en el tiempo  $dt$  el electrón gana un momento  $-e\bar{E}dt$  del campo eléctrico. A primer orden, el momento en el tiempo  $t + dt$  es

$$\begin{aligned} \bar{p}(t + dt) &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left(\bar{p}(t) - e\bar{E}dt + O(dt^2)\right) \\ &= \bar{p}(t) - \frac{dt}{\tau}\bar{p}(t) - e\bar{E}dt + O(dt^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

La contribución de los electrones que tuvieron una colisión es de segundo orden y, por lo tanto, se desprecia en este análisis. Esto se debe a que la fracción de electrones que sufren una colisión es  $dt/\tau$  y cuando se multiplica por el impulso ganado, eso es como máximo  $-e\bar{E}dt$ , reordenando la ecuación 4.7 resulta

$$\frac{\bar{p}(t + dt) - \bar{p}(t)}{dt} = -\frac{\bar{p}(t)}{\tau} - e\bar{E}, \quad (4.8)$$

donde finalmente tomamos el límite cuando  $dt \rightarrow 0$ ,

$$\frac{d}{dt}\bar{p}(t) = -\frac{\bar{p}(t)}{\tau} - e\bar{E}(t). \quad (4.9)$$

Como nos interesa el caso estacionario, por tratarse de un campo estático en el tiempo, podemos igualar la ecuación 4.9 a cero, lo que resulta

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} \equiv \mu\vec{E}. \quad (4.10)$$

Finalmente consideramos que como los electrones no interactúan entre sí, se mueven libremente de forma que la densidad de corriente debe seguir la relación 3.4,  $\vec{J} = \rho(x)\vec{v}$ . Y de la ecuación 4.6 ó 4.10 sustituida en 3.4 resulta,

$$\boxed{\vec{J} = \mu\rho(x)\vec{E} = \sigma\vec{E}.} \quad (4.11)$$

Esta ecuación se le conoce como ley de Ohm, donde  $\sigma$  es llamada la conductividad eléctrica medida en Siemens <sup>1</sup> y es una constante característica de cada conductor. El inverso multiplicativo de la conductividad es la resistividad medida en ohms. Una consecuencia importante de la ley de Ohm es el hecho de que la densidad de corriente independiente del tiempo en un conductor es uniforme. Esto se deduce de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$  de la conservación de carga en el caso estacionario y de  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{\sigma}\vec{\nabla} \times \vec{J} = \vec{0}$ , de aquí se deduce que  $\vec{J}$  debe ser uniforme por el teorema de Helmholtz.

Considérese un conductor de sección transversal  $A$  y longitud  $L$ , en donde se aplica un potencial constante  $V$  en uno de los extremos y en el otro el potencial se mantiene a tierra ( $V(0) = 0$  y  $V(L) = V$ ). De la ecuación de continuidad y la ley de Ohm se deduce que no hay carga libre en el conductor ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ) y se debe cumplir  $\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$ , donde  $x$  es la coordenada de extensión del conductor. De aquí deducimos que  $V(x) = \frac{V}{L}x$ , y por ende  $E = \frac{V}{L}$ . Además como la densidad de corriente es uniforme podemos escribirla como  $J = \frac{I}{A}$ . Ahora solo usamos la ley de Ohm para relacionar  $I$  y  $V$ , lo que resulta,

$$\frac{I}{A} = \sigma \frac{V}{L}, \quad (4.12)$$

$$\boxed{\Rightarrow V = \frac{L}{A\sigma}I \equiv RI.} \quad (4.13)$$

Esta última ecuación también se conoce como ley de Ohm, aunque como ya lo advirtió el lector esta ecuación no es la ley de Ohm en general, en esta expresión  $R = \frac{L}{A\sigma}$  es llamada la resistencia eléctrica.

---

<sup>1</sup>Para un dispositivo con una conductancia de un Siemens, la corriente eléctrica a través del dispositivo se incrementará en un amperio por cada aumento de un voltio de la diferencia de potencial eléctrico a través del dispositivo.

## 4.1. Leyes de Kirchhoff

En 1845 Kirchhoff enunció las leyes que describen el comportamiento de las corrientes y las diferencias de potencial a lo largo de un circuito. Para describir estas leyes daremos unas definiciones de apoyo:

Una **rama** de un circuito, consiste en una línea de circuito sobre la que está colocado un elemento.

Un **nodo** es un punto de la red al cual están conectadas una o más ramas del circuito.

Un **lazo** es un conjunto de elementos de red que forman un camino cerrado, de tal manera que los nodos que aparecen en el camino están incluidos una sola vez. No todos los nodos tienen que estar incluidos, pero ninguno puede estar repetido.

Una **mall**a es un lazo dentro del cual no hay ningún otro elemento de circuito. El número de mallas de un circuito siempre es menor al número de lazos.

### 4.1.1. Ley de las corrientes

Según lo expresado por la **ley de la conservación de la carga** ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ ), en todo momento, la carga de un punto del circuito debe permanecer constante, es decir que no se debe acumular carga en ninguno de los nodos. Toda la carga que ingresa debe salir por algún camino.

De aquí se deduce la ley de Kirchhoff de las corrientes: **la suma algebraica de las corrientes de rama en cualquier nodo, debe ser cero, en cualquier instante de tiempo.**

$$\boxed{\sum I(t) = 0} \quad (4.14)$$

En general, se aceptan como positivas las corrientes que ingresan al nodo, y negativas las que salen.

Otra forma de enunciar la misma ley será: la suma de las corrientes que ingresan a un nodo, debe ser igual a la suma de las corrientes que egresan de él.

En la figura 4.3, la ecuación para el nodo 1 será:  $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = i$ .

Es importante recalcar que esta ley debe cumplirse en todo momento, sin tener en cuenta si la corriente es constante o varía en el tiempo.

### 4.1.2. Ley de las diferencias de potencial

La **ley de la conservación de la energía** nos indica que toda carga que recorre un circuito, al volver al punto original debe tener la misma energía que tenía anteriormente en ese punto. otra forma de decir esto es que en el caso estático el campo eléctrico es conservativo.

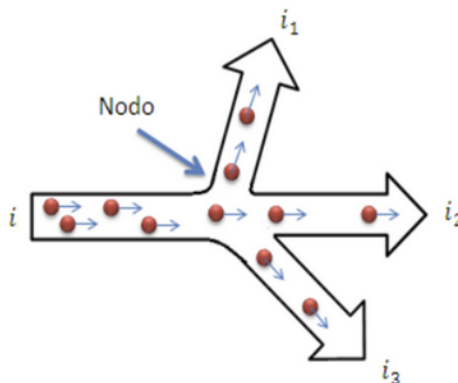


Figura 4.3: Nodo de corriente.

De aquí se deduce la ley de Kirchoff para las diferencias de potencial: **La suma algebraica de las diferencias de potencial en las ramas, a lo largo de cualquier lazo, debe ser cero.**

$$\boxed{\sum V(t) = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0} \quad (4.15)$$

Los sentidos de referencia que se apliquen a las diferencias de potencial deben ser los mismos que se asociaron a las corrientes asignadas a los nodos.

La ley nos dice que a lo largo de cualquier lazo, la suma de las subidas de potencial debe ser igual a la suma de las caídas de potencial.

Como se dijo anteriormente, se consideran positivas las caídas de potencial, y negativas las elevaciones de potencial. Al hablar de elevaciones o caídas de potencial, siempre se debe tomar el potencial de algún nodo como el potencial de referencia para nuestro circuito. A este valor de referencia se lo denomina **tierra**.

### 4.1.3. Conexiones

#### Conexión Serie

Dos elementos de un circuito están conectados en serie, ver figura 4.4, cuando tienen únicamente un nodo común, al que no llega ningún otro elemento del circuito.

Teniendo en cuenta la ecuación (4.14), la corriente  $i_1$  debe ser igual a la corriente  $i_2$ . Por lo que si tenemos dispositivos ohmicos la resistencia total será la suma de las resistencias.

### Conexión Paralelo

Dos elementos están conectados en paralelo, ver figura 4.4 cuando tienen sus dos nodos en común.

De esta manera, dado que el potencial en el nodo  $A$  y el potencial en el nodo  $B$  son iguales para los dos elementos, también lo será la diferencia de potencial  $v_{AB}$ . Por lo cual, la diferencia de potencial  $v_1$  debe ser igual a la diferencia de potencial  $v_2$ . Para dispositivos ohmicos esto implica que  $i_1 R_1 = i_2 R_2 = v$  y por ley de nodos  $i = i_1 + i_2$ . De esto se puede deducir que  $\frac{i}{v} = \frac{i_1 + i_2}{v} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \equiv R_1 \parallel R_2$

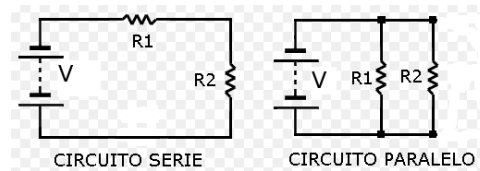


Figura 4.4: Circuitos ohmicos en serie y paralelo.

#### 4.1.4. Puente de Wheatstone

En la técnica de medidas eléctricas se presenta a menudo el problema de la medida de resistencias. Para estas medidas existen diversos métodos, entre los que se puede elegir el más adecuado en función de la magnitud de la resistencia a determinar. Según sus valores las resistencias se pueden clasificar en bajas (inferiores a  $1 \Omega$ ), medias (entre  $1 \Omega$  y  $1 M\Omega$ ) y grandes (superiores a  $1 M\Omega$ ). El puente de Wheatstone es el primer tipo de puente de medida que se utilizó y es también el de uso más frecuente. Es un puente de corriente continua que se utiliza para medir resistencias de valor medio y que fue ideado por S. H. Christie el año 1833 e introducido por C. Wheatstone en 1843. El esquema de conexión se puede ver en la figura 4.5

Siguiendo las leyes de Kirchhoff, tomando las dos mallas izquierda y derecha del circuito que se debe satisfacer las ecuaciones:

$$R_1 I_1 - R_4 I_2 = 0, \quad R_2 I_1 - R_3 I_2 = 0. \quad (4.16)$$

Este sistema lineal de ecuaciones no puede tener como solución física  $I_1 = I_2 = 0$ , por ende para que el sistema no tenga solución trivial el determinante debe ser cero. Lo cual implica la siguiente relación entre resistencias:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4. \quad (4.17)$$

Así, esta relación permite determinar el valor de una de las resistencias, dados los valores de las otras.

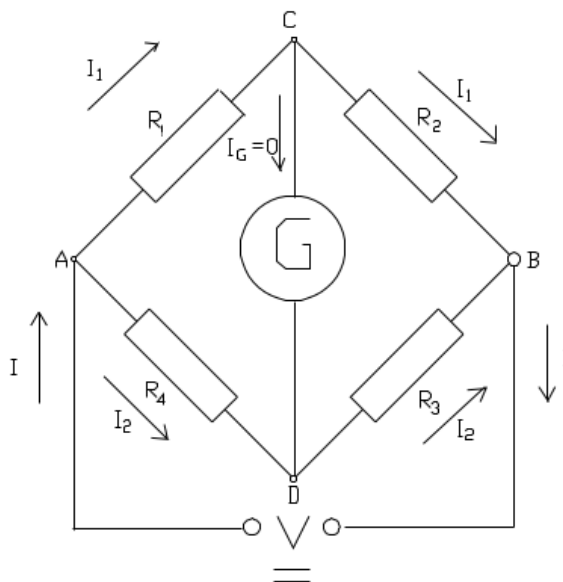


Figura 4.5: Esquema de un puente de Wheatstone equilibrado. En esta situación, el galvanómetro indica el paso de una corriente nula.

## 4.2. Métodos de análisis

En un circuito con sólo fuentes y resistencias, la combinación de la característica voltaje-corriente de todos los elementos junto con las leyes de Kirchhoff, da paso a un sistema de ecuaciones lineales.<sup>2</sup> Los siguientes son los dos métodos usados comúnmente para encontrar estas ecuaciones.

El Método de Corrientes de Malla (MCM) aplica la LVK en cada malla del circuito. Para cada malla se define una corriente que completa un lazo cerrado. Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente definir todas las corrientes de malla en el sentido de las agujas del reloj. Cuando una rama del circuito es compartida por dos mallas, la corriente a través de esa rama es la suma considerando el signo de las corrientes de malla respectivas. Una vez que se definen las corrientes, se aplica la LVK para cada rama, obteniéndose un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, donde  $n$  es el número de mallas en el circuito.

Método de corriente de malla Para el circuito que sigue y usando MCM, encontrar las ecuaciones necesarias para encontrar todas las corrientes de malla.

<sup>2</sup>Este método se puede generalizar cuando aparecen otros componentes como inductores, capacitores, etc.



Aplicando LVK y ley de Ohm en cada malla se obtiene

$$\begin{aligned}v_A - v_{R1} - v_{R2} = 0 &\Rightarrow v_A - R_1 i_1 - R_2(i_1 - i_2) = 0 \\v_{R2} - v_{R3} - v_B = 0 &\Rightarrow R_2(i_1 - i_2) - R_3 i_2 - v_B = 0.\end{aligned}$$

El Método de Voltaje de Nodos (MVN) aplica la LCK en los nodos del circuito. En forma arbitraria se define uno de los nodos del circuito como nodo de referencia. Luego, para cada uno de los nodos restantes se define un voltaje entre el nodo y el nodo de referencia. Usando estos voltajes, se aplica la LCK en cada nodo, obteniéndose un sistema de  $n - 1$  ecuaciones lineales, donde  $n$  es el número de nodos en el circuito.

Método de voltaje de nodo Para el circuito que sigue y usando MVN, encontrar las ecuaciones necesarias para encontrar todos los voltajes de nodo.

Aplicando LCK y ley de Ohm en cada nodo, y LVK en los casos particulares de  $v_1$  y  $v_4$  se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{v_2 - v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} + \frac{v_2 - v_3}{R_3} &= 0 \\ \frac{v_3 - v_2}{R_3} + \frac{v_3}{R_4} + \frac{v_3 - v_4}{R_5} &= 0 \\ v_1 &= V_A \\ v_4 &= V_B.\end{aligned}$$

#### 4.2.1. Equivalente Thévenin

El **equivalente Thévenin** permite representar una red de múltiples elementos por tan sólo una fuente de voltaje en serie con una resistencia. Dado un circuito, esta red equivalente se encuentra realizando los siguientes pasos. Primero se definen dos subredes  $A$  y  $B$ , tal que estas subredes están conectadas a través de un par de terminales. Defina el voltaje de terminales abiertos  $v_{th}$  como el voltaje que aparecería entre estos dos terminales de la red  $A$  si la red  $B$  se desconectara. Luego “apague” todas las fuentes independientes—es decir, reemplace todas las fuentes independientes de voltaje por un cortocircuito, y todas las fuentes independientes de corriente por un circuito abierto—y calcule la resistencia equivalente entre los dos terminales de la red  $A$  bajo estas condiciones. Llame a esta resistencia equivalente  $R_{th}$ . La red Thévenin equivalente está dada por una fuente de voltaje de valor  $V_{th}$  en serie con una resistencia de valor  $R_{th}$ .

Equivalente Thévenin Encuentre el equivalente Thévenin de la red conectada a la izquierda de los terminales  $T_1$  y  $T_2$ .

Si se desconecta  $R_2$ , el voltaje entre los terminales  $T_1$  y  $T_2$  está dado por el divisor de voltaje

$$v_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_A.$$

Al apagar la fuente de voltaje  $V_A$ , la resistencia equivalente de la red conectada a la izquierda de los terminales está dada por la conexión en paralelo de  $R_1$  y  $R_2$ :

$$R_{th} = R_1 \parallel R_2.$$

### 4.3. Ley de inducción de Faraday

Faraday<sup>3</sup> encontró experimentalmente (1831) que **si el flujo magnético a través de una espira cerrada varía en el tiempo, se induce una corriente sobre una espira**. Si el flujo es constante, se observa que la corriente desaparece. La **ley de Faraday** se escribe como

$$\varepsilon_{\text{ind}} = -K \frac{d\phi}{dt}, \quad (4.18)$$

donde  $\varepsilon_{\text{ind}}$  es la fuerza electromotriz (f.e.m.) *inducida* en la espira. El signo menos describe la dirección de la corriente inducida, dada por la **ley de Lenz**. Aquí  $K$  es una constante que depende del sistema de unidades usado. En el Sistema Internacional es una cantidad adimensional, que determinaremos más adelante.

En términos de campos, se genera un campo eléctrico  $\vec{E}$  que es el que hace mover las cargas en la espira, es decir,

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon_{\text{ind}}. \quad (4.19)$$

Con esto, podemos escribir (4.18) como

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -K \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.20)$$

En general, la superficie puede variar en el tiempo. Si éste *no* es el caso, y  $S$  es constante, entonces podemos deducir que

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -K \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (4.21)$$

Considere ahora el caso en que la espira se mueve *rígidamente*, es decir, que la velocidad de los puntos de la espira es independiente de la posición (puede, sin embargo, depender del tiempo). Entonces el cambio del flujo por

---

<sup>3</sup>Michael Faraday (1791-1867): físico y químico británico.

la superficie, entre los tiempos  $t$  y  $t + dt$ , puede calcularse como sigue:

$$d\Phi = \Phi(t + dt) - \Phi(t) \quad (4.22)$$

$$= \int_{S(t+dt)} B_i(\vec{x} + \vec{v}dt, t + dt) dS_i - \int_{S(t)} B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (4.23)$$

$$= \int_{S(t+dt)} [B_i(\vec{x}, t) + dt v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + dt \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i - \int_{S(t)} B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (4.24)$$

$$= \int_S [B_i(\vec{x}, t) + dt v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + dt \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i - \int_S B_i(\vec{x}, t) dS_i \quad (4.25)$$

$$= dt \int_S [v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i. \quad (4.26)$$

En la penúltima igualdad usamos el hecho que el elemento de superficie  $dS_i$  sobre la superficie  $S(t)$  y  $S(t + dt)$  son iguales, ya que la superficie se mueve rígidamente (es decir, con igual velocidad en cada punto). Así obtenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S [v_j \partial_j B_i(\vec{x}, t) + \partial_t B_i(\vec{x}, t)] dS_i. \quad (4.27)$$

Usamos ahora la identidad (asumiendo que la velocidad es un vector constante)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \quad (4.28)$$

y la ley ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ) (que suponemos válida incluso en el caso dinámico) para reescribir (4.27) como<sup>4</sup>

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S [\partial_t B_i + \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{klm} B_l v_k)] dS_i \quad (4.30)$$

$$= \int_S \partial_t B_i dS_i + \oint_{\partial S} \varepsilon_{ijk} B_j v_k dx_i \quad (4.31)$$

o, en notación vectorial,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}. \quad (4.32)$$

Apliquemos estos resultados para comparar la descripción, respecto a dos sistemas de referencia inerciales (SRI's), del fenómeno de inducción de corriente en una espira debido a la variación de flujo magnético. Primero, en

<sup>4</sup>Vamos a usar indefinidamente para ahorrar notación el tensor de Levi-Chivita (ver capítulo 1), el cual se define como  $\varepsilon_{ijk} = 1$  si  $(ijk)$  es una permutación par y  $-1$  si  $(ijk)$  es una permutación impar en otros casos el tensor es cero. Esto permite escribir  $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i$ . Y el rotacional como  $\vec{\nabla} \times (\vec{Z}) = \varepsilon_{ijk} \partial_j (z_k) \hat{e}_i$ . Algunas propiedades básicas son las siguientes:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m, \quad \varepsilon_{jmn} \varepsilon^{imn} = 2\delta_j^i, \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 6. \quad (4.29)$$

el SRI  $K$  en el que la espira está en reposo y el magneto se mueve tenemos que en cada punto del espacio el campo magnético  $\vec{B}$  dependerá del tiempo, por lo que se inducirá un campo eléctrico de acuerdo a (4.21). Este campo eléctrico ejercerá una fuerza  $\vec{F}_q = q\vec{E}$  sobre una carga  $q$  en la espira, que consideraremos inicialmente en reposo.

Por otro lado, en un SRI  $K'$  con velocidad relativa  $\vec{v}$  respecto a  $K$  (de modo que en  $K'$  el magneto está en reposo) la corriente inducida es debido al movimiento de la espira. Si en este SRI el campo magnético es  $\vec{B}'(x)$ , no existe campo eléctrico inducido puesto que  $\partial\vec{B}'/\partial t = \vec{0}$ . En este SRI la corriente inducida se describe íntegramente debido a la fuerza de Lorentz ejercida por el campo magnético sobre las cargas en la espira, que ahora se mueven con velocidad  $-\vec{v}$ . La fuerza que actúa sobre la carga es ahora  $\vec{F}'_q = -q\vec{v} \times \vec{B}'$ . Además, la f.e.m. está dada, usando el resultado (4.32) aplicado a este caso, así como la ley de Faraday (4.21), por

$$\varepsilon'_{\text{ind}} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (4.33)$$

Ya que  $K$  y  $K'$  son SRI's, la aceleración, y por tanto la fuerza que actúa sobre la carga (inicialmente en reposo en  $K$ ), son necesariamente iguales. De lo anterior, es decir  $\vec{F}_q = \vec{F}'_q$ , vemos que esto sólo es posible si el campo inducido es dado por

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}'. \quad (4.34)$$

Además, la f.e.m. debe ser la misma, ya que la corriente inducida lo es, por lo que

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \varepsilon'_{\text{ind}}, \quad (4.35)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (4.36)$$

Usando ahora (4.34) en el lado izquierdo obtenemos

$$- \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell} = -K \oint_{\partial S} (\vec{v} \times \vec{B}') \cdot d\vec{\ell}. \quad (4.37)$$

Esta relación implica que la constante  $K$  debe tener, en el Sistema Internacional de Unidades, el valor  $K = 1$ .

De esta forma, la ley de Faraday adopta la forma

$$\boxed{\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}} \quad (4.38)$$

o, en forma diferencial:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}. \quad (4.39)$$

### Acoplamiento mínimo

Otra forma de deducir la ley de Faraday, es por medio de extender el acoplamiento mínimo por medio del potencial vectorial  $A(\vec{x}, t)$  que ahora dependerá también del tiempo. De esta forma tenemos que para un sistema electromagnético la fuerza debe ser,

$$\vec{F} = \frac{d(\vec{p} + q\vec{A}(\vec{x}, t))}{dt} = -\vec{\nabla}\phi_m - q\vec{\nabla}\phi_e, \quad (4.40)$$

desarrollando la derivada  $\frac{d\vec{A}(\vec{x}, t)}{dt}$ , y usando las mismas identidades que en la ecuación 3.17, se llega

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} - q\vec{\nabla}\phi_e - q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = q\vec{v} \times \vec{B} + q\vec{E}. \quad (4.41)$$

Así podemos identificar que ahora el campo eléctrico tiene la forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_e - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad (4.42)$$

lo cual implica que al sacar el rotacional de este campo ya no es cero, sino que resulta:  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ . Donde en el último paso hemos supuesto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . De esta manera vemos que el acoplamiento mínimo sigue siendo consistente con la electrodinámica de los campos eléctricos y magnéticos.

#### 4.3.1. Energía del campo magnético

Consideremos ahora una espira por la que circula una corriente  $I$  y el campo magnético que ella misma produce. Si  $I$  no varía en el tiempo, no existe fem inducida ya que el flujo magnético por la espira permanece constante (suponemos una espira fija, en reposo). Calcularemos la energía necesaria para cambiar la corriente  $I$  y el correspondiente campo magnético  $\vec{B}$  en una pequeña cantidad. Durante el intervalo de tiempo  $dt$  en que la corriente cambia en  $dI$  y el campo magnético en  $d\vec{B}$ , se genera un campo eléctrico inducido y su correspondiente fem  $\varepsilon$  (que en general se superponen al campo y fem que mantenían la corriente  $I$  fluyendo originalmente). Este campo inducido intenta reducir el cambio de la corriente. Para esto, el campo realiza trabajo sobre las cargas en movimiento en la espira.

Dividiremos la curva en elementos de longitud  $d\vec{\ell} = dl\hat{t}$ , en los que existe una carga  $dq = \lambda dl$ . El vector unitario  $\hat{t}$  está definido de modo que  $d\vec{\ell}$  tiene la orientación estándar respecto al vector normal  $\hat{n}$  a la superficie que encierra la espira. El campo eléctrico  $\vec{E}$  ejerce trabajo sobre las cargas  $dq$ . En un

intervalo de tiempo  $dt$  el trabajo realizado sobre las cargas  $dq$  es entonces

$$dq \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = (\lambda d\ell) \vec{E} \cdot (\vec{v} dt) \quad (4.43)$$

$$= (\lambda d\ell) \vec{E} \cdot (v \hat{t}) dt \quad (4.44)$$

$$= (\lambda v) \vec{E} \cdot (d\ell \hat{t}) dt \quad (4.45)$$

$$= I(\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) dt. \quad (4.46)$$

Aquí hemos identificado la corriente  $I = \lambda v$  sobre la espira, y tomado en cuenta que  $\vec{v} = v\hat{t}$ . Por lo tanto, el trabajo total realizado por el campo sobre las cargas de la espira, en el intervalo de tiempo  $dt$ , es dado por

$$dW = \oint_C dq \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.47)$$

$$= I \oint_C (\vec{E} \cdot d\vec{\ell}) dt \quad (4.48)$$

$$= I \varepsilon dt \quad (4.49)$$

$$= -I \frac{d\Phi}{dt} dt \quad (4.50)$$

$$= -I d\Phi. \quad (4.51)$$

A partir de este resultado vemos que la energía (proveniente de fuentes externas) necesaria para cambiar el flujo magnético en una cantidad  $d\Phi$ , en un sistema con una corriente  $I$  es dada por

$$\boxed{dU = I d\Phi.} \quad (4.52)$$

En otras palabras, **un cambio en el valor de la intensidad de campo  $\vec{B}$  requiere invertir energía**. En cierto sentido, la ley de Faraday establece una cierta “inercia” en el campo magnético, ya que un sistema de cargas y campos tiende a “resistirse” al cambio del valor del campo (y su flujo). Esto implica además que **es necesario asociar una energía a una cierta configuración de campos y corrientes**, puesto que es necesario invertir energía para establecer estas corrientes y sus campos asociados. Para evaluar esta energía, reescribiremos (4.52) y usaremos el teorema de Stokes para  $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$ : la energía  $\delta U$  necesaria para variar el potencial vectorial  $\vec{A}(x)$  de un sistema de corrientes y campo magnético en  $\delta \vec{A}(x)$  es dada por

$$\delta U = I \oint_C \delta \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \quad (4.53)$$

$$= \oint_C \delta \vec{A} \cdot I d\vec{\ell} \quad (4.54)$$

$$= \int_V \delta \vec{A} \cdot \vec{J}_{\text{ext}} dV. \quad (4.55)$$

En el último paso hemos usado la relación  $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  para reescribir la energía en términos de una integral de volumen de la densidad de corriente. Note que la corriente inducida es en general corriente “externa” o de “conducción”, por lo que hemos explicitado en el último término la densidad de corrientes externas  $\vec{J}_{\text{ext}}$ . Además, usando la ley de Ampère para la excitación magnética (3.74), podemos escribir

$$\delta U = \int_{V'} \delta A_i \varepsilon_{ijk} (\partial_j H_k) dV \quad (4.56)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \int_{V'} [\partial_j (H_k \delta A_i) - H_k (\partial_j \delta A_i)] dV \quad (4.57)$$

$$= \varepsilon_{ijk} \oint_{\partial V'} H_k \delta A_i dS_j - \varepsilon_{ijk} \int_{V'} H_k (\partial_j \delta A_i) dV \quad (4.58)$$

$$= 0 + \int_{V'} H_k \varepsilon_{kji} (\partial_j \delta A_i) dV \quad (4.59)$$

$$= \int_{V'} H_k \delta B_k dV. \quad (4.60)$$

Aquí hemos extendido el dominio de integración a un volumen  $V' \rightarrow R_3$ , es decir, a todo el espacio, usado el teorema de Gauss y considerado que la integral de superficie se anula en el infinito. Con esto, obtenemos la siguiente expresión para la *energía requerida para cambiar la inducción magnética de un sistema en  $\delta \vec{B}(x)$* :

$$\boxed{\delta U = \int_{R^3} \vec{H}(x) \cdot \delta \vec{B}(x) dV.} \quad (4.61)$$

Note la similitud entre las expresiones (4.55) y (4.61) con los resultados (2.254) y (2.256) para la energía almacenada por un campo eléctrico, respectivamente.

Similarmente a lo discutido en el caso eléctrico, la **energía total requerida para aumentar el campo magnético de un sistema desde cero hasta un valor final  $\vec{B}$**  es

$$U = \int_0^1 \int_{R^3} \lambda \vec{H}(x) \cdot \delta \vec{B}_\lambda(x) dV d\lambda, \quad (4.62)$$

donde  $\vec{B}_\lambda(x)$  es el valor de la inducción magnética correspondiente al caso en que la excitación magnética tiene un valor  $\vec{H}_\lambda(x)$  igual a una fracción  $\lambda$  de la excitación magnética final, es decir,  $\vec{H}_\lambda(x) = \lambda \vec{H}(x)$ .

En el caso de un **medio magnético lineal**, tendremos que  $\vec{B}_\lambda(x) = \lambda \vec{B}(x)$  y por lo tanto  $\delta \vec{B}_\lambda(x) = d\lambda \vec{B}(x)$ , y entonces

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{H}(x) \cdot \vec{B}(x) dV} \quad (4.63)$$

o, alternativamente,

$$U = \frac{1}{2} \int_{R^3} \vec{A} \cdot \vec{J} dV. \quad (4.64)$$

Usando (4.63) podemos escribir la energía almacenada en un sistema de campo magnético (y corrientes) como la integral de una **densidad de energía magnética**

$$U = \int_{R^3} u_B(x) dV, \quad u_B(x) = \frac{1}{2} \vec{H}(x) \cdot \vec{B}(x). \quad (4.65)$$

En el caso particular de medio lineales e isótropos la densidad de energía magnética se reduce a

$$u_B(x) = \frac{\mu}{2} \vec{H}^2(x) = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2(x). \quad (4.66)$$

#### 4.4. Circuitos de corriente alterna

Las señales de corriente alterna se caracterizan por ser señales dependientes en el tiempo. Esto nos permite añadir la ley de Faraday al análisis de circuitos, ya que si tenemos una corriente que depende del tiempo entonces existirá un flujo magnético sobre un elemento del circuito de tal modo que este flujo exija una energía magnética dada y por ende contribuya a la caída del potencial del circuito.

A este fenómeno se le conoce como auto inductancia de un circuito y esta determinado por la ley de Faraday:

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dI} \frac{dI}{dt} \equiv -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.67)$$

Al término  $L$  se le conoce como la inductancia del circuito y depende de la geometría de este y de sus propiedades constitutivas.

##### 4.4.1. Circuito RL

Si se conecta una resistencia en serie con un inductor cargado, se obtiene un circuito RL de primer orden, como el ilustrado en la Figura 4.6. En este caso, para poder encontrar la ecuación diferencial del circuito (sin fuentes), se utiliza la Ley de las tensiones de Kirchhoff, dada por la ecuación (4.15), la Ley de Ohm, dada por la ecuación (4.12), y la ecuación (4.67) de la tensión en el inductor.



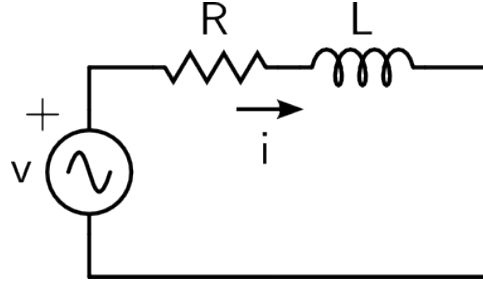


Figura 4.6: Esquema de un circuito RL.

$$v_R(t) + v_L(t) = 0 \quad (4.68)$$

$$v_R(t) = -v_L(t) \quad (4.69)$$

$$i(t)R = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.70)$$

De modo que se obtiene la ecuación diferencial (4.71), muy similar a la ecuación (4.99) estudiada anteriormente.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0 \quad (4.71)$$

En este caso, se utilizará otro método posible para resolver la ecuación diferencial. Se trata de la técnica de proponer una solución posible, de acuerdo a la forma de la ecuación.

Se propone una solución de la forma  $i(t) = Ae^{st}$ , de modo que la derivada de la función será  $\frac{di(t)}{dt} = Ase^{st}$ . Reemplazando en la ecuación (4.71) se obtiene el polinomio característico de la función, dado por la ecuación (4.73).

$$Ase^{st} + \frac{R}{L}Ae^{st} = 0 \quad (4.72)$$

$$Ae^{st} \left( s + \frac{R}{L} \right) = 0 \quad (4.73)$$

La igualdad debe cumplirse para cualquier valor de  $t$ , de modo que no tiene sentido que  $Ae^{st} = 0$  y obligatoriamente  $s + \frac{R}{L} = 0$ , de donde se obtiene que  $s = -\frac{R}{L}$ .

Además, resulta evidente que  $s = \frac{1}{\tau}$ , de modo que en este caso el coeficiente  $\tau$  del circuito es  $\tau = \frac{L}{R}$ . Finalmente la solución será la expresada en la ecuación (??).

$$i(t) = \left( I_0 e^{-t \frac{R}{L}} \right) u(t) \quad (4.74)$$

A medida que la resistencia aumenta, el decrecimiento de la corriente se hace más lento, de modo que su comportamiento se aproxima al de una fuente de corriente.

Si consideramos un circuito de corriente directa a potencial constante  $v_0$  que se conecta a un circuito con una inductancia  $L$  y una resistencia  $R$ , aplicando las leyes de Kirchhoff se obtiene la siguiente ecuación,

$$L \frac{dI}{dt} + IR = V_0, \quad I(0) = 0 \quad (4.75)$$

cuya solución es  $I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-tR/L})$ . Esto demuestra que un inductor se comporta como una resistencia que depende del tiempo, la cual es infinita en  $t = 0$  y tiene el valor asintótico a  $R$ .

#### 4.4.2. Circuito RLC serie sin fuentes

Recorriendo la malla del circuito planteado por la Figura 4.7, es posible obtener la ecuación (4.76), que es la ecuación **integro-diferencial** que caracteriza a la corriente del circuito.

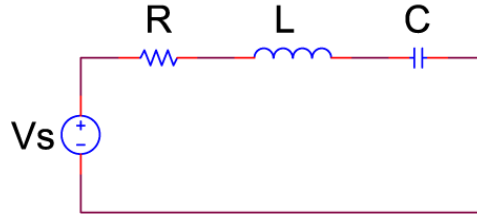


Figura 4.7: Esquema de un circuito RLC.

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v_C(0^-) + Ri(t) \quad (4.76)$$

Para poder resolver esta ecuación, se derivan ambos miembros, de manera que se obtiene una ecuación diferencial ordinaria, lineal, de coeficientes constantes y de segundo orden.

$$v(t) = L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}q(t) + R \frac{dq(t)}{dt} \quad (4.77)$$

#### 4.4.3. Respuesta a las condiciones iniciales

Si no hay excitación de fuentes ( $v(t) = 0$ ) la ecuación diferencial (4.77) pasa a ser la ecuación homogénea (4.78).

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC}q(t) = 0 \quad (4.78)$$

Para resolver esta ecuación, se propone una solución de la forma  $q(t) = Ke^{st}$ , de modo que la derivada será  $\frac{dq(t)}{dt} = Kse^{st}$  y la segunda derivada será  $\frac{d^2q(t)}{dt^2} = Ks^2e^{st}$ .

Reemplazando estos valores en la ecuación homogénea, se obtiene la ecuación (4.79), a partir de la cual se puede obtener el **polinomio característico** de la función, dado por la ecuación (4.80).

$$s^2Ke^{st} + \frac{R}{L}sKe^{st} + \frac{1}{LC}Ke^{st} = 0 \quad (4.79)$$

$$Ke^{st} \left( s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (4.80)$$

El polinomio característico tiene que anularse para cualquier valor de  $t$ . Es necesario, entonces, encontrar las raíces del polinomio.

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (4.81)$$

La solución del circuito dependerá de los valores que tomen  $R$ ,  $L$  y  $C$ . Las diferentes combinaciones de valores dentro del discriminante determinan tres posibles casos, que se estudian a continuación.

**[Caso 1] Raíces reales:**  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$

Cuando el valor del discriminante es positivo, se obtienen dos raíces reales y negativas. De modo que la solución será de la forma  $q(t) = Ae^{s_1t} + Be^{s_2t}$ . Son dos exponenciales negativas, tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales para  $q(t)$  y  $\frac{dq(t)}{dt}$ , se pueden obtener los valores para  $A$  y  $B$ .

$$i(0) = A + B \quad (4.82)$$

$$\frac{dq(t)}{dt}(0) = As_1 + Bs_2 \quad (4.83)$$

**[Caso 2] Raíz doble:**  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

Cuando el discriminante es nulo, se obtiene una raíz doble y negativa, de valor  $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L}$ . En esta situación, una solución de la forma  $q(t) = Ae^{s_1t} + Bte^{s_1t}$  satisface la ecuación diferencial.

Del mismo modo que en el caso anterior, será necesario conocer los valores de las condiciones iniciales para la función y su derivada para encontrar los valores de  $A$  y  $B$ .

$$i(0) = A \quad (4.84)$$

$$\frac{dq(t)}{dt}(0) = As_1 + B \quad (4.85)$$

[Caso 3] Raíces complejas:  $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$

Cuando el valor del discriminante es negativo, las raíces obtenidas son complejas conjugadas. La parte real de las raíces será negativa.

Se define  $\sigma = \frac{R}{2L}$  y  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ . De forma que se puede escribir la ecuación (4.81) como la ecuación (4.86).

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - \omega_0^2} \quad (4.86)$$

Se define  $\omega_d^2 = \sigma^2 - \omega_0^2$ , con lo que se tiene que las raíces conjugadas son  $s_1 = -\sigma + j\omega_d$  y  $s_2 = -\sigma - j\omega_d$ .

Si se propone una solución de la forma  $q(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$ , se puede operar con los coeficiente definidos.

$$q(t) = Ae^{(-\sigma + j\omega_d)t} + Be^{(-\sigma - j\omega_d)t} \quad (4.87)$$

$$q(t) = e^{-\sigma t} (Ae^{j\omega_d t} + Be^{-j\omega_d t}) \quad (4.88)$$

El valor de la corriente no puede ser complejo, de modo que los coeficientes  $A$  y  $B$  deben ser números complejos conjugados que permitan que una vez realizada la operación  $q(t) \in \Re$ . Se define, entonces,  $A = K_R + jK_i$  y  $B = K_R - jK_i$ .

$$q(t) = e^{-\sigma t} ((K_R + jK_i)e^{j\omega_d t} + (K_R - jK_i)e^{-j\omega_d t}) \quad (4.89)$$

$$q(t) = e^{-\sigma t} (K_R(e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}) + jK_i(e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t})) \quad (4.90)$$

$$q(t) = e^{-\sigma t} (K_R 2 \cos(\omega_d t) + K_i 2 \sin(\omega_d t)) \quad (4.91)$$

$$q(t) = e^{-\sigma t} (K_1 \cos(\omega_d t) + K_2 \sin(\omega_d t)) \quad (4.92)$$

Se trata de una función exponencial que modula la suma de dos funciones sinusoidales. Siempre que se trate de un caso de raíces conjugadas se puede proponer como una solución de la forma de la ecuación (4.92), o bien una solución de la forma de la ecuación (4.93).

$$q(t) = e^{-\sigma t} A \cos(\omega_d t + \gamma) \quad (4.93)$$

Para pasar de la primera expresión a la segunda, se toma  $\gamma = \arctan \frac{K_2}{K_1}$  y  $A = K_1^2 + K_2^2$ .

Al igual que en los casos anteriores, es posible encontrar los valores para  $K_1$  y  $K_2$  (o  $K_1$  y  $\gamma$  si se prefiere la segunda expresión), utilizando las condiciones iniciales de la función y su derivada.

$$i(0) = K_1 \quad (4.94)$$

$$\frac{di}{dt}(0) = -\sigma K_1 + \omega_d K_2 \quad (4.95)$$

## 4.5. Circuitos con condiciones iniciales no nulas

Se trata de circuitos que no tienen fuentes interiores (con excitación nula) excitados únicamente por las condiciones iniciales de los elementos.

Estos circuitos tendrán ecuaciones diferenciales homogéneas.

### 4.5.1. Circuito RC

Si se conecta una resistencia en paralelo con un capacitor cargado, se obtiene un circuito RC. En este caso, utilizando la Ley de Kirchhoff de las corrientes, dada por la ecuación (4.14), la Ley de Ohm, y la ecuación de la corriente del capacitor, se puede llegar a la ecuación diferencial que caracteriza al circuito.

$$i_R(t) + i_C(t) = 0 \quad (4.96)$$

$$i_R(t) = -i_C(t) \quad (4.97)$$

$$\frac{v(t)}{R} = -C \frac{dv(t)}{dt} \quad (4.98)$$

La ecuación característica de este circuito RC, entonces, estará dada por la ecuación (4.99).

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = 0 \quad (4.99)$$

Una vez obtenida la ecuación diferencial, es necesario encontrar la solución de la ecuación por los métodos estudiados en Análisis Matemático para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

A continuación, se resuelve esta ecuación (4.99) paso a paso.

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{v(t)}{RC} \quad (4.100)$$

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{dt}{RC} \quad (4.101)$$

$$\int \frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{1}{RC} \int dt \quad (4.102)$$

$$\ln v(t) = -\frac{t}{RC} + K \quad (4.103)$$

$$v(t) = e^{-\frac{t}{RC} + K} = e^K e^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.104)$$

$$v(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (4.105)$$

Para poder determinar el valor de la constante  $A$  es necesario utilizar las condiciones iniciales del circuito. Si, por ejemplo, la carga inicial del capacitor es  $V_0$ , se tiene que  $v(0) = Ae^0 = A = V_0$ , de modo que la solución del circuito será la expresada por la ecuación (4.106).

$$v(t) = \left( V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t) \quad (4.106)$$

A medida que la resistencia aumenta, el decrecimiento de la tensión se hace más lento, de modo que el comportamiento del circuito se acerca al de una fuente de tensión.

En este caso,  $RC$  es la constante de tiempo del circuito, usualmente denominada  $\tau$ . Esta constante de tiempo representa el instante para el cual la diferencia de potencial del circuito se reduce un 36,8% del total. Además, se considera que una vez transcurridos  $5\tau$ , el circuito llega a su condición de estabilidad, en este caso  $v(t) = 0$ , toda la energía almacenada en el capacitor se ha perdido en forma de calor.

#### 4.5.2. Generalizaciones

Si el circuito tuviera más de un resistor, el procedimiento para encontrar la función de la tensión o de la corriente sería idéntico. La única diferencia sería que en lugar de utilizar el valor  $R$  de la resistencia, se utilizaría el valor  $R_{eq}$  de la resistencia equivalente del circuito.

Teniendo en cuenta la constante  $\tau$ , toda función cuya ecuación diferencial tenga la forma:  $\frac{df(t)}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = 0$ , tendrá una solución de la forma:  $f(t) = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Siempre que un circuito tenga un solo capacitor o un solo inductor, tendrá el comportamiento de un circuito de primer orden. Si el circuito tiene más de un capacitor o inductor, pero pueden simplificarse mediante el equivalente serie o paralelo, también será un circuito de primer orden.

## 4.6. Circuitos con condiciones iniciales nulas

Se trata de circuitos en los cuales no hay carga en los inductores ni capacitores, sino que están excitados por fuentes.

En estos circuitos la ecuación diferencial de una determinada función no es homogénea. Para poder resolver la ecuación, entonces, será necesario resolver la ecuación homogénea, luego la particular y finalmente sumarlas para obtener la total.

El Cuadro 4.1 indica las soluciones particulares que deben proponerse ante una determinada excitación.

Excitación	Solución Particular
$A$	$K$
$At$	$K_1t + K_2$
$(At + B)$	$K_1t + K_2$
$At^2$	$K_1t^2 + K_2t + K_3$
$A \sin(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$
$A \cos(\omega t)$	$K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$

Cuadro 4.1: Soluciones particulares para proponer.

En nuestro caso usaremos las funciones sinusoidales, ya que estas pueden servir como base para aproximar (series de Fourier) cualquier función continua.

### 4.6.1. Circuito RLC

Si al circuito RC estudiado anteriormente se conecta una fuente de voltaje, se obtiene un circuito como el ilustrado en la Figura 4.7.

Proponemos como fuente una función periódica  $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ , lo que lleva a proponer como solución de la ecuación inhomogénea  $q(t) = K_1 \sin(\omega t) + K_2 \cos(\omega t)$ .

Al reemplazar en la ecuación diferencial y agrupando las constantes que multiplican a los senos y cosenos, se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned}
 K_1 \frac{R\omega}{L} + K_2 \left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) &= V_0/L, & (4.107) \\
 K_2 \frac{R\omega}{L} - K_1 \left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$K_1^2 + K_2^2 = \frac{V_0^2/L^2}{\left(-\omega^2 + \frac{1}{LC}\right)^2 + \left(\frac{R\omega}{L}\right)^2} = \frac{V_0^2}{\omega^2 \left((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2\right)}. \quad (4.108)$$

Esto nos invita a definir  $K_1 = r \text{sen}(\gamma)$  y  $K_2 = r \text{cos}(\gamma)$ , esto permite determinar fácilmente las variables  $r$  y  $\gamma$  encontrando así la solución.

$$r = \frac{V_0}{\omega \sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}}, \quad \tan(\gamma) = \frac{L\omega - 1/(\omega C)}{R}. \quad (4.109)$$

Usando la identidad de suma de ángulos del coseno y este último resultado obtenemos como solución para la corriente

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{-V_0}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} \text{sen}(\omega t - \gamma). \quad (4.110)$$

Notase que la corriente y el voltaje de entrada están desfasados por  $\gamma$ , lo cual se vera reflejado en la potencia del circuito. Calculamos los voltajes en el inductor, en la resistencia y en el capacitor, usando las respectivas fórmulas  $L \frac{di}{dt}$ ,  $IR$ ,  $\frac{q}{C}$ . Ponemos los resultados en la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} V_L &= -L\omega \left[ \frac{-V_0}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} \text{cos}(\omega t - \gamma) \right], \\ V_R &= -R \left[ \frac{-V_0}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} \text{cos}(\omega t - \gamma - \pi/2) \right], \\ V_C &= \frac{1}{\omega C} \left[ \frac{-V_0}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} \text{cos}(\omega t - \gamma) \right], \end{aligned} \quad (4.111)$$

Notase que el voltaje  $V_R$  esta desfasado  $\pi/2$ , lo que nos lleva a asociar este voltaje junto con los otros voltajes en un plano "cartesiano" que gira. A esto se le conoce como método de fasores de Fresnell. Podemos asociar este plano al plano complejo y así definir la impedancia como:  $Z = R + i(L\omega - 1/(\omega C))$ . Esto nos puede simplificar el manejo de nuestras ecuaciones, como

$$i(t) = \frac{V_0}{\|Z\|} \text{Im}(e^{\omega t - \gamma}), \quad (4.112)$$

donde  $\text{Im}$  representa la parte imaginaria del numero complejo. Esto nos permite generalizar fácilmente nuestro circuito por medio de una ley de ohm en el caso de dos o más inductores, capacitores y resistores podemos definir la impedancia como

$$Z = R_1 + R_2 + \dots + i((L_1 + L_2 + \dots)\omega - 1/[(C_1 + C_2 + \dots)\omega]) = \|Z\| e^{\gamma} = \frac{V}{I} \quad (4.113)$$

Calculemos ahora la potencia del circuito, usando la relación  $P = IV$ , lo que nos lleva a

$$P = ZI^2 = Z \frac{V_0^2}{(\|Z\|)^2} \text{sen}^2(\omega t - \gamma), \quad (4.114)$$



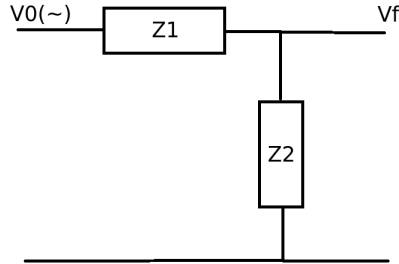


Figura 4.8: Filtro de señal.

tomando en cuenta que el promedio de  $\text{sen}^2(x) = 1/2$ , podemos tomar la potencia media definiendo un voltaje y por ende una corriente cuadrática media  $V_{rms} = \frac{V}{\sqrt{2}}$  y  $I_{rms} = \frac{I}{\sqrt{2}}$ . Estos valores son en efecto los que se miden directamente (por ejemplo en un multímetro). En términos generales esta potencia la podemos escribir como

$$\begin{aligned}
 P = IV &= V_0^2 \frac{\langle \cos(\omega t - \gamma)\cos(\omega t) \rangle}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} = V_0^2 \frac{\langle \cos(\omega t)^2 \rangle \cos(\gamma)}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} \quad (4.115) \\
 &= V_{rms}^2 \frac{\langle \cos(\gamma) \rangle}{\sqrt{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}} = V_{rms}^2 \frac{R}{((L\omega - 1/(\omega C))^2 + R^2)}.
 \end{aligned}$$

Notase que la potencia es mínima cuando  $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ , que se conoce como frecuencia de resonancia del circuito.

### Filtros

Como aplicación de lo anterior veremos el concepto de filtro de señal, el cual se basa en un dispositivo electrónico que nos permita discriminar ciertas frecuencias. Considérese el circuito de la figura 4.8, y aplíquese las leyes de Kirchhoff considerando  $I_3 = 0$  (corriente de salida), resulta

$$\begin{aligned}
 V_{entrada} &= I(Z_1 + Z_2), \\
 V_{salida} &= IZ_2, \\
 \Rightarrow \frac{V_{entrada}}{V_{salida}} &= \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2}.
 \end{aligned} \quad (4.116)$$

Consideremos que  $Z_1 = -i/\omega C$  y  $Z_2 = iL\omega$ , definamos también  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Sustituyendo en la ecuación 4.116 resulta,

$$\frac{V_{entrada}}{V_{salida}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}, \quad (4.117)$$

notemos que si  $\omega \rightarrow \infty$  el voltaje de salida es igual al voltaje de entrada, por lo que este dispositivo se llama filtro pasa altas. Ya que permite pasar frecuencias altas en comparación con  $\omega_0$ . En el caso contrario en donde  $Z_2 = -i/\omega C$  y  $Z_1 = iL\omega$  se tiene una ecuación

$$\frac{V_{entrada}}{V_{salida}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (4.118)$$

lo cual permite pasar solo frecuencias bajas en comparación con la frecuencia de resonancia. Consecuentemente a este dispositivo se le conoce como pasa bajas. También se puede construir un filtro pasa banda o pasa media, si se ponen los dos filtros en serie, con lo cual la relación entre voltaje de entrada y salida es

$$\frac{V_{entrada}}{V_{salida}} = \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \left( \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right). \quad (4.119)$$

La capacidad de filtrado se puede mejorar si se ponen varios filtros en serie con lo cual la reducción se vuelve exponencial en función del número de filtros colocados. La principal aplicación de filtros en la industria esta en la construcción de bocinas en donde se filtran los sonidos agudos, medios y bajos en tres parlantes distintas. Otra aplicación del filtro pasa media es el sintonizador de radio el cual nos permite seleccionar una sola frecuencia para que esta sea procesada.

#### 4.6.2. Oscilador RC

Un oscilador eléctrico es un circuito capaz de mantener una señal de corriente que varia en el tiempo con un periodo característico, por lo general la señal que se espera es sinusoidal. Por lo general están compuestos por redes de resistencias y condensadores que aprovechan el desfase introducido por la red, realimentan una señal en fase con la entrada y provocan de esta manera la oscilación de un amplificador que es la realimentación positiva, de no ser así la señal se amortiguaría. En este apartado estudiaremos con detalle el oscilador de **desplazamiento de fase** o oscilador RC.

Analicemos usando las leyes de Kirchof la malla de la figura 4.9, de donde nos interesa saber la relación entre el voltaje de entrada  $V_i$  y de salida  $V_o$  de forma tal que podamos encontrar la frecuencia de resonancia haciendo la parte imaginaria igual a cero, con lo que finalmente nos va a llevar a saber cuanta ganancia de voltaje necesita el oscilador para mantenerse estable (esta ganancia la suministraría en principio un amplificador).

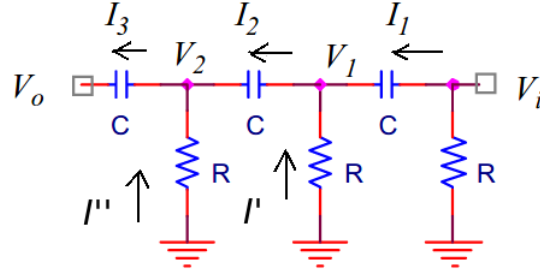


Figura 4.9: Malla elemental de un oscilador RC.

Primero nos fijamos en la malla que solo incluye el voltaje  $V_i$  y el resistor  $R$ , de donde es obvio que  $I_1 = V_i/R$ . Ahora nos fijamos en la primera malla que incluye los nodos  $V_i$  y  $V_1$ , por la ley de nodos tenemos  $I_2 = I_1 + I'$  y por ley de mallas se cumple  $RI' = V_1 = V_i + \chi_C I_1 = V_i - (i/\omega C)I_1 = V_i(1 - (i/\omega RC))$ . Ahora podemos calcular  $I_2$ , ya que las corrientes  $I' = V_1/R$  e  $I_1 = V_i/R$  están determinadas,  $I_2 = \frac{V_i}{R}(2 - i/\omega RC)$ .

De manera similar podemos calcular  $V_2$ , usando ley de mallas resulta  $RI'' = V_2 = V_1 - (i/\omega C)I_2 = V_i(1 - \frac{1}{(\omega RC)^2} - \frac{3i}{\omega RC})$ . Usamos ley de nodos para calcular  $I_3 = I_2 + I'' = I_2 + V_2/R = \frac{V_i}{R}(3 - \frac{1}{(\omega RC)^3} - \frac{4i}{\omega RC})$ . Finalmente calculamos  $V_o$  usando ley de mallas,

$$V_o = V_2 - (i/\omega C)I_3 = V_i \left( 1 - \frac{5}{(\omega RC)^2} + i \left[ \frac{1}{(\omega RC)^3} - \frac{6}{\omega RC} \right] \right). \quad (4.120)$$

De la ecuación 4.120 podemos obtener la frecuencia de resonancia imponiendo la condición  $\text{Im}(V_o) = 0$ , lo que resulta en

$$\omega^2 = \frac{1}{6RC}$$

Si ahora introducimos este valor en la ecuación 4.120 nos dará la condición de ganancia de voltaje requerida para mantener la señal de oscilación, que en este caso es  $\frac{V_o}{V_i} = -29$ .

## 4.7. Ejercicios

### 4.7.1. Reglas de Kirchhoff

Resuelva el circuito mostrado en la figura 4.10, considerando  $V_0$  constante,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \equiv R$ , y  $R_5 = 2R$ .

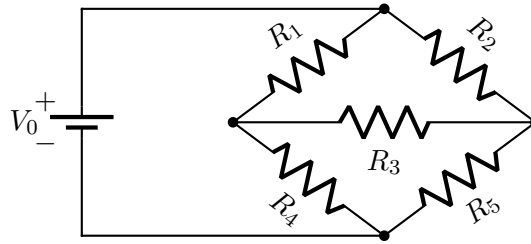


Figura 4.10: Circuito “puente”.

**Solución:** Lo primero a tener en cuenta es que necesitamos tantas ecuaciones linealmente independientes como incógnitas en el problema. En este caso nos pide “resolver el circuito”, esto significa que debemos obtener TODAS las corrientes que circulan a través de él. A saber, tenemos que encontrar un total de 6 corrientes: una por cada resistencia y otra que pasa por  $V_0$ .

Para plantear estas ecuaciones utilizaremos las reglas de Kirchhoff:

- $\sum I = 0$ : Para cualquier unión (nodo), la suma de las corrientes entrantes y salientes es cero.
- $\sum V = 0$ : Para cualquier espira cerrada (lazo) la suma de las diferencias de potencial es cero.

Existen diferentes convenciones para utilizar las reglas de Kirchhoff, por lo que es conveniente mencionar las que utilizaremos aquí. Para los nodos se considera que la corriente saliente es positiva, mientras que la entrante es negativa. En el caso de los lazos tomaremos como positiva una fuente de voltaje si el sentido del recorrido va de - a + y será negativa en caso contrario. Por otra parte, la diferencia de voltaje  $IR$  será negativa si el recorrido del lazo va en el mismo sentido que la corriente  $I$  y será positiva si van en sentido contrario.

Dicho lo anterior propondremos el sentido de las corrientes, los lazos y los nodos mostrados en la figura 4.11. De los tres primeros lazos obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$1) V_0 - I_2 R_2 - I_5 R_5 = 0$$

$$2) V_0 - I_1 R_1 - I_4 R_4 = 0$$

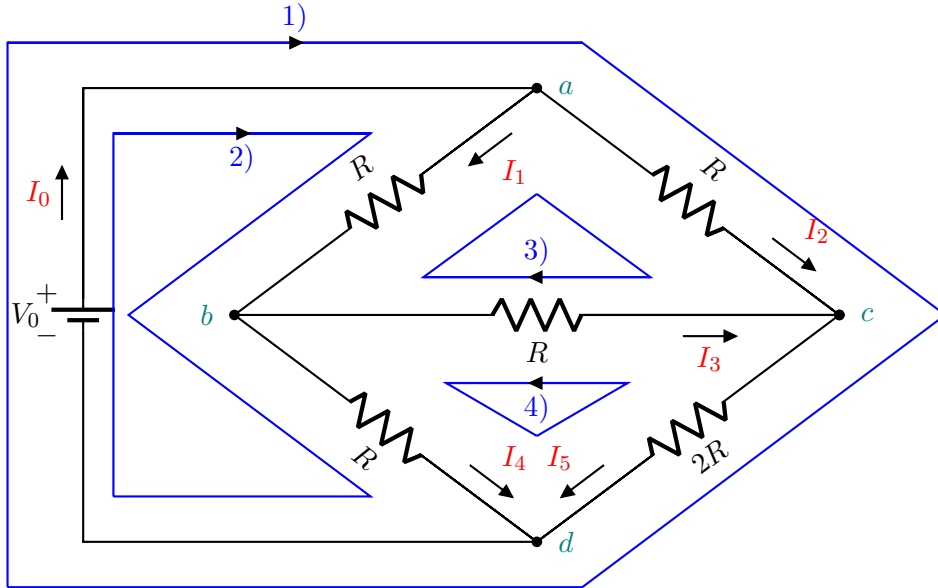


Figura 4.11: Corrientes, nodos y lazos propuestos para el circuito “puente”.

$$3) \quad I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$$

De manera análoga, tenemos las siguientes ecuaciones para los tres primeros nodos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -I_0 + I_1 + I_2 = 0 \\ \text{b)} \quad & -I_2 - I_3 + I_4 = 0 \\ \text{c)} \quad & V_0 - I_1 R_1 - I_4 R_4 = 0 \end{aligned}$$

Notemos que ahora tenemos un total de 6 ecuaciones linealmente independientes (no se demostrará la independencia lineal) con 6 incógnitas, ya que se considera que  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \equiv R$ , y  $R_5 = 2R$ . En otras palabras, basta con resolver el sistema para obtener los valores de  $I_j \mid j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Resolviendo para las corrientes obtenemos que la solución para este sistema es  $I_0 = \frac{11}{13} \frac{V_0}{R}$ ,  $I_1 = \frac{6}{13} \frac{V_0}{R}$ ,  $I_2 = \frac{5}{13} \frac{V_0}{R}$ ,  $I_3 = -\frac{1}{13} \frac{V_0}{R}$ ,  $I_4 = \frac{7}{13} \frac{V_0}{R}$  y  $I_5 = \frac{4}{13} \frac{V_0}{R}$ .

Es de resaltar que el resultado para  $I_3$  es negativo. La razón es que esta corriente tiene va en sentido contrario al que propusimos.

Finalmente, una manera de comprobar este resultado es mediante un lazo o un nodo que no haya sido utilizado para resolver el sistema y sustituir los valores recién encontrados. Para ejemplificar, utilizaremos el lazo 4) de la figura 4.11, este lazo da la siguiente ecuación:

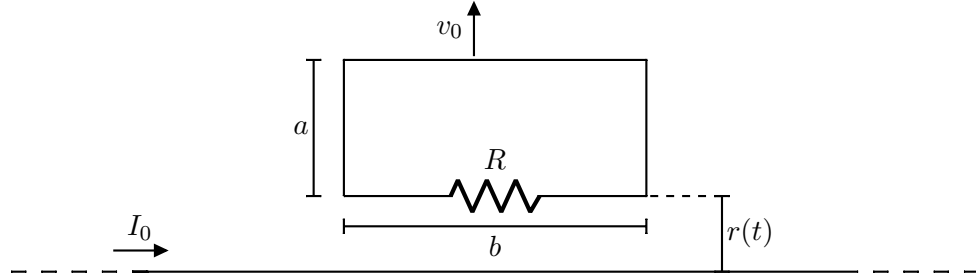


Figura 4.12: Ley de Faraday.

$$I_3 R_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5 = 0$$

Si hemos encontrado los valores adecuados para las corrientes, entonces esta última ecuación se debe de satisfacer.

$$\left(-\frac{1}{13} \frac{V_0}{R}\right) (R) - \left(\frac{7}{13} \frac{V_0}{R}\right) (R) + \left(\frac{4}{13} \frac{V_0}{R}\right) (2R) = -\frac{1}{13} V_0 - \frac{7}{13} V_0 + \frac{8}{13} V_0 = 0$$

Con esta ecuación satisfecha podemos asegurar que hemos resuelto correctamente el circuito.

#### 4.7.2. Ley de Faraday

Considere un alambre infinito con corriente  $I_0$  y un circuito rectangular, ambos co-planares (figura 4.12). El circuito rectangular se aleja en dirección radial al alambre a una velocidad constante tal su posición al tiempo  $t$  es  $r(t) = v_0 t + k \mid v_0, k \in \mathbb{R}^+$ .

- a) Calcule el flujo magnético en la espira rectangular a un tiempo  $t$ .
- b) Calcule la magnitud y la dirección de la corriente en la espira.

**Solución:** a) El flujo magnético dentro de una espira cerrada se define como:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \tag{4.121}$$

Para calcular el flujo magnético a través de la espira al tiempo  $t$ , primero debemos conocer el campo magnético que la atraviesa en cada punto al tiempo  $t$ . Considerando el sistema coordenado como en la figura 4.13, tenemos que  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \hat{\phi}$ .

Suponiendo que al tiempo  $t$  el circuito se encuentra a una distancia  $r$  de la varilla infinita. Sean  $r' \in r, r + b$  y  $dr'$  un elemento diferencial del circuito centrado en el punto  $r'$ . Entonces, una diferencial de área para el circuito es  $d\vec{A} = dr' dz \hat{\phi}$ . De tal modo que un diferencial de flujo magnético a través del

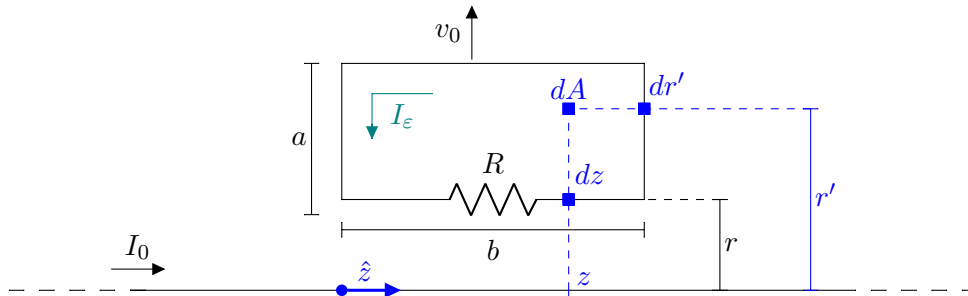


Figura 4.13: Variables del problema.

circuito es  $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r'} dr' dz$ . Por lo tanto, el flujo magnético total es:

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^b \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r'} dr' dz = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} b \ln \left( \frac{r+a}{r} \right)$$

b) Para calcular la magnitud y la dirección de la corriente en la espira, usaremos la Ley de Faraday:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = \varepsilon \quad (4.122)$$

Dado que en el inciso anterior fue calculado  $\Phi$  y como  $r = r(t) = v_0 t + k$ , esto resulta en que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \frac{\frac{r-r-a}{r^2} dr}{\frac{r+b}{r}} dt = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} \frac{-a}{r(r+a)} (v_0) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{ab I_0 v_0}{(v_0 t + k)(v_0 t + k + a)}$$

La Ley de Faraday nos dice que la *fem* en el circuito es  $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$  y dado que la *fem* no es más que una diferencia de potencial entonces tenemos que la corriente a través del circuito es:

$$I_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R} \frac{ab v_0}{(v_0 t + k)(v_0 t + k + a)}$$

Finalmente, para conocer el sentido en el que esta corriente se desplaza, aplicamos la Ley de Lenz: *La fem (o la corriente) inducida siempre tiende a oponerse o cancelar el cambio que la genera*. En nuestro caso, el cambio se refiere al cambio en el flujo magnético en el circuito a medida que este se desplaza. Por tanto, para contrarrestar este cambio  $I_\varepsilon$  debe de ir en sentido anti-horario, justo como se ilustra en la figura 4.13.

### 4.7.3. Circuito RCL

Resuelva el circuito de la figura 4.14 considerando la frecuencia de entrada sinusoidal  $\omega$  y la amplitud del voltaje  $V_0$ . Encuentre la corriente total  $I$ , las corrientes  $I_1$  e  $I_2$ , sus respectivas fases  $\phi$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , la frecuencia de resonancia  $\omega_0$  y la amplitud de ganancia de voltaje.

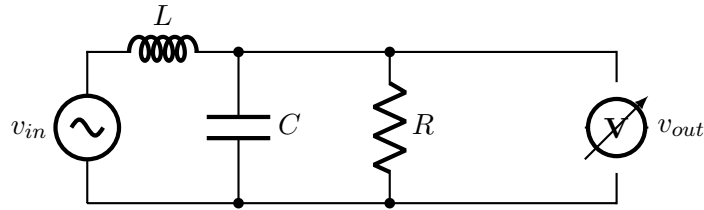


Figura 4.14: Circuito RCL de corriente alterna.

**Solución:** Este circuito se resolverá utilizando el concepto de impedancia. Para conocer  $I$ , es necesario conocer la impedancia total del circuito  $Z_T$ . Entonces, tenemos 3 elementos en el circuito cuyas impedancias son:  $Z_1 = R$ ,  $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$  y  $Z_3 = j\omega L$ , donde  $j = \sqrt{-1}$ . Lo primero que notamos es que  $Z_1$  y  $Z_2$  están en paralelo por lo que podemos obtener la impedancia equivalente  $Z_4$ .

$$\frac{1}{Z_4} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_1} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{1 + j\omega RC}{R}$$

Por lo que  $Z_4 = \frac{R}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)}(1 - j\omega RC)$ . Por otra parte, tenemos que  $Z_3$  y  $Z_4$  se encuentran en serie por lo que la impedancia total es:

$$Z_T = Z_3 + Z_4 = j\omega L + \frac{R}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)}(1 - j\omega RC) = \frac{1}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)} \left[ R + j\omega (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L) \right]$$

por lo tanto, su inverso multiplicativo es

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}{\left[ R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2 \right]} \left[ R + j\omega (R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L) \right]$$

Por ley de Ohm tenemos que  $I = \frac{v_{in}}{Z_T}$ , donde, al ser  $v_{in}$  sinusoidal, de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $V_0$ , tenemos que  $v_{in} = V_0 \cos(\omega t)$ . De este modo

$$I = \frac{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2 V_0 \cos(\omega t)}{\left[ R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2 \right]} \left[ R + j\omega (R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L) \right]$$



Cuya fase es  $\phi = \arg(I) = \arg\left(\frac{1}{Z_T}\right) = \arctan\left[\frac{\text{Im}g(1/Z_T)}{\text{Re}(1/Z_T)}\right] = -\arctan\left[\frac{\text{Im}g(Z_T)}{\text{Re}(Z_T)}\right]$ ,  
*i. e.*,

$$\phi = \arctan\left(\omega \frac{R^2C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R}\right)$$

Si consideramos la norma de  $Z_T$  podemos obtener el valor de la corriente en función del tiempo ( $i(t)$ ) que circularía por todo el circuito.

$$|Z_T| = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2(L - R^2C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)}$$

De tal manera que  $i(t) = \frac{|v_{in}|}{|Z_T|} \angle \phi$ . Notase que al se  $v_{in}$  un valor real, entonces  $|v_{in}| = v_{in}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{(1 + \omega^2 R^2 C^2)V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2(L - R^2C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}} \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{(1 + \omega^2 R^2 C^2)V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2(L - R^2C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}} \cos\left[\omega t + \arctan\left(\omega \frac{R^2C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R}\right)\right] \end{aligned}$$

Ahora para calcular la frecuencia de resonancia ( $\omega_0$ ), recordemos que la resonancia ocurre cuando el voltaje y la corriente se encuentran en fase. Es decir, debemos considerar  $\omega$  tal que  $\phi = 0$ , y la única forma en que  $\phi$  sea igual a 0 es que  $\text{Im}g(1/Z_T) = -\text{Im}g(Z_T) = 0$ . Entonces,

$$\text{Im}g\left(\frac{1}{Z_T}\right) = \omega_0 (R^2C - L - \omega_0^2 R^2 C^2 L) = 0$$

Por lo que si resolvemos para  $\omega_0$ , obtenemos que existen 2 frecuencias de resonancia y son:

$$\omega_{01} = 0$$

$$\omega_{02} = \sqrt{\frac{R^2C - L}{R^2C^2L}}$$

Ahora, para obtener la amplitud de ganancia de voltaje necesitamos calcular primero  $v_{out}$  con ley de Ohm,  $V = IZ$ . En este caso  $I$  se refiere a la corriente total que acabamos de calcular por lo que  $I = V_0 \cos(\omega t)/Z_T$  y la impedancia que nos interesa es justamente la debida al pedazo en paralelo,

es decir,  $Z_4$ . Por lo tanto, la diferencia de potencial entre la parte en paralelo es:

$$\begin{aligned} V_{Z_4} &= IZ_4 = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{Z_T} Z_4 = V_0 \cos(\omega t) \frac{Z_4}{Z_T} \\ &= \frac{R(1 + \omega^2 R^2 C^2) V_0 \cos(\omega t)}{R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2} \\ &\quad \left[ R - \omega^2 RC(R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L) + j\omega(2R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L) \right] \end{aligned}$$

De manera análoga que para  $i(t)$ , podemos encontrar  $v_{out}(t)$ , siendo esta  $v_{out}(t) = |V_{Z_4}| \angle \phi_4$ , es decir, ahora la fase será  $\phi_4 = \arg(V_{Z_4}) = \arg\left(\frac{Z_4}{Z_T}\right) = \arg(Z_4) - \arg(Z_T)$ . Es de resaltar que ya hemos calculado todo excepto  $|Z_4|$  y  $\phi_4$ , cuyos valores resultan ser  $|Z_4| = R\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$  y  $\arg(Z_4) = \arctan(\omega RC)$ . Por ende,

$$\begin{aligned} v_{out}(t) &= \frac{R(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{3/2} V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}} \\ &\quad \cos \left[ \omega t + \arctan(\omega RC) + \arctan \left( \omega \frac{R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R} \right) \right] \end{aligned}$$

Consecuentemente, tenemos que la ganancia es:

$$G = \frac{v_{in}}{|V_{Z_4}|} = \frac{v_{in}}{v_{in} |Z_4/Z_T|} = \frac{|Z_T|}{|Z_4|} = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}}{R(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{3/2}}$$

Es de recalcar que se obtenido el mismo resultado dividiendo la amplitud de  $v_{in}$  entre la amplitud de  $v_{out}$ .

Por último, procedemos a calcular  $I_1$  e  $I_2$  y sus respectivas fases  $\phi_1$  y  $\phi_2$ . Entonces, por ley de Ohm,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_{Z_4}}{Z_1} = \frac{V_{Z_4}}{R} \\ I_2 &= \frac{V_{Z_4}}{Z_2} = V_{Z_4}(j\omega C) \end{aligned}$$

En consecuencia, las fases son:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \arg(I_1) = \arg(V_{Z_4}) - \arg(R) = \phi_4 - 0 \\ &= \arctan(\omega RC) + \arctan \left( \omega \frac{R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \arg(I_2) = \arg(V_{Z4}) + \arg(i\omega C) = \phi_4 + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega RC) + \arctan\left(\omega \frac{R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R}\right)\end{aligned}$$

Finalmente, tenemos que las corrientes  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$  son:

$$\begin{aligned}i_1(t) &= |I_1| \angle \phi_1 = \frac{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{3/2} V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}} \\ &\quad \cos \left[ \omega t + \arctan(\omega RC) + \arctan\left(\omega \frac{R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R}\right) \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_2(t) &= |I_2| \angle \phi_2 = \frac{\omega RC (1 + \omega^2 R^2 C^2)^{3/2} V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 (L - R^2 C + \omega^2 R^2 C^2 L)^2}} \\ &\quad \cos \left[ \omega t + \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega RC) + \arctan\left(\omega \frac{R^2 C - L - \omega^2 R^2 C^2 L}{R}\right) \right]\end{aligned}$$

### Propiedades útiles

#### Álgebra de números complejos

Sean  $z_1$  y  $z_2$  dos números complejos, tal que,  $z_1 = x_1 + jy_1$ ,  $z_2 = x_2 + jy_2$  donde  $j = \sqrt{-1}$  y  $x_1, x_2, y_1$  y  $y_2 \in \mathbb{R}$ .

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$
- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_2 y_1 + x_1 y_2)$
- $z_1^* = \bar{z}_1 = x_1 - jy_1$
- $|z|^2 = z_1 z_1^* = x_1^2 + y_1^2$ 
  - $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{x_2^2 + y_2^2} [(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)]$ 
  - $\frac{1}{z_1} = \frac{z_1^*}{|z_1|^2}$
- $\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right)$ 
  - $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

**Arcotangente**

Sea  $x \in \mathbb{R}$ .

- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

---

Ecuaciones de Maxwell

---

*“La ignorancia consciente es el prelude de todo avance real en la ciencia.”*

– James Clerk Maxwell

Hasta el momento,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Note que aquí hemos suprimido, para no recargar la notación, la designación “ext” en la densidad de carga y corriente externa.

Vemos que (5.3) implica  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , que es una condición que no es válida en general, sino que sólo en los casos, de acuerdo a (3.9), en que  $\partial\rho/\partial t = 0$ . Esto lleva a pensar que (al menos) la ecuación (5.3) no es válida en el caso dinámico más general en el que las densidades de carga y corriente, y por lo tanto los campos eléctricos y magnéticos, varían en el tiempo.

Maxwell<sup>1</sup> (1861) generalizó la ecuación (5.3) de modo que sea compatible con (5.1) y la ley de conservación de la carga eléctrica, es decir, con la ecuación de continuidad (3.9). Usando (5.1), que suponemos por tanto válida

---

<sup>1</sup>James Clerk Maxwell (1831-1879): Físico escocés.

en el caso general, podemos escribir (3.9) como

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (5.5)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \quad (5.6)$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \right]. \quad (5.7)$$

De aquí vemos que en el caso de corrientes generales (no-estáticas),  $\vec{J}$  tiene divergencia no nula, pero la combinación  $\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$  siempre tiene divergencia nula. A partir de esta observación, Maxwell postuló que el lado derecho de la ecuación (5.3) debía ser reemplazada por la combinación  $\vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$ . En otras palabras, Maxwell postuló que a la densidad de corriente debería agregarse el término  $\partial \vec{D} / \partial t$ , llamado corriente de desplazamiento.

Con esto, las ecuaciones de Maxwell adoptan la forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho, \quad (5.8)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (5.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (5.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Estas ecuaciones son completadas con las relaciones constitutivas entre  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ , y entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ , así como con la expresión de la (densidad de) fuerza de Lorentz:

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}. \quad (5.12)$$

### 5.0.1. Paridad

La paridad la podemos definir por medio de una reflexión  $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$  sobre las coordenadas cartesianas de una magnitud física. Sea  $g(\vec{x})$  la magnitud física de interés, entonces podemos definir el operador de paridad como:

$$\hat{P}(g(\vec{x})) = g(-\vec{x}). \quad (5.13)$$

Es claro que este operador cumple con la propiedad  $\hat{P}^2 = 1$ , es decir es un operador idempotente. Podemos entonces clasificar a los elementos de un espacio vectorial por medio de este operador, es decir, impondremos que los elementos de una base lineal tengan los valores propios de  $\hat{P}$ .

Es fácil ver que los valores propios del operador paridad son  $\pm 1$ . Esto nos dice que podemos clasificar los elementos de un espacio vectorial de dos formas: **vectores** y **pseudo-vectores**. Los primeros les asignamos el valor

propio  $-1$  y a los segundos el  $1$ . En otro forma de decirlo si el operador  $\hat{P}$  actúa sobre un campo vectorial  $\vec{F}(\vec{x})$  y resulta  $\hat{P}barF(\vec{x}) = -barF(\vec{x})$ , entonces decimos que el campo vectorial se comporta como un vector. De forma analoga para el pseudo-vector.

En física tenemos varios ejemplos de vectores tales como: el vector posición, velocidad, fuerza etc . También los pseudo-vectores tales como: la torca, la velocidad angular, etc. También podemos clasificar a los operadores vectoriales, como el rotacional y el gradiente como vectores.

También podemos hacer una clasificación semejante para funciones escalares. Como por ejemplo el producto escalar es un pseudo-escalar y el triple producto vectorial es escalar. Ahora es claro que para conservar la simetría de paridad, solo podemos sumar vectores con vectores y pseudo-vectores con pseudo-vectores. Ya que si combinamos una suma de vectores y pseudo vectores, es fácil demostrar que esta suma no es compatible con ningún valor propio del operador paridad.

Con esto en mente podemos ahora ver si podemos añadir esta clasificación al electromagnetismo. Es decir preguntarnos si las ecuaciones de Maxwell respetan paridad.

Analicemos el caso del campo eléctrico el cual lo definimos a partir de la ley fundamental de coulomb, de ahí nos extendimos hasta la ley general de Gauss. Es claro que la ley de Coulomb es un vector, es decir,  $\hat{P}\vec{E} = -\vec{E}$ . Para los campos magnéticos tenemos lo contrario, ya que por ley de lorentz la fuerza es un vector, al igual que la velocidad, esto implica que el campo magnético debe ser un pseudo-vector.

Obsérvese que las ecuaciones de Maxwell respetan el operador paridad (donde la corriente  $\vec{J}$  es un vector). De aquí podemos afirmar que el electromagnetismo es invariante bajo paridad, lo que nos indica que la electrodinámica debe ser la misma detrás de el espejo. Si quisiéramos añadir un monopolo magnético, deberíamos añadir a la ley de Faraday una corriente magnética  $\vec{J}_m$  la cual por definición debe ser un vector. Al hace esto obsérvese que se estaria sumando un vector a un pseudo-vector en la ley de Faraday, lo cual viola paridad. es decir, la existencia del monopolo magnético esta vinculada con la violación de paridad en electromagnetismo.

### 5.1. Conservación de la energía y Vector de Poynting

Calculamos el producto escalar de  $\vec{E}$  con la ecuación (5.10). Usando notación tensorial, obtenemos:

$$E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} - E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k + E_i J_i = 0. \quad (5.14)$$

Análogamente, el producto escalar entre  $\vec{H}$  con la ecuación (5.11) implica,

$$H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + H_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0. \quad (5.15)$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos

$$0 = E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} - E_i \varepsilon_{ijk} \partial_j H_k + E_i J_i + H_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k \quad (5.16)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \varepsilon_{ijk} (H_i \partial_j E_k - E_i \partial_j H_k) \quad (5.17)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \varepsilon_{ijk} (H_i \partial_j E_k + E_k \partial_j H_i) \quad (5.18)$$

$$= E_i \frac{\partial D_i}{\partial t} + H_i \frac{\partial B_i}{\partial t} + E_i J_i + \partial_j (\varepsilon_{jki} E_k H_i). \quad (5.19)$$

En resumen, las ecuaciones de Maxwell (5.10) y (5.11) implican que

$$\boxed{\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0.} \quad (5.20)$$

Es útil definir el vector de Poynting<sup>2</sup> como

$$\text{Vector de Poynting} \quad \boxed{\vec{S} := \vec{E} \times \vec{H}.} \quad (5.21)$$

En un pequeño intervalo de tiempo  $dt$  los campos cambian (en cada punto fijo del espacio) en las pequeñas cantidades dadas por  $d\vec{D} = dt (\partial \vec{D} / \partial t)$  y  $d\vec{B} = dt (\partial \vec{B} / \partial t)$ . Entonces podemos escribir

$$\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} dt + \vec{E} \cdot \vec{J} dt = 0, \quad (5.22)$$

que, integrado en un volumen  $V$  conduce a

$$\boxed{\int_V [\vec{E} \cdot d\vec{D} + \vec{H} \cdot d\vec{B}] dV + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} dt + \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV dt = 0.} \quad (5.23)$$

<sup>2</sup>John Henry Poynting (1852-1914): físico inglés. Ver [http://es.wikipedia.org/wiki/John\\_Henry\\_Poynting](http://es.wikipedia.org/wiki/John_Henry_Poynting) ← Esta página podría ser mejorada considerablemente, traduciendo la correspondiente en inglés!. ¿voluntarios?



Identificamos el último término como el **trabajo realizado por el campo eléctrico sobre las corrientes**, es decir, la energía transferida del campo a las cargas (o viceversa, dependiendo del signo). Además, de acuerdo a los resultados previos (2.256) y (4.61) la primera integral puede interpretarse como el **cambio total de la energía almacenada en forma de campo eléctrico y magnético**, en el volumen  $V$ . Finalmente, interpretamos la integral de superficie como la **energía electromagnética neta que fluye a través de la superficie  $\partial V$** . En otras palabras, interpretamos el vector de Poynting como la densidad de flujo de energía electromagnética (la energía electromagnética transportada por unidad de superficie y unidad de tiempo). De esta forma, (5.23) es una ecuación de balance (o conservación) de la energía.

En el caso particular de medios lineales, no disipativos, y con susceptibilidades independientes del tiempo, es decir, tales que

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad \partial_t \varepsilon_{ij} = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad (5.24)$$

$$B_i = \mu_{ij} H_j, \quad \partial_t \mu_{ij} = 0, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad (5.25)$$

podemos reescribir:

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \cdot \vec{D}), \quad \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (5.26)$$

Con esto, (5.20) es equivalente a

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{J} = 0}, \quad (5.27)$$

donde hemos definido la densidad de energía del campo electromagnético:

$$\boxed{u := \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B})}. \quad (5.28)$$

La versión integral de (5.27) es

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{em}} + E_{\text{mec}}) + \oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (5.29)$$

donde

$$E_{\text{em}} = \int_V u dV \quad (5.30)$$

es la **energía electromagnética** y, de acuerdo al teorema de trabajo-energía en el caso que no existan otras fuerzas que realicen trabajo sobre las cargas,

$$\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV \quad (5.31)$$

es la variación de energía mecánica total de las cargas contenidas en  $V$ .

## 5.2. Ondas Electromagnéticas

### 5.2.1. Campos electromagnéticos y ecuación de la onda

Consideremos un medio lineal, isótropo y homogéneo. En este caso, a ley de Ampère-Maxwell se reduce a

$$\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k = \mu\vec{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial E_i}{\partial t}. \quad (5.32)$$

Derivando con respecto al tiempo y usando la ley de Faraday, podemos escribir

$$\mu\frac{\partial J_i}{\partial t} + \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = \varepsilon_{ijk}\partial_j\frac{\partial B_k}{\partial t} \quad (5.33)$$

$$= -\varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l E_m) \quad (5.34)$$

$$= -(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_j\partial_l E_m \quad (5.35)$$

$$= \partial_j\partial_j E_i - \partial_j\partial_i E_j. \quad (5.36)$$

Usando la ley de Gauss,  $\partial_j E_j = \rho/\varepsilon$  en el segundo término del lado derecho, obtenemos

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{\nabla}\rho + \mu\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}.} \quad (5.37)$$

Similarmente, calculando la derivada con respecto al tiempo de la ley de Faraday y usando la ley de Ampère-Maxwell, así como el hecho que el campo magnético siempre tiene divergencia nula, es decir (5.9), encontramos que

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu\vec{\nabla} \times \vec{J}.} \quad (5.38)$$

De esta forma encontramos que las ecuaciones de Maxwell implican que los campos eléctrico y magnético satisfacen la ecuación de onda inhomogénea. Es importante notar que no todas las soluciones de la ecuación de onda son necesariamente soluciones de las ecuaciones de Maxwell. En otras palabras, (5.37) y (5.38) son condiciones necesarias, pero no suficientes para que los campos satisfagan las ecuaciones de Maxwell.

En regiones en libres de cargas y corrientes (5.37) y (5.38) se reducen a la ecuación de onda homogénea para cada componente (cartesiana) de los campos eléctrico y magnético:

$$\boxed{\nabla^2 E_i - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0.} \quad (5.39)$$

$$\boxed{\nabla^2 B_i - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} = 0.} \quad (5.40)$$

Ésta es la ecuación del movimiento ondulatorio, también llamada Ecuación de ondas de D'Alembert. Es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de toda la física-matemática, puesto que representa todos los tipos de movimiento ondulatorio básicos en que la velocidad es constante. La solución general en una dimensión de esta ecuación diferencial se obtiene por el método de D'Alembert y resulta:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{f}_1(x - vt) + \vec{f}_2(x + vt), \quad (5.41)$$

donde  $v^2 = 1/\varepsilon\mu$  y  $f_1$  y  $f_2$  son funciones arbitrarias que en general dependerán de las condiciones iniciales y de borde.

Por lo general las fuentes de luz son debidas a movimientos oscilatorios armonicos, por lo que se espera que las ondas electromagnéticas (en general) sean periodicas, por lo que usamos funciones trigonometricas para representar estas ondas.

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(k(x - vt + \phi)) = \text{Re}(E_0 e^{i(k(x-vt+\phi))}), \quad (5.42)$$

donde solo hemos considerado la onda viajera positiva, una constante arbitraria  $k \neq 0$  y hemos añadido por generalidad una fase arbitraria que determina la polarización  $\phi$ . Cada onda esta caracterizada por una longitud de onda  $\lambda$  y un periodo  $T$ , de modo que  $E(x + \lambda, t) = E(x, t)$  y  $E(x, t + T) = E(x, t)$ . De este modo dada la ecuación 5.42 implica

$$x + k\lambda = 2\pi + x, \quad kv(t + T) = kv t + 2\pi \Rightarrow k = 2\pi/\lambda, \quad T = 2\pi/kv,$$

donde la cantidad  $k = 2\pi/\lambda$  recibe el nombre de número de onda y representa el número de longitudes de onda en la distancia, por otro lado la frecuencia  $f = 1/T = v/\lambda$ . Mas en general es de interes la frecuencia angular de la onda definida por:  $\omega = 2\pi/T$ . Finalmente podemos generalizar este resultado unidimensional al caso de tres dimensiones poniendo como anatz,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \phi)}, \quad (5.43)$$

donde se entienda que la solución para  $\vec{B}$  es parecida.

### 5.2.2. Ondas electromagnéticas planas monocromáticas

Consideremos una solución de **onda plana monocromática polarizada linealmente**:

$$E_i = E_i^0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \varphi_0). \quad (5.44)$$

Reemplazando (5.44) en (5.39) encontramos que

$$\left(k^2 - \varepsilon\mu\omega^2\right) E_i = 0, \quad k := |\vec{k}|, \quad (5.45)$$

por lo que las soluciones no triviales requieren que se satisfaga la relación de dispersión:

$$\omega^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} k^2, \quad (5.46)$$

de donde obtenemos la **velocidad de fase**,  $v_f := \omega/k$ ,

$$v_f = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (5.47)$$

que además, coincide con la **velocidad de grupo**,

$$v_f = v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} =: c, \quad (5.48)$$

donde  $v_g := \partial\omega/\partial k$ , ver siguiente sección. Esto implica que las ondas electromagnéticas se propagan de forma no-dispersiva (en medios lineales, isótropos y homogéneos).

La **velocidad de la luz en el medio** ( $c$ ) puede ser escrita en términos de la **velocidad de la luz en el vacío** ( $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ ), la susceptibilidad eléctrica relativa ( $\kappa$ ) y la permeabilidad magnética relativa ( $\kappa_m$ ), es decir, usando  $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$  y  $\mu = \kappa_m\mu_0$ :

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\kappa\kappa_m}} = \frac{c_0}{n}. \quad (5.49)$$

Aquí  $n := \sqrt{\kappa\kappa_m}$  es el **índice de refracción del medio**.

Además, usando (5.11) obtenemos

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}. \quad (5.50)$$

Similarmente, usando (5.10) encontramos que

$$\vec{E} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}. \quad (5.51)$$

Estas relaciones implican que  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  son ortogonales entre sí y forman (en ese orden) un **sistema derecho**. Como consecuencia, una onda electromagnética plana es transversal, ya que las oscilaciones (de los campos eléctrico y magnético) se producen en el plano ortogonal a la dirección de propagación. Además, los módulos de los campos satisfacen

$$|\vec{E}| = c|\vec{B}|. \quad (5.52)$$

### Vector de Poynting

Evaluamos el vector de Poynting (5.21) para la solución de onda plana monocromática recién analizada. Usando (5.21), (5.50) y (5.46) podemos escribir

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (5.53)$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (5.54)$$

$$= \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \left[ \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} \right] \quad (5.55)$$

$$= \frac{1}{\mu\omega} \vec{E}^2 \vec{k} \quad (5.56)$$

$$= \frac{1}{\mu c} \vec{E}^2 \hat{k}. \quad (5.57)$$

Encontramos de este modo que el campo electromagnético correspondiente a la onda plana estudiada transporta energía en la dirección del vector de onda  $\vec{k}$ . Su magnitud, aunque siempre no-negativa, varía en el tiempo y con la posición, ya que  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ . Como la onda considerada es periódica, de periodo  $T = 2\pi/\omega$ , es usual considerar el **promedio del vector de Poynting en un periodo de oscilación**<sup>3</sup> Para la onda sinusoidal (5.44) encontramos entonces que

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu c} \vec{E}_0^2 \hat{k}. \quad (5.59)$$

Esto implica que a través de una superficie de área  $A$  transversal al vector de onda  $\vec{k}$ , la onda transporta energía a una tasa (potencia) promedio (en una oscilación) de

$$\langle P \rangle = \frac{A}{2\mu c} \vec{E}_0^2. \quad (5.60)$$

<sup>3</sup>Si  $f(t)$  es una función del tiempo, entonces definimos su promedio entre  $t = 0$  y  $t = T$  como

$$\langle f \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (5.58)$$

### Densidad de Energía

Análogamente, calculamos la densidad de energía electromagnética, usando la expresión (5.28):

$$u = \frac{1}{2} \left( \varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) \quad (5.61)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \varepsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu c^2} \vec{E}^2 \right) \quad (5.62)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \varepsilon \vec{E}^2 + \varepsilon \vec{E}^2 \right) \quad (5.63)$$

$$= \varepsilon \vec{E}^2. \quad (5.64)$$

Similarmente al caso del vector de Poynting, la densidad de energía (siempre no-negativa) varía en el tiempo y punto a punto. Usando (5.64) podemos reescribir el vector de Poynting (5.57) como

$$\vec{S} = u c \hat{k}. \quad (5.65)$$

Note que esta expresión es análoga a  $\vec{J} = \rho \vec{v}$  que relaciona la densidad de corriente asociada al movimiento de una densidad  $\rho$  (de carga o masa, por ejemplo) con velocidad  $\vec{v}$  ("flujo convectivo").

Para la onda periódica considerada, podemos calcular la densidad de energía promedio, obteniendo

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \vec{E}_0^2. \quad (5.66)$$

## 5.3. Medios dispersivos

### 5.3.1. Velocidad de grupo

Hasta ahora solo hemos considerado las propiedades de una onda electromagnética E.M monocromática en el espacio vacío, sin embargo en la naturaleza esta situación es poco frecuente, de hecho esta situación es en general controlada artificialmente en un laboratorio (por ejemplo un LASER). Más en general la mayoría de las fuentes E.M emiten a un conjunto continuo de frecuencias a diferentes amplitudes por lo que se espera que la onda resultante sea una mezcla. Consideremos esta mezcla usando el principio de superposición  $N \rightarrow \infty$  con número de onda  $k_j$  donde la frecuencia de la onda es compuesta por una mezcla de ondas y en general dependerá de  $k$ ,

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \sum_j \vec{E}_0^j e^{i(\vec{k}_j \cdot \vec{x} - \omega(k)t)}, \quad (5.67)$$

donde la suma es sobre las tres variables del vector de onda  $\vec{k}_j$ . Podemos identificar esta suma por una integral si  $\vec{k}_j = j(\vec{\Delta}k)$  además la onda es periódica en una caja de volumen arbitrario  $V = L^3$ ,

$$\vec{E}(x+L, y, z, t) = \vec{E}(\vec{x}, t)\vec{E}(x, y+L, z, t) = \vec{E}(\vec{x}, t)\vec{E}(x, y, z+L, t) = \vec{E}(\vec{x}, t),$$

esto implica que  $\vec{k}_j = m(2\pi)/L$ , con  $m$  un entero. De esto se sigue que podemos reescribir la suma

$$\Sigma_j = (V/(2\pi)^3) \int d^3k \Rightarrow$$

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (V/(2\pi)^3) \int d^3k \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(k)t)}, \quad (5.68)$$

donde podemos conocer en principio la amplitud  $\vec{E}_0(\vec{k})$  a partir de la condición inicial para el campo  $\vec{E}(\vec{x}, 0) = \vec{E}_0$ ,

$$\vec{E}(\vec{x}, 0) = (V/(2\pi)^3) \int d^3k \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x})},$$

lo cual se puede invertir usando la ecuación 1.70 de la parte introductoria,

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = (1/V) \int d^3x \vec{E}(\vec{x}, 0) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x})}.$$

Supongamos que la onda tiene como vector de onda principal un valor  $k_0$  en la dirección  $z$  por ejemplo, ver figura 5.1 . Podemos ahora desarrollar en taylor  $\omega(k)$  alrededor de  $k_0$ ,

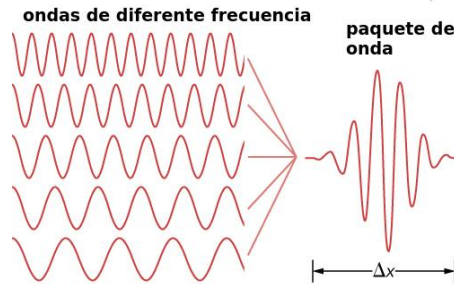


Figura 5.1: Paquete de onda

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{d\omega}{dk}(\Delta k) + \dots, \quad (5.69)$$

sustituyendo en 5.68 (en una dimensión) se tiene

$$\vec{E}(z, t) = (L_z/(2\pi)) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{E}(k) e^{i(\Delta k)(z - \frac{d\omega}{dk} t)}. \quad (5.70)$$

De la ecuación 5.70 podemos hacer varias observaciones; la primera es que ahora tenemos el campo eléctrico como función de una componente similar a la de una onda monocromática con velocidad (fase)  $\omega/k_0$ , como las cantidades a medir, e.g la densidad de energía, el vector de Poynting etc, depende como ya vimos del cuadrado ( $E^2 = E^* E$ ) de  $E$  entonces este factor  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$  se cancela en este caso y no tiene relevancia física en la dispersión.

Por otro lado el factor de mezcla  $\int_{-\infty}^{\infty} dk \vec{E}(k) e^{i(\Delta k)(z - \frac{d\omega}{dk} t)}$  en general no se cancela al elevar al cuadrado (por ejemplo la suma de dos ondas;  $\vec{E}(k) = \vec{E}_1 \delta(k - k_1) + \vec{E}_2 \delta(k - k_2)$ ) y entonces podemos interpretar que este paquete se mueve en dirección  $z$  con velocidad  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ , la cual se llama velocidad de grupo y se usa para caracterizar los efectos dispersivos de la onda. Podemos generalizar este resultado en tres dimensiones de forma trivial,

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}_k \omega. \quad (5.71)$$

Es claro que la velocidad de grupo y la velocidad de fase en general no coinciden, si este fuera el caso simplemente se tiene un medio no dispersivo y la onda debería ser del tipo monocromático.

### 5.3.2. Modelo de Drude para metales

Como vimos en la sección 4 de estas notas, donde discutimos un modelo simple de como entender el concepto de conductividad en un medio con un campo constante aplicado a un conductor. Ahora por ejemplo sabemos que tanto un metal como el Cobre así como una solución iónica (agua con NaCl) tienen propiedades de conducción (corriente continua) similares o incluso hasta comparables, pero su comportamiento al estar sometidos a campos electromagnéticos a alta frecuencia (región de frecuencia del espectro visible, por ejemplo) tienen comportamientos muy diferenciados, por un lado el Cobre (y en general todos los considerados buenos metales) son reflectantes y en el caso de la solución iónica el medio es mucho más translúcido. Esto nos demuestra que un buen conductor no tiene porque ser un buen reflectante, esta situación puede explicarse si consideramos que la conductividad  $\sigma$  puede depender de la frecuencia  $\omega$ , para ello existen varios acercamientos teóricos de los cuales examinaremos uno de los más conocidos modelo de Drude.

El modelo de Drude introduce una dependencia en la conductividad con la frecuencia de la radiación incidente y es considerado la aproximación clásica para describir el gas de electrones libres. A pesar de su sencillez, el modelo da predicciones cualitativamente correctas tales como la conductividad, y en propiedades ópticas. Por otro lado predice, incorrectamente, caminos libres medios comparables al parámetro de la red del cristal (consistente con la



idea de Drude de que los iones son los responsables de las colisiones de los electrones). A pesar de sus deficiencias el modelo es bastante genérico y puede ser aplicado en materiales complejos.

Para empezar consideremos un material donde los electrones pueden ser considerados libres, como por ejemplo un metal, en este caso (al igual que como vimos en la sección 4) debemos considerar que entre cada colisión que hay entre un electrón con un ion hay un tiempo de relajación  $\tau$  distinto de cero. A primer orden podemos considerar que la probabilidad de colisión entre electrones e iones en un tiempo  $dt \ll \tau$  es  $dt/\tau$  mientras por otro lado la probabilidad de no colisión debe ser  $1 - dt/\tau$ .

Si ahora introducimos un campo eléctrico variable en el tiempo, podemos considerar la situación física de que cuando no haya colisión el electrón se comporta como partícula libre y puede adquirir un momento  $-e\vec{E}dt$ , por lo que el momento  $\vec{p}(t + dt)$  debe ser proporcional a la probabilidad de no colisión por el momento total adquirido en el tiempo  $dt$ ,

$$\begin{aligned}\vec{p}(t + dt) &= \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) \left(\vec{p}(t) - e\vec{E}dt + O(dt^2)\right) \\ &= \vec{p}(t) - \frac{dt}{\tau}\vec{p}(t) - e\vec{E}dt + O(dt^2).\end{aligned}\quad (5.72)$$

Ahora reagrupamos el término  $\vec{p}$  del lado izquierdo y dividimos entre  $dt$  en la ecuación 5.72 y tomamos el límite a cero de esta cantidad,

$$\frac{d}{dt}\vec{p}(t) = -\frac{\vec{p}(t)}{\tau} - e\vec{E}(t).\quad (5.73)$$

Como mencionamos al principio introducimos un campo eléctrico variable del tipo  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ , donde además ignoraremos el comportamiento transitivo de la ecuación 5.73 el cual decae exponencialmente rápido, resolviendo esta ecuación con las técnicas de la sección 4, es decir, proponiendo la solución  $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t - \phi}$  (por simplicidad matemática omitiremos la fase), se tiene

$$\vec{p} = \frac{-e\tau E_0 e^{-i\omega t}}{1 - i\omega\tau},\quad (5.74)$$

de aquí podemos establecer la corriente producida por el campo como,

$$\vec{J} = n\vec{v} = n \frac{-e\tau \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}{m(1 - i\omega\tau)} = \frac{\sigma_0 \vec{E}}{1 - i\omega\tau},\quad (5.75)$$

donde  $\sigma_0 = -e\tau/m$  como en la ecuación 4.11. Es evidente que ahora podemos definir la conductividad como  $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 - i\omega\tau)$ .

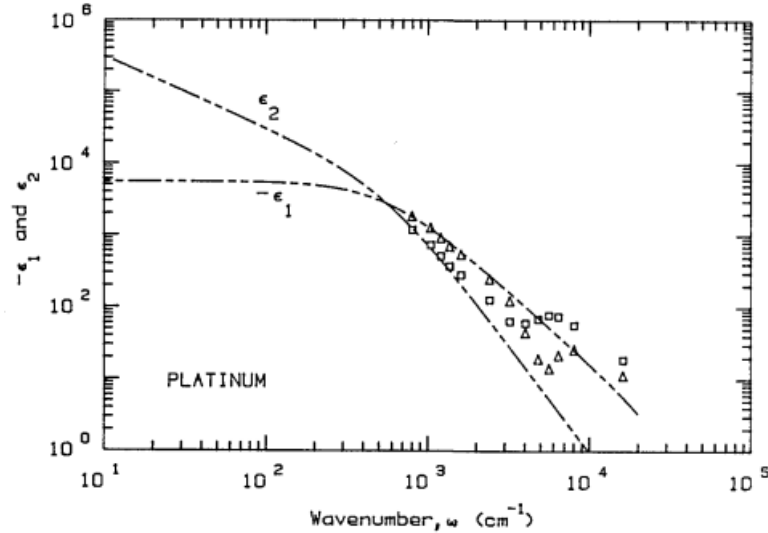


Figura 5.2: Valores de  $\epsilon_1$  real y  $\epsilon_2$  imaginaria ( $\frac{\omega}{k} = 1/\sqrt{\epsilon}$ ) para el modelo de Drude, comparado con datos del Platino.

Considérese el caso donde no hay cargas libres en el medio donde incide la radiación,  $\rho = 0$  y además considérese que el campo electromagnético incide monocromático al material, es decir tiene la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}$  y tomemos la ecuación 5.37 e introduzcamos la expresión para la corriente de 5.75,

$$-\nabla^2 \vec{E} = i\mu_0 \sigma(\omega) \omega \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \right) \vec{E},$$

de aquí es obvio que aplicando la parte espacial de la ecuación anterior se llega a la relación de dispersión,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \epsilon_0} \right). \quad (5.76)$$

Podemos poner de forma explícita la expresión anterior usando 5.75, lo que evidentemente nos da un número de onda complejo, donde la parte imaginaria es un término de amortiguamiento de la onda incidente, que también se conoce como la inductancia cinética la cual describe el hecho de que a muy altas frecuencias el movimiento electrónico no puede seguir el campo eléctrico incidente, esto tiene importancia en el modelado de transistores de alto rendimiento y otros dispositivos electrónicos de alta velocidad,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\sigma_0 \tau}{\epsilon_0 (1 + (\omega \tau)^2)} + \frac{i\sigma_0}{\omega \epsilon_0 (1 + (\omega \tau)^2)} \right).$$

Elemento	$\lambda$ Teórico $10^3$ A	$\lambda$ Experimental $10^3$ A
Li	1.5	2.0
Na	2.0	2.1
K	2.8	3.1
Rb	3.1	3.6
Cs	3.5	4.4

Cuadro 5.1: Valores teóricos y experimentales para las longitudes de onda de plasma.

Podemos definir la frecuencia de plasma  $\omega_p^2 = \frac{\sigma_0}{\tau \epsilon_0}$ , la cual tiene el significado físico debido al origen de una fuerza de restauración debido a los potenciales de Coulomb entre una fluctuación en la densidad de carga negativa de electrones y los núcleos de iones positivos que dan lugar a una frecuencia de oscilación característica.

Por ejemplo en el caso donde  $\tau\omega \gg 1$  la relación de dispersión se puede simplificar a

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right),$$

obsérvese que en este caso cuando  $\omega < \omega_p$  el vector de onda es negativo y el campo no puede penetrar en la muestra. La luz con frecuencia angular por debajo de la frecuencia del plasma se reflejará totalmente. Por encima de la frecuencia del plasma, las ondas pueden penetrar en la muestra. El modelo de Drude funciona bastante bien para metales como se muestra en la tabla 5.3.2.

Con ayuda de las ecuaciones 5.76 y 5.75 podemos obtener la velocidad de grupo de forma directa usando la expresión 5.66,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} < c,$$

obsérvese que en el caso donde la frecuencia es menor a la frecuencia de plasma la velocidad de grupo es imaginaria, lo que indica que la onda se refleja. En el otro caso la velocidad de grupo es positiva pero menor a la velocidad de la luz.

Finalmente veamos si podemos explicar con el modelo de Drude la absorción de radiación (luz visible, por ejemplo) para un metal y una solución ionizada. En el primer caso el tiempo de relajación es  $\tau \sim 1A/v_e$ , donde la velocidad de los electrones en un metal es del orden de  $10^6$  m/s, para el segundo caso  $\tau \sim \lambda/v_{ion}$ , donde  $\lambda$  es el camino libre medio que es del orden

de 100 nm y donde la velocidad del ion es del orden  $10^3$  m/s, esto se debe a que los iones en el líquido se modelan razonablemente bien como un gas ideal. De aquí evidentemente tenemos que  $\tau_{ion} \gg \tau_e$  ( $\omega_{pe} \sim 10^{16}$  rads) y por ende la frecuencia de plasma de la solución ionizada es mucho menor que la frecuencia para un metal, así que si en un metal la luz se refleja en la solución la luz debe de tener una frecuencia mucho mayor que la de plasma y por ende la luz atraviesa el medio!, esto seguirá así hasta que la onda avance lo suficiente para que el atenuamiento dado en 5.76 empiece a absorber el campo de la onda.

#### 5.4. Potenciales y transformaciones de gauge

Las ecuaciones de Maxwell conforman un conjunto de 8 ecuaciones diferenciales parciales para las 6 componentes del campo electromagnético. A menudo es conveniente reducir el número de variables. Esto puede ser conseguido expresando los campos en términos de **potenciales electromagnéticos**, de modo que las ecuaciones homogéneas de Maxwell sean satisfechas automáticamente y el número de campos a determinar se reduce a 4. Estos potenciales se reducen en los casos estacionarios al conocido potencial electrostático y al potencial vectorial magnético.

En el caso dinámico general, de (5.9) podemos concluir que  $\vec{B}$  puede ser derivado de un **potencial vectorial**:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.} \quad (5.77)$$

Usando esto en (5.11), obtenemos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (5.78)$$

es decir,

$$\vec{\nabla} \times \left[ \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = \vec{0}. \quad (5.79)$$

De aquí vemos que el campo vectorial dado por la suma  $\vec{E} + \partial \vec{A} / \partial t$  puede ser escrito como gradiente de un campo escalar, esto es:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (5.80)$$

de donde

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.} \quad (5.81)$$

Las ecuaciones (5.77) y (5.81) muestran que el campo electromagnético puede ser escrito en términos de un potencial vectorial  $\vec{A}$  y de un potencial

escalar  $\phi$ . Sin embargo, estas funciones no son únicas para  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  dados. Es fácil verificar que el campo electromagnético (y consecuentemente todas las predicciones de la teoría electromagnética) permanece invariante (es decir, con igual valor) bajo las siguientes transformaciones de los potenciales,

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}}, \quad (5.82) \text{ Transformaciones de gauge}$$

conocidas como **transformaciones de gauge** y donde  $\chi = \chi(\vec{x}, t)$  es una función escalar arbitraria del espacio-tiempo<sup>4</sup>.

### Ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en términos de los potenciales

Consideremos el caso de un medio lineal, isótropo y homogéneo. Usando (5.77) y (5.81) en las ecuaciones inhomogéneas (5.8) y (5.10) encontramos:

$$\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (5.83)$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\mu\vec{J}. \quad (5.84)$$

De esta forma, hemos reducido las ecuaciones de Maxwell a un conjunto de 4 ecuaciones diferenciales parciales para los 4 potenciales. Sin embargo, estas ecuaciones no determinan completamente los potenciales, puesto que las transformaciones de gauge (5.82) dejan invariantes (5.83) y (5.83). Esto es natural ya que estas ecuaciones dependen en realidad de los campos eléctrico y magnético, y como vimos las transformaciones de gauge no cambian los valores de estos campos. Además, las ecuaciones (5.83) y (5.83) están acopladas, en el sentido que cada una de estas ecuaciones involucra ambos potenciales electromagnéticos.

Es posible explotar la “**libertad de gauge**” de la electrodinámica (es decir, el hecho que los potenciales no son únicos) para simplificar algunos cálculos. Una forma de hacer esto es trabajar con potenciales que satisfagan alguna condición extra o **gauge**. De hecho, el imponer condiciones extras a los potenciales no sólo es conveniente, sino también necesario, ya que las ecuaciones (5.83) y (5.83) no determinan en forma única los campos  $\phi$  y  $\vec{A}$ . Es posible imponer infinitos gauges diferentes para los potenciales (siempre que sean consistentes con las ecuaciones de Maxwell), pero existen algunos de especial utilidad y popularidad.

<sup>4</sup>La invariancia de la teoría electromagnética bajo transformaciones de gauge desempeña un rol muy importante. La generalización de esta propiedad de invarianza a **grupos de simetría interna** permitió formular teorías consistentes para las **interacciones débiles** unificadas con la electromagnética (**electrodébil**) y para la **interacción fuerte** (cromo dinámica cuántica). La **interacción gravitacional** también puede ser descrita, con algunas peculiaridades, como una teoría de gauge.

**Gauge de Coulomb**

Si el potencial vectorial satisface

Gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0, \quad (5.85)$$

se dice que se satisface el **gauge de Coulomb**, **gauge de radiación** o **gauge transversal**. En este caso (5.83) y (5.84) se reducen a

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad (5.86)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right). \quad (5.87)$$

Para probar que siempre es posible imponer la condición de gauge de Coulomb, podemos considerar el caso en que inicialmente se trabaje con potenciales  $\phi_0$  y  $\vec{A}_0$  que no satisfacen la condición (5.85), es decir,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \neq 0$ , y luego demostrar que es posible realizar una transformación de gauge (5.82) con una función  $\chi$  tal que los nuevos potenciales sí satisfagan (5.85). Usando (5.82b) requerimos entonces que el nuevo potencial vectorial satisfaga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_0 - \vec{\nabla} \chi) \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.88)$$

Esto implica, como condición necesaria y suficiente, que la función  $\chi$  debe satisfacer

$$\nabla^2 \chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0, \quad (5.89)$$

es decir, la ecuación de Poisson con una “fuente” conocida ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0$ , dados los potenciales originales). Ya que han sido demostrados **teoremas de existencia** para esta ecuación, es decir, que ella siempre tiene soluciones, queda demostrado que es posible imponer el gauge de Coulomb. Note, sin embargo, que la función  $\chi$  que determina los nuevos potenciales que satisfacen el gauge de Coulomb no es única, ya que si  $\chi_1$  es solución de (5.89) entonces  $\chi_2 = \chi_1 + \tilde{\chi}$  también es solución, siempre que  $\tilde{\chi}$  sea una solución de la ecuación de Laplace ( $\nabla^2 \tilde{\chi} = 0$ ). Existe entonces una “**libertad remanente**” para seguir realizando transformaciones de gauge, generadas por funciones  $\tilde{\chi}$  que satisfacen la ecuación de Laplace, y que permiten imponer algunas condiciones<sup>5</sup> adicionales a los potenciales, siempre dentro de la “familia de potenciales” que satisface el gauge de Coulomb.

Una de las conveniencias de este gauge es que la ecuación (5.86) tiene la misma forma que en el caso electrostático<sup>6</sup>. Debido a esto, y usando la “libertad remanente” mencionada anteriormente, es posible elegir<sup>7</sup> el potencial

<sup>5</sup>Ojo: no cualquier condición, sino aquellas que sean compatibles con el resto de las condiciones, y con las ecuaciones de Maxwell.

<sup>6</sup>Se dice por esto que es “coulombiano”, de ahí uno de los nombres asociados a este gauge.

<sup>7</sup>¡Pruebe esta afirmación!

escalar de la forma siguiente:

$$\boxed{\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'.} \quad (5.90)$$

Esta solución para el potencial puede entonces ser reemplazada en el lado derecho de (5.87). A partir de (5.90), y usando la ecuación de continuidad, podemos escribir el segundo término del lado derecho de (5.87) sólo en términos de la densidad de corriente, ya que

$$\vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \right) \quad (5.91)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{\nabla} \int \frac{\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (5.92)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{\nabla} \int \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (5.93)$$

Con esto, la ecuación (5.87) se reduce a

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}_T,} \quad (5.94)$$

donde hemos introducido la **componente transversal de la densidad de corriente**

$$\vec{J}_T := \vec{J} - \frac{1}{c^2\mu} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (5.95)$$

$$= \vec{J} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (5.96)$$

Se dice que este campo es transversal porque satisface

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T \equiv 0. \quad (5.97)$$

En resumen, en el gauge de Coulomb el potencial vectorial satisface la ecuación de onda inhomogénea, con un término fuente determinado sólo por la componente transversal de la densidad de corriente. Además, en este gauge sólo el potencial vectorial contribuye a los **campos radiativos**<sup>8</sup>. En cambio, el potencial escalar (5.90) es no-radiativo como consecuencia de que su valor decae al menos tan rápido como  $1/r$  a grandes distancias de la fuente.

El gauge de Coulomb es a menudo usado en regiones donde no hay fuentes presentes. En este caso es posible elegir  $\phi = 0$ , ver (5.90), de modo que toda la información del campo electromagnético está contenida en el potencial vectorial  $\vec{A}$ .

<sup>8</sup>Como veremos en el capítulo ??, se dice que un campo electromagnético es radiativo si su contribución a la energía radiada muy lejos de las fuentes (“en el infinito”) es no nula.

### Gauge de Lorenz

Otro gauge común es el **gauge de Lorenz**<sup>9</sup>, que usualmente es escrito como

$$\text{Gauge de Lorenz} \quad \boxed{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \stackrel{!}{=} 0}, \quad (5.98)$$

y que permite desacoplar las ecuaciones (5.83) y (5.84). En efecto, si (5.98) es satisfecha entonces (5.83) y (5.84) se reducen a

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (5.99)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \quad (5.100)$$

o, introduciendo el **operador de onda** (u operador de d' Alembert<sup>10</sup>),  $\square := c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 - \nabla^2$ ,

$$\square \phi = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (5.101)$$

$$\square \vec{A} = \mu \vec{J}. \quad (5.102)$$

Análogamente al caso del gauge de Coulomb, puede probarse que el gauge de Lorenz siempre puede ser impuesto, considerando que inicialmente se usen potenciales ( $\phi_0$  y  $\vec{A}_0$ ) que no lo satisfacen, y mostrando que puede encontrarse una función  $\chi$  que genere la transformación de gauge apropiada para que los nuevos potenciales sí la satisfagan. En este caso, la condición sobre la función  $\chi$  requerida es que

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (5.103)$$

$$= \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \phi_0 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{A}_0 - \vec{\nabla} \chi \right) \quad (5.104)$$

$$= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \nabla^2 \chi, \quad (5.105)$$

es decir, que satisfaga la ecuación de onda inhomogénea:

$$\square \chi = - \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_0 \right). \quad (5.106)$$

La existencia de soluciones de esta ecuación está garantizada. Análogamente al caso del gauge de Coulomb, la función buscada no es única, sino que existe

<sup>9</sup>Nombrado en recuerdo de Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891): Matemático y Físico Danés. Ver [http://es.wikipedia.org/wiki/Ludvig\\_Lorenz](http://es.wikipedia.org/wiki/Ludvig_Lorenz), quien consideró esta elección en 1867.

<sup>10</sup>Jean Le Rond d' Alembert (1717-1783): matemático, filósofo y enciclopedista francés. Ver [http://es.wikipedia.org/wiki/Jean\\_le\\_Rond\\_d%27Alembert](http://es.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert).



una libertad remanente para realizar transformaciones de gauge “dentro del gauge de Lorenz”, generadas por funciones  $\tilde{\chi}$  que satisfagan la ecuación de onda,  $\square\tilde{\chi} = 0$ .

El gauge de Lorenz es usado comúnmente en el contexto de la teoría de Especial de la Relatividad, ya que en el vacío (cuando  $\varepsilon = \varepsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$  y por lo tanto  $c = c_0$ ) la condición (5.98) así como (5.101) y (5.102), mantienen su forma inalterada en cualquier sistema de referencia inercial (son covariantes bajo transformaciones de Lorentz). Esto tiene como consecuencia que toda expresión que involucre a los potenciales electromagnéticos (que satisfagan el gauge de Lorenz) tendrá la misma forma en todo Sistema de Referencia Inercial. Esto no ocurre, por ejemplo, si se usan potenciales que satisfagan el gauge de Coulomb.



---

## Introducción a la teoría Especial de la Relatividad

---

*“ El científico no estudia la naturaleza solo porque es útil hacerlo. Lo estudia porque le gusta, y le gusta porque es hermoso. Si la naturaleza no fuera bella, no valdría la pena conocerla, y la vida no valdría la pena. ”*

– Henri Poincaré

### 6.1. Situación previa a 1905

La mecánica newtoniana respeta el Principio de Relatividad y el carácter absoluto del tiempo. Esto significa que **todos los SRI's (sistemas de referencia inerciales) son equivalentes entre sí** o, en otras palabras, que **es imposible distinguir si se está en un SRI o en otro realizando experimentos mecánicos**. Lo anterior se manifiesta en que las ecuaciones que describen los sistemas mecánicos (por ejemplo, la segunda ley de Newton para partículas bajo interacción gravitacional) son invariantes de forma (o covariantes) bajo las transformaciones (de Galileo) que relacionan las cantidades físicas entre SRI's.

En mecánica newtoniana, y de acuerdo a las transformaciones de Galileo, la posición y velocidad de un cuerpo son cantidades relativas, es decir, dependen del SRI respecto al cual se describe el movimiento.

En particular, una onda mecánica (por ejemplo, el sonido) tiene una velocidad de propagación que depende del SRI respecto al que se describan sus propiedades. Al mismo tiempo, existe usualmente un SRI privilegiado

respecto al cual la velocidad de propagación adquiere algún valor especial o destacado. Por ejemplo, cuando decimos que “la velocidad del sonido en el aire es de  $\approx 343 \text{ m/s}$ , ¿respecto a qué SRI estamos refiriendo esta velocidad?. Es instructivo verificar (por ejemplo, analizando la ecuación de las ondas sonoras, derivada a partir de las ecuaciones de un fluido) que la respuesta a esta pregunta puede formularse como “respecto al SRI en el que las moléculas del aire están, en promedio, en reposo” o, en forma más condensada “respecto al SRI comóvil con el aire”.

Por otro lado, las ecuaciones que describen la electrodinámica clásica, las ecuaciones de Maxwell (1864), predicen que existen perturbaciones del campo electromagnético que pueden propagarse<sup>1</sup> con una velocidad bien definida:  $v_{\text{em}} = c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ . Si, como indica la mecánica newtoniana, las velocidades son siempre relativas, ¿con respecto a qué sistema de referencia tienen las ondas electromagnéticas este valor?. La explicación que parece más natural dentro del contexto de la mecánica newtoniana es que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas tiene el valor  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  sólo con respecto a un SRI particular, especial, que probablemente sea el SR donde el “medio” por el cual se propagan estas ondas está en reposo (en analogía con el caso sonoro). Los físicos de fines del siglo XIX y comienzos del XX denominaban este medio como el éter (luminífero). Adicionalmente, si esto es correcto y la velocidad de la luz es relativa, entonces debe ser posible detectar experimentalmente efectos del cambio de velocidad, por ejemplo, a través de experimentos interferométricos como los de Michelson y Morley.

### 6.1.1. Transformaciones de Galileo\*

Las transformaciones de Galileo, expresan la relación entre las coordenadas espaciotemporales de un evento cualquiera respecto a dos observadores inerciales con velocidad relativa  $\vec{v}$ , en el contexto de la mecánica de Newton.

Podemos derivar las transformaciones de Galileo usando el principio de relatividad y el carácter absoluto del tiempo. Considere un evento cualquiera  $A$ , con coordenadas  $(t, \vec{x})$  con respecto a un SRI  $K$  y  $(t', \vec{x}')$  con respecto a otro SRI  $K'$ . Considere un cuerpo (ficticio) que se mueve libre de fuerzas y que pasa por el evento  $A$ . Ya que este cuerpo ficticio se mueve libremente, su trayectoria será una línea recta, de modo que

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t, \tag{6.1}$$

con respecto a  $K$ . Del Principio de Relatividad, la trayectoria respecto a  $K'$  es de la misma forma, es decir,

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}'_0 + \vec{v}'_0 t'. \tag{6.2}$$

---

<sup>1</sup>y transmitir energía, momento lineal y momento angular.

Si el tiempo es absoluto, entonces los intervalos de tiempo entre cualquier evento son iguales,  $dt = dt'$ . Sincronizando los relojes de  $K$  y  $K'$  de modo que concidan inicialmente,  $t = 0$  para  $t' = 0$ , entonces  $t = t'$ . De la diferencia entre (6.1) y (6.2) encontramos que podemos relacionar las coordenadas del evento (arbitrario)  $A$  respecto a  $K$  y  $K'$  de la forma siguiente:

$$\vec{x}'_A = \vec{x}_A - \vec{b} - \vec{v}t_A, \quad (6.3)$$

con  $\vec{b} := \vec{x}_0 - \vec{x}'_0$ , y con  $\vec{v} := \vec{v}_0 - \vec{v}'_0$ . Como el evento  $A$  es arbitrario, se acostumbra escribir simplemente

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{b} - \vec{v}t, \quad (6.4)$$

La transformación (6.4), junto con  $t = t'$  es conocida como transformación de Galileo. El vector  $\vec{b}$  es la posición del origen del sistema  $K'$  con respecto al  $K$  en el instante  $t = 0$ , mientras que  $\vec{v}$  la velocidad de  $K'$  respecto a  $K$ .

Como consecuencia, las velocidades de un cuerpo "1" respecto a  $K$  y  $K'$  se relacionan por

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}. \quad (6.5)$$

### 6.1.2. El experimento de Michelson-Morley

El experimento de Michelson<sup>2</sup>-Morley<sup>3</sup> [?] consistía en un interferómetro, usado para medir la diferencia de tiempo de vuelo de dos rayos de luz y, en particular, de cómo estos tiempos de vuelos dependían de la orientación del interferómetro respecto de la dirección de movimiento del supuesto éter. En otras palabras, se esperaba que el interferómetro permitiera detectar efectos del movimiento de la Tierra (es decir, del interferómetro) respecto del éter.

Se lanzaba un rayo de luz de una longitud de onda conocida (con una lámpara de sodio) que incidía en un espejo semiplatedado y luego sobre dos espejos, tal como lo indica la figura 6.1.

Si existe alguna diferencia entre las longitudes de los brazos del interferómetro, aparecerá un patrón de interferencia. Lo mismo ocurre si los rayos se mueven a velocidades diferentes a lo largo de cada brazo. Asumiremos por simplicidad que el éter se mueve con velocidad  $v$  a lo largo del eje  $AB$ .

Asumiendo que la velocidad de la luz tiene el valor conocido  $c$  respecto al SR comóvil con el éter entonces, de acuerdo a la mecánica de Newton, la velocidad de la luz respecto al interferómetro, en su viaje de  $A$  a  $B$ , es  $c + v$ , mientras que en el viaje de regreso de  $B$  a  $A$ , es  $c - v$ . Por lo tanto, el tiempo de vuelo entre de  $A$  a  $B$  y vuelta a  $A$  es

$$t_{ABA} = \frac{L_{AB}}{c + v} + \frac{L_{AB}}{c - v} = \frac{2L_{AB}}{c} \frac{1}{1 - \beta^2}, \quad (6.6)$$

<sup>2</sup>Albert Abraham Michelson (1852-1931): físico estadounidense.

<sup>3</sup>Edward Williams Morley (1838-1923): químico y físico estadounidense.

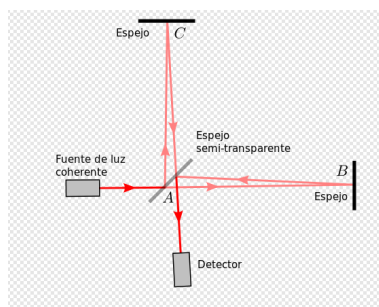


Figura 6.1: Esquema del interferómetro

con  $\beta := v/c$ . Por otro lado, el tiempo que tarda en ir de  $A$  a  $C$  conviene calcularlo en el SR comóvil con el éter. En este caso, la propagación entre  $A$  y  $C$  se realiza como indica la figura 6.2.

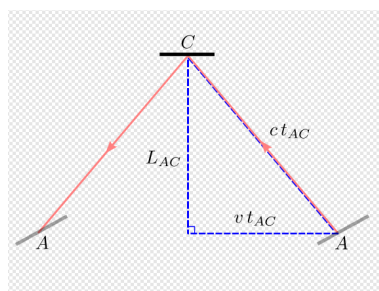


Figura 6.2: Propagación en el segunda brazo, respecto a un SR comóvil con el éter.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo indicado en la figura 6.2 encontramos:

$$d^2 = c^2 t_{AC}^2 = L_{AC}^2 + (vt_{AC})^2. \quad (6.7)$$

De aquí, obtenemos

$$t_{AC} = \frac{L_{AC}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (6.8)$$

y, por lo tanto,

$$t_{ACA} = \frac{2L_{AC}}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.9)$$

La diferencia de tiempos de vuelo  $\Delta t := t_{ABA} - t_{ACA}$  es entonces

$$\Delta t = \frac{2}{c} \left[ \frac{L_{AB}}{1 - \beta^2} - \frac{L_{AC}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right]. \quad (6.10)$$

Asumiendo que la velocidad del interferómetro respecto al éter es pequeña comparada con  $c$ , entonces podemos expandir en potencias de  $\beta$  y obtener

$$\Delta t \approx \frac{2}{c} \left[ (L_{AB} - L_{AC}) + \beta^2 (L_{AB} - \frac{1}{2} L_{AC}) \right]. \quad (6.11)$$

Análogamente, si se rota el interferómetro noventa grados, entonces

$$\Delta t' \approx \frac{2}{c} \left[ (L_{AB} - L_{AC}) + \beta^2 \left( \frac{L_{AB}}{2} - L_{AC} \right) \right]. \quad (6.12)$$

Esta diferencia de tiempo entre ambas orientaciones determina una diferencia de fase:

$$\Delta \varphi = \omega(\Delta t - \Delta t') = 2\pi\nu(\Delta t - \Delta t') \approx 2\pi \frac{L}{\lambda} \beta^2, \quad (6.13)$$

donde  $L := (L_{AB} + L_{AC})/2$  es la longitud efectiva de los brazos del interferómetro.

En el interferómetro usado por Michelson y Morley se usaron múltiples reflexiones, con el fin de aumentar el valor efectivo de  $L$ , de modo que  $L \approx 11 \text{ m}$ ,  $\lambda \approx 5,9 \times 10^{-7} \text{ m}$ ,  $v \approx 3 \times 10^4 \text{ m/s}$  (la rapidez de la Tierra en su movimiento de traslación en torno al Sol) y  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , con lo que  $\Delta \varphi \approx 0,4\pi$ , que corresponde aproximadamente a un corrimiento de media franja en el patrón de interferencia, que debería ser posible de observar, dado el error experimental del experimento (que podía detectar corrimientos de aproximadamente 0,01 franjas).

Aún cuando el experimento se realizó múltiples veces, en diferentes épocas del año, (y se sigue repitiendo hasta la actualidad, cada vez con mayor precisión, ver [?]) el experimento de Michelson-Morley arroja un resultado nulo, es decir, ninguna variación observable del patrón de interferencia al variar la orientación del interferómetro respecto al éter.

Resumiendo: el experimento de Michelson-Morley, realizado con la intención de detectar variaciones de la velocidad de la luz respecto al éter y de esta forma poder determinar aquel SR especial en el que la velocidad de la luz es  $c$ , no suministra los resultados esperados. En otras palabras, la nula variación de las franjas de interferencia impide distinguir físicamente (dentro del error experimental) aquel supuesto SR en el que el éter está en reposo y la luz parece propagarse con una velocidad independiente del estado de movimiento del interferómetro.

Se intentó explicar el nulo resultado del experimento de Michelson-Morley manteniendo la teoría del éter y la mecánica newtoniana. Por ejemplo, Lorentz y FitzGerald<sup>4</sup> propusieron independientemente que el resultado nulo

<sup>4</sup>George Francis FitzGerald (1851-1901): físico irlandés.

del experimento de Michelson-Morley podía ser explicado asumiendo que el brazo del interferómetro orientado en la dirección del movimiento respecto al éter se contraía de modo que su longitud sería  $L'_{AB} = L_{AB}\sqrt{1 - \beta^2}$ . Ninguno de estos intentos condujo a una descripción completa y consistente. En 1905, Albert Einstein propuso su teoría de la Relatividad Especial, que asumiría como principio que la velocidad de la luz tiene el mismo valor en todo SRI, más aún, la equivalencia de todos los SRI's. Einstein además propuso que la luz se propaga en el vacío, desechando la idea del éter luminífero. Estos postulados, sin embargo, requieren cambiar los conceptos establecidos (“newtonianos”) de distancias y tiempos.

## 6.2. Principios de la Teoría de Relatividad Especial

Einstein construyó la teoría de la Relatividad Especial (RE) adoptando como postulados i) el Principio de Relatividad, es decir, la equivalencia completa (incluyendo fenómenos electromagnéticos) entre SRI's, y ii) el principio de constancia de la velocidad de la luz.

Antes de revisar el contenido físico de estos principios, introduciremos algunos conceptos básicos. Comenzaremos con los conceptos de evento y espacio-tiempo.

Llamaremos evento a “algo” que ocurre en una región limitada del espacio en un corto intervalo de tiempo. Idealizamos un evento como un punto en el espacio y un instante en el tiempo. Todos los procesos que ocurren en el universo constituyen eventos o conjunto de eventos.

El conjunto de todos los eventos en el Universo forma lo que denominamos espacio-tiempo. Asumiremos que entonces que el espacio-tiempo es un espacio (una variedad) cuatridimensional.

Ilustraremos los eventos en un diagrama de espacio-tiempo. Por ejemplo, un cuerpo con movimiento en una dimensión, ver figura 6.3. La curva que representa la secuencia de eventos que constituyen la “historia” de un cuerpo es llamada línea de mundo.

### 6.2.1. Principio de Relatividad

**Todos los sistemas de referencia inerciales (SRI's) son equivalentes.**



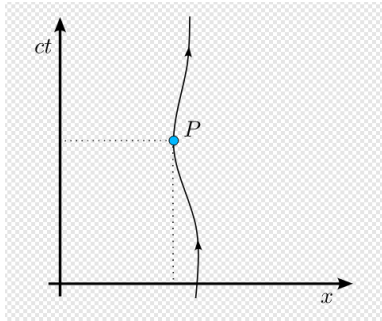


Figura 6.3: Diagrama de espacio-tiempo. Línea de mundo de una partícula.

Recuérdese que un SRI es aquel con respecto al cual un cuerpo sobre el que no actúan agentes externos (fuerzas) se mueve en línea recta a velocidad constante.

### 6.2.2. Principio de la constancia de la velocidad de la Luz

**velocidad (rapidez) de la luz tiene el mismo valor en todo SRI.**

Más detalladamente, esto significa que las señales luminosas se propagan, en el vacío, rectilíneamente con la misma rapidez ( $=: c$ ) en todo instante, en todas direcciones, en todos los SRI's, independiente del movimiento de sus fuentes. El resultado del experimento de Michelson-Morley es consistente con el principio de constancia de la velocidad de la luz.

Además, se asume (a partir de las observaciones y experimentalmente) que la interacción electromagnética (“la luz”) se propaga a la máxima velocidad posible. En otras palabras, no existe una señal (más rigurosamente, una forma de propagar energía) conocida que viaje con mayor rapidez que la luz.

Es importante destacar que la existencia de una velocidad máxima (finita!) de las interacciones es incompatible con el concepto de cuerpo rígido, puesto que éste es, por definición, un objeto ideal que no sufre deformaciones que alteren sus dimensiones (largo, ancho, ...).

Esta propiedad, sin embargo, requiere de la propagación instantánea de interacciones en el interior del cuerpo. Es necesario, por tanto, desechar el concepto de “cuerpo rígido”. Esto, por otra parte, obliga a desechar el concepto de “regla estándar”, que es (era) en el contexto newtoniano frecuentemente usado para definir patrones de longitud (metro patrón, etc.).

Por lo tanto, en la teoría de RE, la existencia de una velocidad máxima de propagación de las interacciones obliga a reducir el número de cantidades fí-

sicas en principio medibles independientemente sin ambigüedad, eliminando en general el concepto de distancia como concepto absoluto, y a reemplazarlo por el de medidas de tiempo.

De hecho, la definición actual del patrón de longitud en el Sistema Internacional (SI), el metro, se basa en medidas de tiempo. En 1983 (en la 17a conferencia de pesos y medidas) se acordó que<sup>5</sup>.

**El metro es la distancia que la luz recorre en 1/299792458 segundos.**

Como una consecuencia de esta definición, la rapidez de la luz es hoy una cantidad exacta con valor

$$c := 299,792,458 \text{ m/s.} \quad (6.14)$$

### 6.2.3. Definiendo posiciones y tiempos de eventos respecto a un SRI

Ya que no podemos recurrir a “reglas estándar”, debemos revisar cómo definimos la posición y el tiempo que un (observador en un) SRI asocia a un evento. En general, los únicos tiempos directamente medibles son los tiempos medidos por algún reloj (con algún estado de movimiento), entre eventos sobre su propia línea de mundo. Estos son los llamados tiempos propios asociados a un observador comóvil con el reloj. Es importante convencerse que no es posible medir directamente intervalos de tiempo entre eventos alejados de un reloj (de un observador dado).

En general, dado un evento  $P$  en el espacio-tiempo, definiremos la posición (distancia) y tiempo del evento con respecto a un SRI  $K$  dado, usando el siguiente procedimiento:

Un observador inercial (puntual) define un SRI  $K$  (de modo que él esté ubicado en su origen) enviando señales luminosas de modo que éstas sean reflejadas en cada evento  $P$  y vuelvan al observador. El observador dispone de un reloj, con el que mide los tiempos de salida de la señal,  $T_1$  y llegada  $T_2$ .

A partir de los datos medibles (tiempos propios)  $T_1$  y  $T_2$ , definimos la posición  $x$  de  $P$  respecto al observador (distancia observador - evento  $P$ ) y el tiempo  $t$  que  $K$  le asignará a  $P$  como:

$$x := \frac{c}{2}(T_2 - T_1), \quad t := \frac{1}{2}(T_2 + T_1). \quad (6.15)$$

---

<sup>5</sup>Recuerde además que, por definición, un segundo es “la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133”. Ver esta página del NIST para un resumen de las unidades en el S.I. e información de la historia asociada a cada unidad.

Diremos que, respecto al SRI  $K$ , el evento  $P$  ocurrió “en la posición  $x$  en el tiempo  $t$ ”.

Las relaciones inversas a (6.15) son las familiares expresiones

$$T_1 = t - \frac{x}{c}, \quad T_2 = t + \frac{x}{c}. \quad (6.16)$$

Es directo extender este procedimiento a mayores dimensiones (ejes  $y$  y  $z$ ), para así definir las coordena  $\vec{x} = (x, y, z)$  del evento  $P$  respecto a cada SRI. De este modo, podemos asociar a cada evento, respecto a un SRI, un conjunto de coordenadas  $x^\mu := (ct, x, y, z) = (ct, \vec{x})$ .

#### 6.2.4. Relacionando mediciones de tiempo entre dos observadores inerciales

Por simplicidad, consideraremos el caso simplificado de movimientos en una dimensión.

Considere dos observadores  $A$  y  $B$ , en reposo y moviéndose con velocidad constante respecto a un SRI  $K$ , respectivamente.

El observador  $A$  envía dos señales luminosas a  $B$ , en un intervalo de tiempo  $(\Delta T)_A$ , medido por  $A$ .

Asumiremos, como es razonable, que el intervalo de tiempo medido por  $B$  entre la llegada de los dos pulsos,  $(\Delta T)_B$ , es proporcional a  $(\Delta T)_A$ :

$$(\Delta T)_B = k(\Delta T)_A. \quad (6.17)$$

Adicionalmente, asumiremos que:

- $k$  es independiente del tiempo si  $A$  y  $B$  son observadores inerciales (OI's) (“homogeneidad bajo translaciones temporales”).
- $k$  es independiente de las posiciones de  $A$  y  $B$  (“homogeneidad bajo translaciones”).
- $k$  es independiente de la orientación relativa de  $A$  y  $B$  (“homogeneidad bajo rotaciones”).

Por otro lado, el Principio de Relatividad exige que la relación sea recíproca:

$$(\Delta T')_A = k(\Delta T')_B. \quad (6.18)$$

Note, sin embargo, que esta relación involucra intervalos de tiempo de pares de eventos distintos a los referidos en la relación (6.17).

### 6.2.5. Velocidad relativa de dos observadores inerciales

Considere dos OI's  $A$  y  $B$  que sincronizan sus relojes de modo que éstos marquen cero en el evento común  $O$ , y que además intercambian señales luminosas, tal como se ilustra en la figura 6.4.

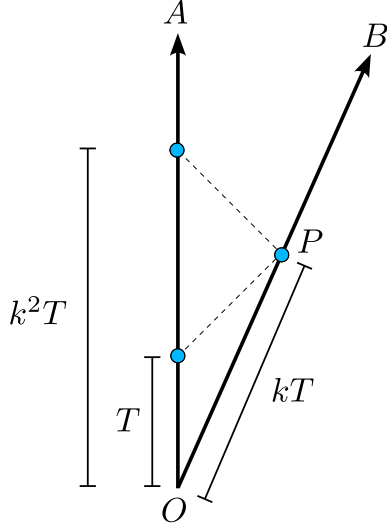


Figura 6.4: Diagrama para determinar la velocidad relativa.

Nos concentraremos en las coordenadas que  $A$  y  $B$  asignan al evento  $P$ , que pertenece a la línea de mundo de  $B$ . Las coordenadas  $(t, x)$  de  $P$  respecto a  $A$  son

$$t_A(P) = \frac{1}{2}(t_1 + t_2) = \frac{1}{2}(T + k^2T) = \frac{1}{2}(1 + k^2)T, \quad (6.19)$$

$$x_A(P) = \frac{c}{2}(k^2T - T) = \frac{c}{2}(k^2 - 1)T. \quad (6.20)$$

A medida que  $T$  cambia, las coordenadas del punto  $P$ ,  $t_A(P)$  y  $x_A(P)$ , definen la trayectoria de  $B$  respecto de  $A$ . Por tanto, podemos calcular la velocidad de  $B$  respecto de  $A$  como

$$v_{BA} := \frac{dx_A}{dt_A}(P) = \frac{c(k^2 - 1)}{1 + k^2}. \quad (6.21)$$

Despejando  $k_{AB}$  obtenemos

$$k_{AB} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{BA}}{c}}{1 - \frac{v_{BA}}{c}}}. \quad (6.22)$$

Con esto, la relación (6.17) puede escribirse como

$$(\Delta T)_B = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{BA}}{c}}{1 - \frac{v_{BA}}{c}}} (\Delta T)_A. \quad (6.23)$$

Observe que esta relación es universal en el sentido que conecta los intervalos de tiempo de cada par de eventos en la línea de mundo de dos observadores inerciales, siempre que éstos estén conectados por señales luminosas.

En particular, podemos aplicar esta relación al caso en que  $(\Delta T)_A$  y  $(\Delta T)_B$  son los periodos de una onda electromagnética que se propaga de  $A$  a  $B$ . En este caso, podemos reescribir (6.18) en términos de la frecuencia de la radiación:

$$\nu_B = \nu_A \sqrt{\frac{c - v_{BA}}{c + v_{BA}}}, \quad (6.24)$$

que es la expresión relativista para el cambio de frecuencia debido al movimiento relativo (efecto Doppler). Vemos entonces que:

- Si  $v_{BA} > 0$  (alejándose), entonces  $k_{AB} > 1$ ,  $\nu_B < \nu_A$ . Tenemos un corrimiento hacia el rojo (redshift).
- Si  $v_{BA} < 0$  (acercándose), entonces  $k_{AB} < 1$ ,  $\nu_B > \nu_A$ . Tenemos un corrimiento hacia el azul (blueshift).
- Si  $v_{BA}$  es reemplazado por  $-v_{BA}$ , entonces  $k_{AB}$  es reemplazado por  $1/k_{AB}$ , y  $\nu_A$  por  $\nu_B$ , respectivamente.

Es común en aplicaciones definir el redshift  $z$  por

$$z := \frac{\nu_A}{\nu_B} - 1. \quad (6.25)$$

Podemos verificar que si  $|v_{BA}| \ll c$  entonces

$$z = \frac{v_{BA}}{c} + O\left(\frac{v_{BA}^2}{c^2}\right), \quad (6.26)$$

de modo que se recupera la conocida relación no-relativista.

### 6.2.6. Composición de velocidades

Considere tres observadores inerciales  $A$ ,  $B$  y  $C$  que intercambian señales luminosas.

Entonces tenemos que

$$(\Delta T)_B = k_{AB}(\Delta T)_A, \quad (\Delta T)_C = k_{BC}(\Delta T)_B, \quad (\Delta T)_C = k_{AC}(\Delta T)_A. \quad (6.27)$$

De aquí obtenemos que

$$k_{AC} = k_{AB}k_{BC}. \quad (6.28)$$

Finalmente, usando las expresiones respectivas de los factores  $k$  en función de las velocidades relativas  $v_{CA}$ ,  $v_{BA}$  y  $v_{CB}$ , es decir,

$$k_{AB} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{BA}}{c}}{1 - \frac{v_{BA}}{c}}}, \quad k_{BC} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{CB}}{c}}{1 - \frac{v_{CB}}{c}}}, \quad k_{AC} = \sqrt{\frac{1 + \frac{v_{CA}}{c}}{1 - \frac{v_{CA}}{c}}}, \quad (6.29)$$

en (6.28), encontramos

$$v_{CA} = \frac{v_{BA} + v_{CB}}{1 + \frac{v_{BA}v_{CB}}{c^2}}. \quad (6.30)$$

Esta ley relativista de composición de velocidades (válida para un movimiento unidimensional) establece una velocidad absoluta, la velocidad de la luz. En efecto, si por ejemplo  $v_{CB} = c$  (más rigurosamente, en el límite  $v_{CB} \rightarrow c$ ), entonces  $v_{CA} = c$  independientemente del valor de  $v_{BA}$ . Este resultado es consistente con (en realidad, es una consecuencia de) nuestro postulado que la velocidad de la luz tiene el mismo valor con respecto a todo SRI. Además, puede verificarse [hágalo!] que si  $|v_{BA}| < c$  y  $|v_{CB}| < c$ , entonces (6.30) implica que  $|v_{CA}| < c$ . En otras palabras, la ley relativista de composición de velocidades preserva el hecho que la velocidad de los objetos (reales) siempre es menor que la velocidad de la luz, independiente del SRI respecto al cual se determine esta velocidad. Note que esto no ocurría en la teoría newtoniana.

### 6.2.7. Experimento de Fizeau\*

La ley relativista de composición de velocidades explica muy simplemente el resultado del experimento de Fizeau (1851), quien midió con técnicas interferométricas, la velocidad de propagación de la luz en el agua y su dependencia con la velocidad del agua.

él encontró que la velocidad de la luz respecto al agua es dada por

$$v' = \frac{c}{n} - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_{\text{agua}}, \quad (6.31)$$

donde  $n$  es el índice de refracción del agua, moviéndose con velocidad  $v_{\text{agua}}$ .

Esta expresión puede ser obtenida, a segundo orden, de (6.30) con  $v_{CA} = v'$ ,  $v_{BA} = -v_{\text{agua}}$  y  $v_{CB} = c/n$  como la velocidad de la luz respecto del agua en movimiento, del agua en reposo respecto al agua en movimiento y de la luz respecto al agua en reposo, respectivamente ( $A = \text{agua en movimiento}$ ,  $B = \text{agua en reposo}$ ,  $C = \text{luz}$ ):

$$v' = \frac{-v_{\text{agua}} + \frac{c}{n}}{1 - \frac{v_{\text{agua}}}{nc}} = \left(\frac{c}{n} - v_{\text{agua}}\right) \left(1 + \frac{v_{\text{agua}}}{nc} + O\left(\frac{v_{\text{agua}}^2}{c^2}\right)\right) = \frac{c}{n} - v_{\text{agua}} + \frac{v_{\text{agua}}}{n^2} + O\left(\frac{v_{\text{agua}}^2}{c^2}\right). \quad (6.32)$$

Antes de la formulación de la teoría especial de la relatividad, los resultados de este experimento se explicaban asumiendo que el agua en movimiento “arrastraba” parcialmente al éter, en una fracción ad-hoc.

### 6.2.8. Boosts de Lorentz V1

Ahora derivaremos la relación entre las coordenadas espaciotemporales  $(t, x)$  y  $(t', x')$  que dos SRI's  $K$  y  $K'$  asocian a un mismo evento  $P$ , ver figura

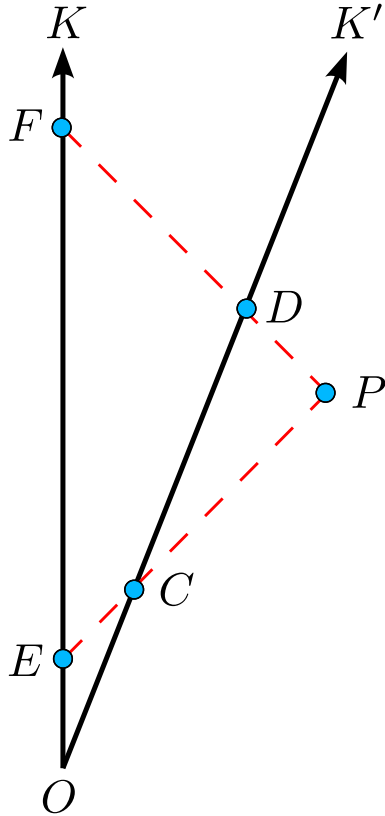


Figura 6.5: Diagrama para un boost.

6.5. Por simplicidad, consideraremos que  $x > 0$ ,  $x' > 0$ .

De acuerdo a las expresiones (6.16), como  $P$  tiene coordenadas  $(t, x)$  respecto de  $K$ , entonces el evento  $E$  ocurre en el tiempo (propio)  $t_E = t - x/c$  respecto de  $K$  y la “respuesta” llega en el evento  $F$ , con tiempo  $t_F = t + x/c$ . Similarmente, el evento  $C$  ocurre en  $t'_C = t' - x'/c$  respecto a  $K'$ , mientras que  $D$  ocurre  $t'_D = t' + x'/c$ .

Si  $K$  y  $K'$  tienen sus relojes sincronizados cuando pasan por el evento común  $O$ , entonces tenemos, del triángulo  $OEC$  de la figura 6.5, que  $t'_C = kt_E$ , es decir,

$$t' - \frac{x'}{c} = k \left( t - \frac{x}{c} \right), \quad (6.33)$$

donde  $k$  depende de la velocidad relativa  $V$  de  $K'$  respecto a  $K$ :

$$k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta := \frac{V}{c}. \quad (6.34)$$

Además, del triángulo  $ODF$  de la figura 6.5, obtenemos  $t_F = kt'_D$ , es decir,

$$t + \frac{x}{c} = k \left( t' + \frac{x'}{c} \right). \quad (6.35)$$

Usando (6.33), (6.34) y (6.35) podemos despejar  $x'$  y  $t'$  en función de  $x$ ,  $t$  y la velocidad relativa  $V$  (de  $K'$  con respecto a  $K$ ), obteniendo

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (6.36)$$

Definimos el “factor de Lorentz”  $\gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ , de modo que podemos escribir:

Boost 1D  $ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad x' = \gamma(x - \beta ct).$  (6.37)

Esta transformación es conocida como un boost (o transformación de Lorentz simple) en la dirección  $x$  y representa la transformación de las coordenadas espaciotemporales de un mismo evento desde un SRI  $K$  a otro  $K'$ , que se mueve con velocidad  $V$  con respecto al primero.

Es directo verificar que:

- Despejando  $(t, x)$  en función de  $(t', x')$  se obtiene la misma dependencia funcional que en (6.37), pero reemplazando  $V$  por  $-V$ , es decir,

$$ct = \gamma(ct' + \beta x'), \quad x = \gamma(x' + \beta ct'). \quad (6.38)$$

ésta es una manifestación del Principio de Relatividad.

- Dos boosts sucesivos con velocidades  $V_{BA}$  y  $V_{CB}$  es equivalente a un único boost con velocidad  $V_{CA}$ , dada por (6.30).
- En el límite en que la velocidad de la luz fuese infinita, es decir, si la luz se propagase instantáneamente, las transformaciones (6.36) se reducen a las transformaciones de Galileo:  $t' = t$ ,  $x' = x - Vt$ .
- A partir de (6.37) podemos derivar nuevamente la ley relativista de composición de velocidades. Si  $x(t)$  es la trayectoria de una partícula respecto al SRI  $K$ , entonces su velocidad es definida como  $v := dx/dt$ . Similarmente,  $v' = dx'/dt'$  es la velocidad respecto al SRI  $K'$ . Diferenciando (6.37) obtenemos:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{c\gamma(dx - \beta cdt)}{\gamma(cdt - \beta dx)} = \frac{c(v - \beta c)}{(c - \beta v)} = \frac{v - V}{1 - \frac{V \cdot v}{c^2}}. \quad (6.39)$$

La inversa de esta relación puede nuevamente obtenerse [compruébelo!] sustituyendo  $V$  por  $-V$ , es decir,

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V \cdot v'}{c^2}}, \quad (6.40)$$

que coincide con (6.30) (en este caso el SRI  $C$  corresponde a un sistema comóvil con la partícula y entonces  $v_{CA} = v$ ,  $v_{BA} = V$ ,  $v_{CB} = v'$ ).



- Considere dos eventos,  $P$  y  $Q$ , muy próximos en el espacio-tiempo. Sus coordenadas respecto a un SRI  $K$  son  $(ct, x)$  y  $(ct + cdt, x + dx)$ . Tanto  $dx^2$  como  $dt^2$  cambian sus valores de un SRI a otro, es decir, no son invariantes bajo un boost de Lorentz (6.37). Esto significa que (en nuestro ejemplo unidimensional) la distancia que un SRI asocia a un par de eventos no es una cantidad absoluta en RE, y similarmente para los intervalos de tiempo entre dos eventos. Sin embargo, la combinación

$$ds^2 := c^2 dt^2 - dx^2 \quad (6.41)$$

sí es invariante bajo (6.37), es decir, tiene el mismo valor en cualquier SRI. En efecto, un cálculo directo a partir de (6.37) muestra que

$$ds'^2 := c^2 dt'^2 - dx'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = ds^2. \quad (6.42)$$

En este sentido  $ds^2$  es una cantidad absoluta en la teoría de RE: no importa en qué SRI se calcule, su valor es siempre el mismo. Esta importante cantidad recibe el nombre de intervalo. Note que en general  $ds^2$  puede asumir valores positivos, negativos o nulos, dependiendo de la elección de los eventos  $P$  y  $Q$ .

En el caso de eventos sobre la trayectoria de una partícula, es posible encontrar una simple interpretación para el valor del intervalo: debido a que  $ds^2$  puede calcularse en cualquier SRI y siempre se obtendrá el mismo valor, en particular en el SRI comóvil con la partícula (es decir, en el SRI con respecto al cual la partícula está en reposo entre  $P$  y  $Q$ )  $dx_{\text{com}} = 0$  y  $dt_{\text{com}} = d\tau$  coincide con el intervalo de tiempo propio, ya que sería el intervalo de tiempo que mide un observador que se mueve con la partícula. Entonces  $ds^2 = c^2 d\tau^2$ . En otras palabras  $d\tau = \sqrt{ds^2}/c = ds/c$  es el intervalo de tiempo propio medido por un observador que se mueve con la partícula. Note que en estos casos  $ds^2 > 0$ .

### 6.2.9. Boosts de Lorentz V2

aquí daremos otra derivación alternativa de las transformaciones de Lorentz, de igual manera que en la subsección anterior nos limitaremos al caso unidimensional. Sabemos de las ecuaciones 5.99 y 5.100 que las ecuaciones de Maxwell pueden describirse en general usando el operador de onda (d'alambertiano)  $\square$ .

Por ejemplo las ecuaciones de onda en el vacío 5.39 también están regidas por el operador  $\square$ . Sin embargo esta situación físicamente es extraña ya que en desde la perspectiva newtoniana (relatividad galileana) las ondas necesitan un medio para poder propagarse y como segundo comentario la deducción de 5.39 no parece depender de un **marco de referencia**. Ahora

siguiendo los principios de la relatividad (especial) **todos lo sistemas de referencia inerciales son equivalentes**, debemos como consecuencia lógica de lo anterior imponer que el operador  $\square$  sea invariante para cualquier marco de referencia, sean entonces los SRI  $K$  y  $K'$  podemos poner estos argumento como

$$\square \vec{E} = \square \vec{B} = \vec{0} \quad \text{en } K \quad (6.43)$$

$$\square' \vec{E}' = \square' \vec{B}' = \vec{0} \quad \text{en } K', \quad \Rightarrow \square = \square'. \quad (6.44)$$

Comparemos esto con el caso newtoniano en donde en el sistema  $K'$  la velocidad de la onda debe ser  $c-v$  y por ende el operador  $\square$  no puede quedar invariante, ya que en un caso (sistema  $K$ ) la velocidad sería  $c$  y en el otro sería  $c-v$ . Es evidente que la relatividad galileana no puede ser consistente con las ecuaciones 6.43 y 6.44 y por ende con las ecuaciones de Maxwell!

Estas consecuencias ya invalidan por si mismas la mecánica newtoniana clásica, por lo que ahora debemos buscar una transformación de coordenadas en cuatro dimensiones  $\vec{x}'(\vec{x}, t)$  y también del tipo temporal  $t'(\vec{x}, t)$ . Para el caso espacial (dejando el tiempo fijo) sabemos que el laplaciano es invariante bajo rotaciones en  $\mathbb{R}^3$ , como en este caso son necesarios tres generadores (en esféricas serían  $\theta$ ,  $\phi$  y el espín) para generar cualquier rotación, entonces tenemos un espacio de tres dimensiones. Sin embargo si el tiempo se toma en cuenta es obvio que necesitamos una transformación más general.

Para ello pidamos que la causalidad de los eventos entre los sistemas de referencia  $K$  y  $K'$  sea una relación uno a uno, en términos matemáticos necesitamos una transformación biyectiva general entre las coordenadas  $(x, y, z, t)$  y  $(x', y', z', t')$ . La única transformación genérica que puede garantizar esa propiedad es una transformación lineal (Endomorfismo),

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t &= x' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t &= y' \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t &= z' \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t &= t', \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde los coeficientes  $a_{\mu,\nu}$  son reales. Por simplicidad tomemos el caso unidimensional (espacial) que mantiene los otros ejes  $y' = y$  y  $z' = z$ , en este caso el sistema anterior se simplifica a

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}t &= x' \\ a_{21}x + a_{22}t &= t'. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Considérese el diagrama de la figura 6.6, donde en el sistema  $K'$  sucede un evento simultaneo en el origen, para el sistema  $K$  el evento se encuentra una distancia  $x = vt$ . Por el sistema 6.46 se puede llegar a la relación

$$a_{11}vt + a_{12}t = 0, \Rightarrow a_{11}v = -a_{12}. \quad (6.47)$$

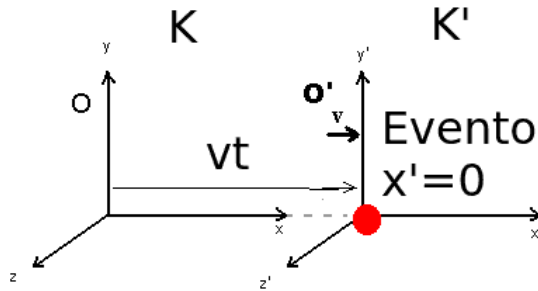


Figura 6.6: Eventos simultáneos en  $K$  y  $K'$ .

Para obtener las otras tres relaciones consideremos la ecuación de invarianza 6.43 y 6.44 así como el operador  $\square$  en una dimensión (multiplicamos por  $c^2$ )

$$c^2\square = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (6.48)$$

si pedimos que este operador sea invariante bajo la transformación 6.46 debemos calcular el operador  $c^2\square$  en términos de  $(x', t')$  lo cual se puede hacer fácilmente usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x'} + \left(\frac{\partial t'}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial t'} = a_{11} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{21} \frac{\partial}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial x'} + \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t'} = a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial t'},$$

como los coeficientes  $a_{ij}$  son constantes podemos obtener las segundas derivadas de forma fácil

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \left(a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial t'}\right) \left(a_{12} \frac{\partial}{\partial x'} + a_{22} \frac{\partial}{\partial t'}\right) \\ &= (a_{12})^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2(a_{12}a_{22}) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + (a_{22})^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = (a_{11})^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2(a_{11}a_{21}) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + (a_{21})^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (6.50)$$

finalmente pedimos que el operador  $c^2 \square = c^2 \square'$ , que con la ayuda de las ecuaciones 6.49 y 6.50 se tiene

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2 \left( (a_{11})^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2(a_{11}a_{21}) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + (a_{21})^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \\ &- \left( (a_{12})^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2(a_{12}a_{22}) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t} + (a_{22})^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = \\ & c^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}, \Rightarrow \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$c^2(a_{11})^2 - (a_{12})^2 = c^2, \quad (6.52)$$

$$c^2(a_{21})^2 - (a_{22})^2 = -1, \quad (6.53)$$

$$c^2 a_{11} a_{21} = a_{12} a_{22}, \quad (6.54)$$

junto con 6.47 tenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Resolvemos este sistema sustituyendo 6.47 en 6.54, que resulta

$$a_{21} = -a_{22}v/c^2,$$

ahora sustituimos en 6.53 y despejando  $a_{22}$  resulta

$$a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

de donde también tenemos  $a_{21} = -a_{22}v/c^2$ . Similarmente sustituyendo 6.47 en 6.52 resulta

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

de donde  $a_{12} = -va_{11}$ . Evidentemente observamos que estos resultados son lo mismo que las transformaciones de Lorentz 6.37 en una dimensión. Es interesante notar que las transformaciones de Lorentz se pueden escribir de forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (6.55)$$

### 6.2.10. Relatividad de la Simultaneidad

Consideraremos aquí el ejemplo clásico de cómo dos eventos que son simultáneos respecto a un SRI no lo son respecto de otro en movimiento relativo. Para ello, considere un vagón de tren provisto de una lámpara en su centro que en el evento  $O$  emite una señal luminosa hacia los dos extremos del vagón.

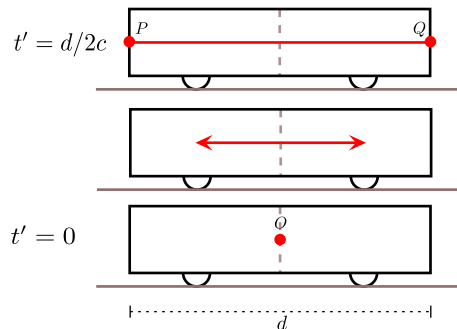


Figura 6.7: Los eventos  $P$  y  $Q$  son simultáneos respecto al SRI  $K'$ , comóvil con el tren.

En el SRI  $K'$  comóvil con el tren, el proceso transcurre como se representa en la figura 6.7<sup>6</sup>. Si en este caso el largo del vagón es  $d$  y se elige el origen del tiempo tal que  $t'_O = 0$ , entonces las señales luminosas (los “fotones”) llegan (chocan) con las paredes izquierda y derecha en los eventos  $P$  y  $Q$ , en el mismo tiempo  $t'_P = t'_Q = d/2c$ . Por lo tanto, los eventos  $P$  y  $Q$  son simultáneos respecto a este SRI  $K'$ .

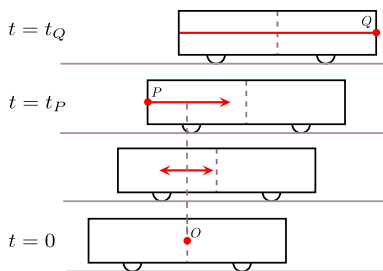


Figura 6.8: Los eventos  $P$  y  $Q$  no son simultáneos respecto al SRI  $K$ , respecto al cual el tren se mueve con velocidad  $V$ .

Por otro lado, la descripción de este mismo proceso desde el SRI  $K$  “fijo a la Tierra”, respecto al cual el vagón se mueve con velocidad  $V = \beta c$ , se esquematiza en la figura 6.8<sup>7</sup>. En este caso, la señal luminosa se propaga, de acuerdo a los postulados de la teoría, con (la misma) velocidad  $c$  hacia ambos

<sup>6</sup>Figura de esta figura original.

<sup>7</sup>Adaptada a partir de esta figura original.

lados. Sin embargo, las paredes del vagón se mueven con velocidad  $V$  hacia la derecha de modo que a pared izquierda se mueve hacia la señal mientras que la pared derecha se aleja de ella. Claramente, en estas condiciones el evento  $P$  (de intersección de la línea de mundo de la pared izquierda con la línea de mundo del fotón) ocurre antes que el evento  $Q$ . Por lo tanto, respecto al SRI  $K$  los eventos  $P$  y  $Q$  no son simultáneos. Esto significa que, en la teoría de RE, la simultaneidad de eventos es relativa.

Podemos cuantificar lo anterior usando la transformación de Lorentz (6.37). Si los observadores en  $K$  y  $K'$  sincronizan sus relojes en el evento  $O$  en que los rayos de luz dejan el punto medio (se “enciende la lámpara”), entonces

$$x_O^\mu = (ct'_O, x'_O) = (0, 0), \quad (6.56)$$

$$x_P^\mu = (ct'_P, x'_P) = (d/2, -d/2), \quad (6.57)$$

$$x_Q^\mu = (ct'_Q, x'_Q) = (d/2, d/2). \quad (6.58)$$

Usando (6.38), encontramos que las coordenadas de estos eventos respecto al SRI  $K$  son

$$x_O^\mu = (ct_O, x_O) = (0, 0), \quad (6.59)$$

$$x_P^\mu = (ct_P, x_P) = \left( \frac{\gamma d}{2}(1 - \beta), -\frac{\gamma d}{2}(1 - \beta) \right), \quad (6.60)$$

$$x_Q^\mu = (ct_Q, x_Q) = \left( \frac{\gamma d}{2}(1 + \beta), \frac{\gamma d}{2}(1 + \beta) \right). \quad (6.61)$$

Estas coordenadas, junto con las líneas de mundo de los fotones y las paredes del vagón son representadas en la figura 6.9 desde el punto de vista de los SRI's  $K$  y  $K'$ .

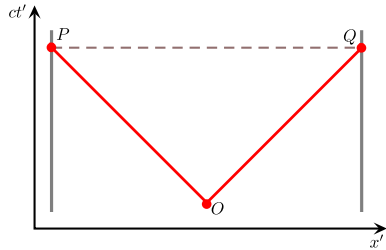


Figura 6.9: Diagramas de espacio-tiempo para el proceso, respecto a los SRI  $K'$  y  $K$ .

Claramente, obtenemos  $t_P < t_Q$  de modo que respecto a  $K$  el evento  $P$  ocurre antes que el evento  $Q$ . La diferencia de tiempo entre estos eventos es entonces dada por:

$$\Delta t_{PQ} := t_Q - t_P = \frac{1}{c} \gamma \beta d = \gamma \frac{V}{c^2} d > 0. \quad (6.62)$$

Por lo tanto, encontramos que respecto al SRI  $K$  los eventos  $P$  y  $Q$  no son simultáneos:  $P$  acontece antes que  $Q$  y el intervalo de tiempo entre estos dos eventos es  $\gamma Vd/c^2$ . Similarmente, respecto a un SRI  $K''$  en el que el vagón se mueva hacia la izquierda, el evento  $Q$  ocurrirá antes que  $P$ . Como veremos más adelante, la relatividad de la simultaneidad no contradice el principio de causalidad puesto que no existe relación causal entre los eventos  $P$  y  $Q$ .

### 6.2.11. Dilatación del tiempo

Considere dos eventos  $P$  y  $Q$  que, con respecto a un SRI comóvil  $K'$ , ocurren en la misma posición, pero en tiempos diferentes. Estos mismos dos eventos ocurren en posiciones diferentes y con un intervalo de tiempo también diferente respecto a otro SRI  $K$  en movimiento relativo respecto a  $K'$ .

En efecto, en este caso  $(\Delta x')_{PQ} = 0$  y  $(\Delta t')_{PQ} = (\Delta \tau)_{PQ} \neq 0$  y por lo tanto, usando las transformaciones (6.38) tenemos que

$$(\Delta t)_{PQ} = \gamma(\Delta \tau)_{PQ}, \quad (\Delta x)_{PQ} = \gamma\beta c(\Delta \tau)_{PQ}. \quad (6.63)$$

De este modo encontramos que  $(\Delta t)_{PQ} > (\Delta \tau)_{PQ}$ , es decir, que en el SRI  $K$  se asignará un intervalo de tiempo mayor que el que  $K'$  asociará al mismo par de eventos. Un ejemplo clásico de esta dilatación del tiempo lo constituye la vida media de las partículas. Si la vida media de una partícula es<sup>8</sup>  $\tau_0$ , entonces la vida media de ella con respecto a un observador que la ve moverse con rapidez  $v$  es  $\tau = \gamma\tau_0 > \tau_0$ .

Esta dilatación del tiempo es un efecto universal que afecta a todo tipo de eventos y en particular a la “velocidad de avance” de relojes en movimiento. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

#### Reloj de Luz

Considere el “reloj de luz” formado por un rayo de luz que rebota entre dos espejos paralelos separados una distancia  $L$ , como se esquematiza en la figura 6.10.

Respecto al SRI comóvil  $K'$  el tiempo entre la salida y la llegada del rayo de luz (un “tic” del reloj) es dado por

$$\Delta t' = \frac{2L}{c}. \quad (6.64)$$

---

<sup>8</sup>Clásicamente la vida media de una partícula es “el tiempo que ella tarda en desintegrarse cuándo está en reposo” o, más precisamente, el tiempo que debe transcurrir para que una población de un gran número de partículas idénticas y en reposo se reduzca en una fracción  $1/e$ .

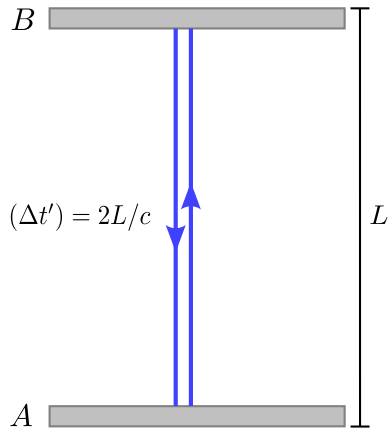


Figura 6.10: Dilatación del tiempo en el “reloj de luz”. Izquierda: SRI comóvil  $K'$ . Derecha SRI  $K$  respecto al cual el reloj se mueve con velocidad  $v = \beta c$ .

Por otro lado, respecto al SRI  $K$  el rayo de luz tarda un tiempo  $(\Delta t)$  en subir y bajar. Este tiempo puede ser determinado usando el teorema de Pitágoras en el triángulo indicado en la figura:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = L^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2. \quad (6.65)$$

A partir de esta relación, encontramos que

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \quad (6.66)$$

### Derivación usando el intervalo

Otra forma de derivar este resultado es usando directamente el intervalo,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt^2 (1 - \beta^2) = \gamma^{-2} c^2 dt^2, \quad (6.67)$$

de modo que  $dt = \gamma d\tau > d\tau$ .

En definitiva, **todo intervalo de tiempo que transcurre entre dos eventos dados parece mayor (dilatado) cuando se observa desde un SRI en movimiento, comparado con el intervalo de tiempo entre los mismos eventos respecto a un observador comóvil.**

Esta predicción de la teoría de la relatividad especial ha sido confirmada experimentalmente en múltiples ocasiones a través de mediciones del efecto Doppler (transversal) (experimento sugerido por el mismo Einstein en 1907 [?]), ya que como consecuencia de la dilatación temporal, la radiación emitida por un átomo en movimiento transversal a la dirección de observación, presentará una variación relativa de la longitud de onda de la radiación emitida  $\Delta\lambda/\lambda_0 = \gamma - 1 \approx 10^{-5}$ . La primera confirmación usando



este efecto es debida a Ives y Stilwell en 1938 [?], usando átomos de Hidrógeno ( $v/c \approx 0,005$ ,  $\gamma - 1 \approx 10^{-5}$ ). En 2003 Saathoff et. al. publicaron resultados de un test mejorado, usando “espectroscopía laser de iones rápidos” [?] ( $v/c \approx 0,064$ ,  $\gamma - 1 \approx 2 \times 10^{-3}$ , 1%), y luego en 2007 Reinhardt et al. mejoraron la precisión usando “relojes ópticos atómicos” [?] ( $v/c \approx 0,03$ ,  $\gamma - 1 \approx 4 \times 10^{-4}$ ). El “record” lo tienen actualmente Chou et al., quienes lograron verificar la dilatación temporal con “relojes atómicos”(de átomos aluminio) moviéndose a velocidades del orden de 10 m/s ! [?] ( $v \approx 10[m/s]$ ,  $v/c \approx 3 \times 10^{-8}$ ,  $\gamma - 1 \approx 4 \times 10^{-16}$ ). Otros métodos para verificar la dilatación temporal consisten en medir la vida media de partículas [?] ( $v/c \approx 0,9994$ ,  $\gamma - 1 \approx 28$ ), y comparar las medidas de relojes atómicos en movimiento relativo (“paradoja de los gemelos”) [?, ?]. Para otras referencias sobre la confirmación experimental de la teoría de Relatividad Especial, ver [?].

### 6.2.12. Contracción de la longitud

Considere un cuerpo, cuyos extremos están, respecto a un SRI  $K'$  comóvil, fijos en las posiciones  $x'_P$  y  $x'_Q = x'_R$ . Respecto a este SRI la longitud del cuerpo es  $L_0 = x'_Q - x'_P$ . En otro SRI, respecto al cual el cuerpo se mueve con velocidad  $v$ , se define la longitud  $L$  como la distancia entre las posiciones de los puntos extremos del cuerpo en el mismo instante.

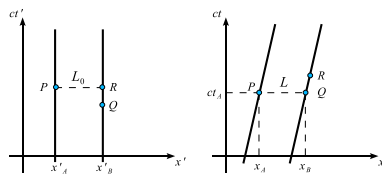


Figura 6.11: Líneas de mundo de los extremos de un cuerpo, respecto al SRI comóvil  $K'$  y SRI  $K$  donde éste se mueve con velocidad  $v$ .

Usando la transformación de Lorentz para la posición tenemos que el evento  $P$  (un extremo del cuerpo) con coordenadas  $(ct_A, x_P)$  respecto al SRI  $K$  tendrá, respecto al SRI  $K'$  la siguiente posición:

$$x'_P = \gamma(x_P - \beta ct_A). \tag{6.68}$$

Por otro lado, el evento  $Q$  (en el otro extremo del cuerpo) que es simultáneo al evento  $P$  respecto al SRI  $K$ , tiene coordenadas

$$x'_Q = \gamma(x_Q - \beta ct_A). \tag{6.69}$$

Por lo tanto,

$$x'_Q - x'_P = \gamma(x_Q - x_P), \tag{6.70}$$

En otras palabras, los largos del cuerpo respecto a los dos SRI's están relacionados por

$$L = \frac{L_0}{\gamma} < L_0, \quad (6.71)$$

donde  $L_0 := x'_Q - x'_P$  es el largo del cuerpo respecto al SRI comóvil, también llamado longitud en reposo del cuerpo.

Resumiendo, **todo cuerpo que tiene una longitud  $L_0$  respecto a un SRI comóvil parece tener una longitud menor (contracción) en un SRI respecto al cual el cuerpo está en movimiento.**

### 6.2.13. El cono de luz

En la teoría de la Relatividad, un muy útil concepto es el cono de luz. Por definición, el cono de luz asociado a un evento  $O$  es el conjunto de eventos en el espacio-tiempo que pueden ser conectados con  $O$  por señales luminosas.

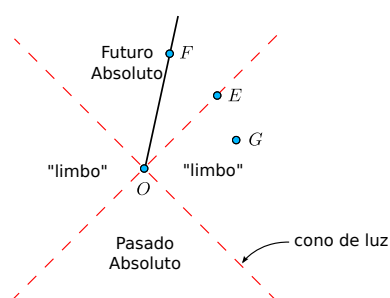


Figura 6.12: Cono de luz en 1+1 dimensiones: futuro, pasado absoluto y “limbo”

El cono de luz divide el espacio-tiempo en tres regiones: “dentro del cono de luz”, “fuera del cono de luz” (el “limbo”) y “sobre el cono de luz”. Esta clasificación es absoluta, en el sentido que no depende del SRI respecto al cual se describan los eventos.

Los eventos dentro del cono de luz asociado a  $O$  son aquellos que pueden tener conexión causal con  $O$ . Es posible además separar los eventos dentro del cono de luz en dos regiones: el futuro absoluto y el pasado absoluto. Los eventos en el futuro absoluto de  $O$  son aquellos que pueden (en principio) ser alcanzados por partículas o señales emitidas desde  $O$  y que viajen con velocidades menores que la de la luz. Análogamente, los eventos en el pasado absoluto de  $O$  son aquellos desde los cuales pueden ser emitidas partículas o señales viajando con velocidades menores que la de la luz y que pueden eventualmente llegar a  $O$ .

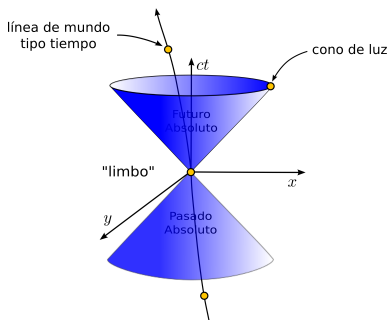


Figura 6.13: Cono de Luz, en 2+1 dimensiones.

Por otro lado, los eventos fuera del cono de luz no tienen conexión causal con  $O$ , no pueden afectar a  $O$ , ni  $O$  puede afectar eventos en esa región, ya que eso requeriría señales propagándose con velocidades superluminales.

La clasificación de eventos asociada al cono de luz está relacionada con los valores que asume el intervalo entre dos eventos. Si  $(t_O, x_O)$  son las coordenadas del evento  $O$  y  $(t, x)$  las de un evento  $P$  cualquiera, entonces podemos calcular  $\Delta s^2 := c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ . Este valor puede ser positivo, negativo, o nulo.

- Si  $\Delta s^2 > 0$  entonces el evento  $P$  está dentro del cono de luz de  $O$ . Se dice que el vector  $OP$  es tipo tiempo. Si además  $\Delta t > 0$  entonces  $P$  está en el futuro absoluto de  $O$ , y si  $\Delta t < 0$ , en su pasado absoluto. Los eventos  $O$  y  $P$  pueden tener conexión causal. Es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  tienen la misma posición espacial, e.d. un SRI comóvil con estos eventos. No es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  sean simultáneos.
- Si  $\Delta s^2 < 0$  entonces el evento  $P$  está fuera del cono de luz de  $O$ . Se dice que el vector  $OP$  es tipo espacio. Los eventos  $O$  y  $P$  no tienen conexión causal. Es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  son simultáneos. También es posible encontrar SRI's respecto a los cuales  $P$  anteceda a  $O$ , y viceversa. En otras palabras, en este caso  $O$  y  $P$  no tienen un orden temporal absoluto. No es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  tienen la misma posición espacial.
- Si  $\Delta s^2 = 0$  entonces el evento  $P$  está sobre el cono de luz de  $O$ . Se dice que el vector  $OP$  es tipo luz. No es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  son simultáneos. Tampoco es posible encontrar un SRI respecto al cual  $O$  y  $P$  tienen la misma posición espacial. Sólo señales luminosas (o, en general, partículas o señales que se muevan a la velocidad de la luz) pueden conectar  $O$  y  $P$ .

### 6.2.14. Boost en una dirección arbitraria

En la sección 6.2.8 asumimos implícitamente que las coordenadas asociadas a las direcciones normales ( $y$  y  $z$ ) a la velocidad relativa de los dos SRI's (eje  $x$ ) no son alteradas por la transformación (la contracción de Lorentz sólo se produce en la dirección de movimiento). En otras palabras, las transformaciones (6.37) son complementadas con  $y' = y$  y  $z' = z$ . Podemos generalizar este resultado al caso en que la velocidad relativa entre los SRI's  $K$  y  $K'$  está dirigida en una dirección arbitraria, separando los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{x}'$  en componentes paralelas y perpendicular a la velocidad relativa  $\vec{V} = c\vec{\beta}$ . Usando el hecho que la componente perpendicular es inalterada, y además el boost unidimensional (6.37) para la componente paralela, es decir,  $\vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}$  mientras que  $x'_{\parallel} = \gamma(x_{\parallel} - \beta ct)$ , con  $x_{\parallel} := \hat{\beta} \cdot \vec{x}$ ,  $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - x_{\parallel}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta} = \vec{V}/V = \vec{\beta}/\beta$ , etc., es simple verificar que la TL correspondiente a un boost en una dirección arbitraria es de la forma

Boost dirección  
arbitraria

$$\vec{x}' = \vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{x}) \vec{\beta} - \gamma ct \vec{\beta}, \quad (6.72)$$

$$ct' = \gamma (ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}). \quad (6.73)$$

Esta TL describe el cambio entre los SRI's  $K$  y  $K'$ , tal que  $K'$  se mueve con velocidad  $\vec{V} = c\vec{\beta}$  respecto a  $K$ , pero donde los ejes espaciales de  $K$  y  $K'$  son paralelos (en este sentido, esta TL no incluye rotaciones).

### Composición de velocidades.

Considere una partícula moviéndose con una velocidad  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$  en el sistema  $K$  ¿Con qué velocidad se mueve la partícula en el sistema  $K'$ , que se mueve con una velocidad  $c\vec{\beta}$  con respecto al sistema  $K$ ?

Considere la TL de un boost general dada por (6.72)-(6.73). En este caso, para dos eventos infinitesimalmente próximos con coordenadas  $(ct, \vec{x})$  y  $(ct + cdt, \vec{x} + d\vec{x})$  respecto a  $K$ , las diferencias  $d\vec{x}'$  y  $dt'$  asociadas a  $K'$  están dadas por:

$$d\vec{x}' = d\vec{x} + \frac{(\gamma - 1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot d\vec{x}) \vec{\beta} - \gamma c dt \vec{\beta}, \quad (6.74)$$

$$cdt' = \gamma (cdt - \vec{\beta} \cdot d\vec{x}). \quad (6.75)$$

En el caso en que estos incrementos sean aquellos correspondientes al movimiento de una partícula, velocidad es dada por  $\vec{v} := d\vec{x}/dt$  respecto a  $K$  y  $\vec{v}' := d\vec{x}'/dt'$  respecto a  $K'$ . Por lo tanto, encontramos que

$$\frac{1}{c} \vec{v}' = \frac{1}{c} \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}) \vec{\beta} - \gamma c \vec{\beta}}{\gamma (c - \vec{\beta} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt})}, \quad (6.76)$$

es decir,

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2} (\vec{\beta} \cdot \vec{v}) \vec{\beta} - \gamma c \vec{\beta}}{\gamma \left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}}{c}\right)}. \quad (6.77)$$

Equivalentemente,

$$\vec{v}'_{\parallel} = \frac{\vec{v}_{\parallel} - c\vec{\beta}}{1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}_{\parallel}}{c}}, \quad \vec{v}'_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\gamma \left(1 - \vec{\beta} \cdot \frac{\vec{v}_{\parallel}}{c}\right)} \quad (6.78)$$

donde hemos definido la velocidad paralela y perpendicular (respecto a  $\vec{\beta}$ ),  $\vec{v}_{\parallel} := (\vec{v} \cdot \hat{\beta})\hat{\beta}$ ,  $\vec{v}_{\perp} := \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$ .

### 6.2.15. Incompatibilidad de las definiciones newtonianas de energía y momento lineal con el Principio de Relatividad

En mecánica no-relativista se define el momento lineal de una partícula como  $\vec{p} := m\vec{v}$ , donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula (que depende del SRI), y  $m$  es la masa de la partícula (que no depende del SRI, es un escalar). La característica principal del momento es su propiedad de conservación en un sistema aislado (por ejemplo, en un choque de partículas). Además, la ley de conservación del momento lineal es válida (para un sistema aislado de partículas) en todo SRI. Es simple verificar, usando la ley newtoniana (o “Galileana”) de transformación de la velocidad de un cuerpo entre SRI’s, que si el momento de un sistema de partículas es conservado en un SRI entonces será conservado en todo SRI.

Sin embargo, usando las leyes relativistas de transformación de la velocidad, ec. (6.77), y asumiendo que el momento sigue siendo  $\vec{p} := m\vec{v}$  y que  $m$  es un escalar, entonces puede comprobarse que la ley de conservación del momento de un sistema de partículas no será válida (“simultáneamente”) en todo SRI (es decir, no respetará el Principio de Relatividad). Por ejemplo en un choque de dos partículas, si en un SRI particular  $K$  se verifica que  $m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$ , entonces, (6.77) implican en general que,  $m_1\vec{v}'_{1i} + m_2\vec{v}'_{2i} \neq m_1\vec{v}'_{1f} + m_2\vec{v}'_{2f}$  en otros SRI’s  $K'$ .

Considere el siguiente caso simple de una colisión de partículas idénticas, todas de masa  $m$ . Las velocidades iniciales y finales de las partículas 1 y 2 están dadas, respecto al SRI  $K$  (del centro de masa), por

$$\vec{v}_{1i} = v\hat{x}, \quad \vec{v}_{2i} = -v\hat{x}, \quad (6.79)$$

$$\vec{v}_{1f} = v\hat{y}, \quad \vec{v}_{2f} = -v\hat{y}. \quad (6.80)$$

Ahora realizamos un boost con velocidad relativa  $c\vec{\beta} = v\hat{x}$ , hasta el SRI  $K'$  comóvil con la partícula 1 en su movimiento inicial (SRI “de laboratorio”). Utilizando la ley de transformación relativista de velocidades (6.77),

obtenemos las velocidades respecto al nuevo SRI:

$$\vec{v}'_{1i} = \vec{0}, \quad \vec{v}'_{2i} = -\frac{2v\hat{x}}{1+v^2/c^2}, \quad (6.81)$$

$$\vec{v}'_{1f} = -v\hat{x} + \frac{v}{\gamma}\hat{y}, \quad \vec{v}'_{2f} = -v\hat{x} - \frac{v}{\gamma}\hat{y}. \quad (6.82)$$

Si el momento de cada partícula es de la forma  $\vec{p} = m\vec{v}$  entonces, el momento total en el SRI de centro de masa es dado por

$$\vec{p}_i = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{0}, \quad (6.83)$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{0}, \quad (6.84)$$

es decir, se conserva el momento lineal total. Sin embargo, en el SRI de laboratorio tendremos que

$$\vec{p}'_i = \vec{p}'_{1i} + \vec{p}'_{2i} = -\frac{2mv\hat{x}}{1+v^2/c^2}, \quad (6.85)$$

mientras que

$$\vec{p}'_f = \vec{p}'_{1f} + \vec{p}'_{2f} = -2mv\hat{x}. \quad (6.86)$$

Similarmente, puede verificarse que lo mismo ocurre con la energía. Si asumimos que la energía (cinética) de una partícula de masa  $m$  y velocidad  $\vec{v}$  es dada por la usual expresión norelativista, entonces en el SRI del centro de masa la energía se conserva en el proceso analizado:

$$E_i = \frac{1}{2}m\vec{v}_{1i}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{2i}^2 = mv^2, \quad (6.87)$$

$$E_f = \frac{1}{2}m\vec{v}_{1f}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_{2f}^2 = mv^2. \quad (6.88)$$

Sin embargo, en el SRI de laboratorio

$$E'_i = \frac{1}{2}m\vec{v}'_{1i}{}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}'_{2i}{}^2 = \frac{2mv^2}{(1+v^2/c^2)^2}, \quad (6.89)$$

mientras que

$$E'_f = \frac{1}{2}m\vec{v}'_{1f}{}^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}'_{2f}{}^2 = mv^2 \left(2 - v^2/c^2\right). \quad (6.90)$$

Claramente, en general (es decir, para valores arbitrarios de  $v$ ),  $E'_i \neq E'_f$ . ! Este resultado se contradice con el esperado a partir del Principio de Relatividad: que si la energía se conserva en un SRI, entonces debe conservarse en todo SRI. Si esto no fuese así, entonces existirían SRI's "privilegiados" o "especiales": aquel SRI donde sí se conserva la energía en un choque. El mismo argumento es aplicable al momento lineal.

En resumen, en RE la definición newtoniana de la energía y el momento de un cuerpo es incompatible con el Principio de Relatividad, es decir, con la equivalencia entre SRI's. Por esto, es necesario reemplazar las definiciones newtonianas por unas que sí respeten este principio, es decir, que satisfagan el requerimiento que si la energía es conservada en un SRI, entonces sea conservada en todo SRI, y similarmente para el momento.

Como veremos más adelante, en la teoría de RE se reemplazan las definiciones newtonianas de energía y momento lineal por nuevas definiciones (en términos de la masa y velocidad del cuerpo) que sí son compatibles en el Principio de Relatividad. Las expresiones relativistas de energía y momento son

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.91)$$

Para probar que estas nuevas definiciones realmente satisfacen las propiedades requeridas, es de mucha utilidad expresar estas cantidades en términos de vectores y tensores respecto a Transformaciones de Lorentz (que relacionan SRI's): los llamados 4-vectores y 4-tensores (“cuadri-vectores” y “cuadri-tensores”). Por esto, a continuación revisaremos rápidamente la definición y propiedades básicas de estos objetos.

### 6.3. La visión Cuadridimensional

En la teoría newtoniana el tiempo es absoluto, de modo que el espacio-tiempo (es decir, el conjunto de todos los eventos) se separa naturalmente en espacio + tiempo. Matemáticamente, esto significa que bajo las transformaciones más generales que relacionan un SRI con otro (Transformaciones de Galileo, Rotaciones y translaciones) tanto los intervalos de tiempo entre eventos (infinitesimalmente próximos), con coordenadas  $(t, \vec{x})$  y  $(t + dt, \vec{x} + d\vec{x})$  respecto a un SRI, como la distancia entre ellos permanecen invariantes, es decir,

$$dt' = dt, \quad d\vec{x}'^2 = d\vec{x}^2. \quad (6.92)$$

La condición de invariancia de  $d\vec{x}^2$ , permite asociar un concepto absoluto de distancia: una geometría tridimensional euclídeana, donde las coordenadas de un evento respecto a un SRI son relativas (cambian bajo transformación de SRI), pero la distancia  $d\vec{x}^2$  es absoluta.

Por otro lado, en la teoría especial de la relatividad, la distancia espacial  $d\vec{x}^2$  no es absoluta, como tampoco lo es  $dt$  (“los boosts mezclan espacio y tiempo”). Sin embargo, el así llamado intervalo,

$$ds^2 := c^2 dt^2 - d\vec{x}^2, \quad (6.93)$$

es invariante bajo transformaciones entre SRI's. En este sentido, el intervalo es una magnitud absoluta en RE. En analogía al caso newtoniano, esto

permite introducir una geometría, interpretando  $ds^2$  como una especie de “distancia” en el espacio-tiempo 4-dimensional: el espacio de Minkowski<sup>9</sup> (1907, ver [?]).

$ds^2 := c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$  define la geometría (pseudo-)euclídeana del espacio-tiempo de Minkowski.

Por ejemplo, el boost en la dirección  $x$  puede ser expresado en términos de una matriz de transformación:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.94)$$

Ahora estamos en condiciones de definir más generalmente una Transformación de Lorentz.

Las transformaciones de Lorentz (TL's) son definidas como aquellas transformaciones lineales de las (4) coordenadas de un evento, entre 2 SRI's, y que dejan el intervalo  $ds^2$  invariante, es decir, tales que  $c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 = c^2 dt'^2 - d\vec{x}'^2$ .

Con esta definición, las TL's incluyen los boost's (TL's simples) en una dirección arbitraria, las rotaciones, reflexiones espaciales y temporales (estos tres últimos tipos de transformación dejan  $dt^2$  y  $d\vec{x}^2$  separadamente invariantes), y sus composiciones. Matemáticamente, el conjunto de todas las TL's forma un grupo: el grupo de Lorentz.

Recuerde que la interpretación física de  $ds$  es que, para eventos con separación tipo tiempo ( $ds^2 > 0$ ) la cantidad  $d\tau = ds/c$  es el tiempo propio entre dos eventos (infinitesimalmente próximos), es decir el tiempo registrado por un observador comóvil con los eventos. Esto puede verificarse en el SRI en el que los dos eventos aparezcan en el mismo punto del espacio, es decir,  $d\vec{x}^2 = 0$ , ya que en este caso  $ds = c dt$ .

### 6.3.1. 4-vectores y 4-tensores

Denotamos las coordenadas de un evento en el espacio-tiempo, respecto de un SRI  $K$ , colectivamente por  $x^\mu$ , con  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , de modo que  $x^0 := ct$ ,  $x^1 := x$ ,  $x^2 := y$ ,  $x^3 := z$ . En general, los índices griegos  $\mu, \nu, \lambda, \dots$  variarán de 0 a 3, mientras que los latinos  $i, j, k, \dots$  lo harán de 1 a 3. Así, por ejemplo, denotaremos  $x^\mu = (x^0, x^i)$  o, equivalentemente,  $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ .

Bajo una TL, las coordenadas de un evento cambiarán, por ejemplo de  $x^\mu$  a  $x'^\mu$  cuando cambiemos de un SRI  $K$  a otro  $K'$ . La TL más general,

<sup>9</sup>Hermann Minkowski (1864-1909): matemático alemán.



que incluye boosts, ver (6.37), y rotaciones, es lineal en las coordenadas espaciotemporales y por tanto puede escribirse en la forma

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (6.95)$$

donde  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  son, para cada transformación, 16 constantes. Además, las componentes  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  deben ser tales que el intervalo permanezca invariante:  $ds'^2 = ds^2$ . En (6.95) hemos usado la convención de suma de Einstein, de suma de índices repetidos, de modo que  $\Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} := \Lambda^{\mu}_0 x^0 + \Lambda^{\mu}_1 x^1 + \Lambda^{\mu}_2 x^2 + \Lambda^{\mu}_3 x^3$ .

Por ejemplo, la matriz  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  correspondiente al boost (6.72)-(6.73) es dada por:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^x & -\gamma\beta^y & -\gamma\beta^z \\ -\gamma\beta^x & 1 + \frac{(\beta^x)^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta^x\beta^y}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta^x\beta^z}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta^y & \frac{\beta^y\beta^x}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{(\beta^y)^2}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta^y\beta^z}{\beta^2}(\gamma - 1) \\ -\gamma\beta^z & \frac{\beta^z\beta^x}{\beta^2}(\gamma - 1) & \frac{\beta^z\beta^y}{\beta^2}(\gamma - 1) & 1 + \frac{(\beta^z)^2}{\beta^2}(\gamma - 1) \end{pmatrix}, \quad (6.96)$$

con  $\vec{\beta} = (\beta^x, \beta^y, \beta^z)$  y  $\beta^2 = (\beta^x)^2 + (\beta^y)^2 + (\beta^z)^2$ .

Por otro lado, una rotación general es de la forma

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0_3 \\ \hline 0_3 & | & \mathbf{R} \end{pmatrix}, \quad (6.97)$$

donde  $\mathbf{R}$  es una matriz ortogonal de  $3 \times 3$ , es decir, que satisface  $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{1}_{3 \times 3}$ . Esta transformación preserva  $dt^2$  y  $d\vec{x}^2$  por separado.

Tal como en mecánica newtoniana es útil expresar las leyes físicas usando vectores y tensores respecto a rotaciones, en RE es conveniente (pero no obligatorio!) usar vectores, tensores, etc., definidos con respecto a TL's.

### Escalares (invariantes)

Un escalar es una cantidad que no cambia su valor bajo TL's. Si  $\phi(P)$  es una cantidad asociada al evento  $P$  respecto al SRI  $K$ , y  $\phi'(P)$  es la misma cantidad, asociada al mismo evento, pero con respecto a otro SRI arbitrario  $K'$ , entonces  $\phi(P)$  es un escalar si y sólo si

$$\phi'(P) = \phi(P). \quad (6.98)$$

Ejemplos de cantidades escalares bajo TL's: las masas y las cargas de las partículas, la rapidez de la luz, el intervalo.

### 4-vector contravariante

Se dice que conjunto de 4 cantidades,  $A^{\mu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), definidas en cada SRI (y denotadas, por convención, usando un superíndice), son las

componentes de un 4-vector contravariante si sus valores respecto a dos SRI's relacionados por una TL arbitraria, están relacionadas tal como las coordenadas espaciotemporales, es decir, por

$$A'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}. \quad (6.99)$$

Ejemplos: 4-posición, 4-velocidad, 4-momento.

#### 4-vector covariante

Se dice que un conjunto de 4 cantidades,  $A_{\mu}$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), definidas en cada SRI (y denotadas, por convención, usando un subíndice), son las componentes de un 4-vector covariante si sus valores respecto a dos SRI's relacionados por una TL arbitraria, están relacionadas por

$$A'_{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu} A_{\nu}, \quad (6.100)$$

donde  $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\nu}_{\mu}$  es la TL inversa, definida de modo que

$$\Lambda^{\mu}_{\lambda} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\lambda}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}, \quad (6.101)$$

y donde  $\delta^{\mu}_{\nu}$  es la delta de Kronecker, definida en todo SRI por  $\delta^0_0 = \delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1$ , y  $\delta^{\mu}_{\nu} = 0$  si  $\mu \neq \nu$ .

Ejemplo de vector covariante: el 4-gradiente de un campo escalar,  $A_{\mu} := \partial\phi/\partial x^{\mu} = \partial_{\mu}\phi$ .

#### Tensor de rango $\binom{p}{q}$ :

Un conjunto de  $4^{p+q}$  cantidades ( $T^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$ ) definidas en cada SRI se consideran componentes de un (4-)tensor de rango  $\binom{p}{q}$ , si sus valores se relacionan, bajo TL's, por

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\lambda_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\lambda_p} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho_1}_{\nu_1} \dots \left(\Lambda^{-1}\right)^{\rho_q}_{\nu_q} T^{\lambda_1 \dots \lambda_p}_{\rho_1 \dots \rho_q}. \quad (6.102)$$

#### Multiplicación de 4-tensores

Si  $A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  y  $B^{\mu_1 \dots \mu_r}_{\nu_1 \dots \nu_s}$  son (las  $4^{p+q}$  y  $4^{r+s}$  componentes de) dos tensores de rango  $\binom{p}{q}$  y  $\binom{r}{s}$  respectivamente, entonces el conjunto de  $4^{p+q+r+s}$  cantidades definidas por

$$C^{\mu_1 \dots \mu_{p+r}}_{\nu_1 \dots \nu_{q+s}} := A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q} \times B^{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+r}}_{\nu_{q+1} \dots \nu_{q+s}} \quad (6.103)$$

definen un tensor de rango  $\binom{p+r}{q+s}$  bajo TL's.

### Contracción de 4-tensores

Si  $A^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_q}$  son las  $4^{p+q}$  componentes de un tensor de rango  $\binom{p}{q}$ , entonces las  $4^{p+q-2}$  cantidades definidas por la “contracción”

$$B^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \mu_{n+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{m-1} \nu_{m+1} \dots \nu_q} := A^{\mu_1 \dots \mu_{n-1} \rho \mu_{n+1} \dots \mu_p}_{\nu_1 \dots \nu_{m-1} \rho \nu_{m+1} \dots \nu_q}, \quad (6.104)$$

son componentes de un tensor de rango  $\binom{p-1}{q-1}$ .

### Observaciones:

- Un escalar es un tensor de rango  $\binom{0}{0}$ .
- Un vector contravariante es un tensor de rango  $\binom{1}{0}$ .
- Un vector covariante es un tensor de rango  $\binom{0}{1}$ .
- La delta de Kronecker define un tensor invariante de rango  $\binom{1}{1}$  bajo TL's, es decir, que sus componentes tienen el mismo valor en todo SRI.
- Podemos definir además el símbolo de Levi-Civita contravariante  $\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho}$  como el (pseudo-)tensor invariante bajo TL's que es totalmente antisimétrico y que satisface  $\hat{\epsilon}^{0123} := 1$ .
- Análogamente, podemos definir el símbolo de Levi-Civita covariante  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$  como el (pseudo-)tensor invariante bajo TL's (de determinante 1) que es totalmente antisimétrico y que satisface  $\epsilon_{0123} := 1$ .
- La utilidad de los tensores, reside en el hecho que las relaciones que involucran tensores del mismo grado, son ecuaciones invariantes de forma<sup>10</sup> bajo TL's, esto es, si

$$T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r} = 0, \quad (6.105)$$

entonces en todo otro SRI

$$T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_r} = 0. \quad (6.106)$$

Como las TL's expresan matemáticamente el cambio desde un SRI a otro, entonces **una forma de garantizar automáticamente que una cierta ley física respeta la equivalencia entre SRI's, es decir, el Principio de Relatividad, es expresando dicha ley en función de cantidades que sean tensores bajo TL's.** Esto es análogo al caso newtoniano, donde el hecho de escribir las leyes de la Física en términos de vectores y tensores tridimensionales (por ejemplo,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , o bien  $D_i = \epsilon_{ij} E_j$ ), que transforman homogéneamente

<sup>10</sup>También llamadas, abusando un poco del lenguaje, ecuaciones covariantes.

(como vectores y tensores) bajo rotaciones, asegura que esta ley tendrá la misma forma en cualquier sistema de coordenadas cartesianas, independiente de la orientación espacial de sus ejes. En otras palabras, el uso de vectores y tensores tridimensionales para expresar las leyes físicas resulta conveniente puesto que incorpora naturalmente la equivalencia de sistemas de coordenadas cartesianos respecto a rotaciones. Del mismo modo, el expresar una ley física en términos de 4-tensores bajo TL's asegura que esta ley respeta el Principio de Relatividad de RE.

### Identidades

#### Antisimetrización:

$$T_{[\mu\nu]} := \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}), \quad (6.107)$$

$$T_{[\mu\nu\lambda]} := \frac{1}{3}(T_{\mu[\nu\lambda]} + T_{\nu[\lambda\mu]} + T_{\lambda[\mu\nu]}), \quad (6.108)$$

$$T_{[\mu\nu\lambda\rho]} := \frac{1}{4}(T_{\mu[\nu\lambda\rho]} - T_{\nu[\lambda\rho\mu]} + T_{\lambda[\rho\mu\nu]} - T_{\rho[\mu\nu\lambda]}) \equiv T_{[0123]} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}. \quad (6.109)$$

#### Propiedades de los símbolos de Levi-Civita:

$$\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 4! \delta_{[\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\lambda} \delta_{\delta]}^{\rho}, \quad (6.110)$$

$$\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} \equiv 3! \delta_{[\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \delta_{\gamma]}^{\lambda}, \quad (6.111)$$

$$\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \equiv 2! (\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu}), \quad (6.112)$$

$$\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\alpha\nu\lambda\rho} \equiv 3! \delta_{\alpha}^{\mu}, \quad (6.113)$$

$$\hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv 4!. \quad (6.114)$$

### 6.3.2. Métrica de Minkowski

Podemos expresar el escalar  $ds$  en términos de 4-tensores. Para esto, notamos que el 4-desplazamiento  $dx^{\mu}$  es un 4-vector (bajo TL's), de modo que  $dx^{\mu} dx^{\nu}$  es un tensor de rango  $\binom{2}{0}$ . Podemos entonces escribir el escalar  $ds$  en términos de  $dx^{\mu} dx^{\nu}$  y un nuevo tensor métrico de rango  $\binom{0}{2}$ , que denotaremos por  $\eta_{\mu\nu}$ , de modo que

$$ds^2 := \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (6.115)$$

Comparando (6.115) con (6.93) encontramos que (en un SRI) debemos tener que

$$\eta_{00} = -\eta_{11} = -\eta_{22} = -\eta_{33} = 1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu. \quad (6.116)$$

Sin embargo, en RE el intervalo  $ds$  no es cualquier escalar, sino que tiene el mismo valor en todo SRI cuando se lo calcula de la misma forma, tal

como en la definición (6.93). Esto significa que, en RE, el tensor métrico (o simplemente “la métrica”)  $\eta$  debe tener los mismos valores, en cada una de sus componentes, en todo SRI. En otras palabras,  $\eta$  debe ser un tensor invariante de rango  $\binom{0}{2}$  bajo TL’s. Esto significa que

$$\eta'_{\mu\nu} = \left(\Lambda^{-1}\right)_{\mu}^{\lambda} \left(\Lambda^{-1}\right)_{\nu}^{\rho} \eta_{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}, \quad (6.117)$$

o, equivalentemente

$$\boxed{\Lambda^{\lambda}_{\mu} \Lambda^{\rho}_{\nu} \eta_{\lambda\rho} = \eta_{\mu\nu}.} \quad (6.118)$$

De hecho, es posible considerar (6.118) como la condición general que define una TL  $\Lambda$ .

Teniendo el tensor métrico a nuestra disposición es posible definir el tensor métrico inverso  $\eta^{\mu\nu}$ , de rango  $\binom{2}{0}$ , de modo que

$$\boxed{\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda}.} \quad (6.119)$$

En notación matricial  $\eta^{\mu\nu}$  corresponde a la matriz inversa a la métrica  $\eta_{\mu\nu}$ . Más aún, las componentes de la métrica (de Minkowski) inversa coinciden con aquellas de  $\eta_{\mu\nu}$

$$\eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1, \quad \eta^{\mu\nu} = 0 \quad \text{si } \mu \neq \nu. \quad (6.120)$$

El tensor métrico  $\eta_{\mu\nu}$  permite asociar a cada vector contravariante  $A^{\mu}$  un nuevo vector covariante (abusando un poco de la notación)  $A_{\mu}$ , definido por

$$A_{\mu} := \eta_{\mu\nu} A^{\nu}. \quad (6.121)$$

Similarmente, la métrica inversa  $\eta^{\mu\nu}$  permite asociar un vector contravariante  $A^{\mu}$  a cada vector covariante  $A_{\mu}$ , por medio de

$$A^{\mu} := \eta^{\mu\nu} A_{\nu}. \quad (6.122)$$

A partir de (6.119) es simple verificar que la secuencia de operaciones consistente en tomar un vector contravariante cualquiera, definir su vector covariante asociado, y a partir de este último calcular el vector contravariante correspondiente, retorna al vector contravariante original. Lo mismo ocurre si partimos de un vector covariante. Esta propiedad justifica (parcialmente) la convención de uso de la misma letra para un vector covariante y su vector contravariante asociado.

### 6.3.3. Transformaciones de Lorentz infinitesimales\*

Considere una TL infinitesimal, es decir, muy cercana a la identidad:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + M^{\mu}_{\nu}, \quad M^{\mu}_{\nu} \ll 1. \quad (6.123)$$

La condición de Lorentz (6.118) implica entonces que la matriz (infinitesimal)  $M_{\nu}^{\mu}$  debe satisfacer

$$\eta_{\mu\lambda}M_{\nu}^{\lambda} + \eta_{\nu\lambda}M_{\mu}^{\lambda} = 0. \quad (6.124)$$

Si definimos  $M_{\mu\nu} := \eta_{\mu\lambda}M_{\nu}^{\lambda}$ , entonces la condición (6.124) nos dice que  $M_{\mu\nu}$  debe ser antisimétrico, es decir  $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ . Por tanto, cualquier matriz antisimétrica  $M_{\mu\nu}$  definirá una TL infinitesimal. En términos de esta matriz antisimétrica, la TL queda expresada como

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \eta^{\mu\lambda}M_{\lambda\nu}. \quad (6.125)$$

Ahora, es posible escribir la matriz antisimétrica más general posible en la forma

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^4 & \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ -\varepsilon^4 & 0 & -\varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ -\varepsilon^5 & \varepsilon^3 & 0 & -\varepsilon^1 \\ -\varepsilon^6 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.126)$$

donde  $\varepsilon^{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, \dots, 6$  son parámetros arbitrarios. Con esto, la matriz  $M_{\nu}^{\mu}$  más general puede escribirse como

$$M_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^4 & \varepsilon^5 & \varepsilon^6 \\ \varepsilon^4 & 0 & -\varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^5 & \varepsilon^3 & 0 & -\varepsilon^1 \\ \varepsilon^6 & -\varepsilon^2 & \varepsilon^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.127)$$

De esto modo, hemos encontrado que una TL infinitesimal arbitraria queda determinada por 6 parámetros independientes. Estos parámetros (infinitesimales) corresponden físicamente a las componentes de la velocidad relativa del nuevo SRI respecto al primero (3 parámetros), a la dirección del eje de rotación entre SRI's (2 parámetros) y al ángulos de rotación entre SRI's en torno a este eje (1 parámetro).

Podemos en general descomponer la matriz (6.127) como una combinación lineal de los siguientes generadores

$$(J_1)_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & +i & 0 \end{pmatrix}, \quad (J_2)_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.128)$$

$$(J_3)_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (K_1)_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & +i & 0 & 0 \\ +i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.129)$$

$$(K_2)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (K_3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.130)$$

de modo que

$$M^\mu{}_\nu = -i \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j (J_j)^\mu{}_\nu - i \sum_{j=1}^3 \zeta_j (K_j)^\mu{}_\nu, \quad (6.131)$$

donde hemos abreviado  $\zeta_j := \varepsilon^{j+3}$ . Note que los factores imaginarios han sido introducidos sólo por convención (las TL's son reales).

#### 6.3.4. Transformaciones de Lorentz finitas\*

Es posible expresar una TL finita (no infinitesimal) como una composición de TL's infinitesimales. Esto permite escribir una TL (de determinante 1) como

$$\Lambda^\mu{}_\nu = (e^M)^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + M^\mu{}_\nu + \frac{1}{2!} M^\mu{}_\lambda M^\lambda{}_\nu + \frac{1}{3!} M^\mu{}_\lambda M^\lambda{}_\rho M^\rho{}_\nu + \dots, \quad (6.132)$$

donde la matriz  $M^\mu{}_\nu$  es de la forma (6.131), pero con parámetros  $\varepsilon^j$  no (necesariamente) infinitesimales.

#### 6.3.5. Caso de Boost General\*

Para el caso en que  $\varepsilon_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , tenemos (en notación matricial):

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \exp(M) = \exp\left(-i \sum_{j=1}^3 \zeta_j K_j\right), \quad (6.133)$$

con  $M$ , dado por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_1 & -\zeta_2 & -\zeta_3 \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.134)$$

Entonces tenemos que

$$M^2 = \begin{pmatrix} \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1^2 & \zeta_1 \zeta_2 & \zeta_1 \zeta_3 \\ 0 & \zeta_2 \zeta_1 & \zeta_2^2 & \zeta_2 \zeta_3 \\ 0 & \zeta_3 \zeta_1 & \zeta_3 \zeta_2 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (6.135)$$

Si llamamos

$$\zeta^2 := \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \quad (6.136)$$

entonces,

$$M^2 = \zeta^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta_1^2}{\zeta^2} & \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta^2} & \frac{\zeta_1 \zeta_3}{\zeta^2} \\ 0 & \frac{\zeta_2 \zeta_1}{\zeta^2} & \frac{\zeta_2^2}{\zeta^2} & \frac{\zeta_2 \zeta_3}{\zeta^2} \\ 0 & \frac{\zeta_3 \zeta_1}{\zeta^2} & \frac{\zeta_3 \zeta_2}{\zeta^2} & \frac{\zeta_3^2}{\zeta^2} \end{pmatrix}. \quad (6.137)$$

Además, se verifica directamente que

$$M^3 = \zeta^2 \begin{pmatrix} 0 & -\zeta_1 & -\zeta_2 & -\zeta_3 \\ -\zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\zeta_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \zeta^2 M. \quad (6.138)$$

Así sucesivamente, encontramos que

$$M^4 = \zeta^2 M \times M = \zeta^2 M^2, \quad (6.139)$$

$$M^5 = \zeta^2 M^3 = \zeta^4 M, \quad (6.140)$$

$$M^6 = \zeta^4 M^2, \quad (6.141)$$

$$M^7 = \zeta^4 M^3 = \zeta^6 M \quad (6.142)$$

o, resumiendo,

$$M^{2n+1} = \zeta^{2n} M, \quad M^{2n} = \zeta^{2n-2} M^2. \quad (6.143)$$

Con estas relaciones, podemos calcular  $\Lambda$  de la forma siguiente:

$$\Lambda = I + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M^{2m+1}}{(2m+1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{M^{2m}}{(2m)!} \quad (6.144)$$

$$= I + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2m} M}{(2m+1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2m-2} M^2}{(2m)!} \quad (6.145)$$

$$= I + M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2m}}{(2m+1)!} + M^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2m-2}}{(2m)!} \quad (6.146)$$

$$= I + \frac{1}{\zeta} M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{1}{\zeta^2} M^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{2m}}{(2m)!} \quad (6.147)$$

$$= I + \frac{1}{\zeta} M \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{1}{\zeta^2} M^2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2m}}{(2m)!} - 1 \right). \quad (6.148)$$

Las series en la expresión anterior corresponden a las funciones  $\cosh$  y  $\sinh$ , ya que

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (6.149)$$



De esta forma encontramos que

$$\Lambda = I + M \frac{1}{\zeta} \sinh \zeta + M^2 \frac{1}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1). \quad (6.150)$$

Reemplazando, obtenemos:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \frac{-\zeta_1}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{-\zeta_2}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{-\zeta_3}{\zeta} \sinh \zeta \\ \frac{-\zeta_1}{\zeta} \sinh \zeta & 1 + \frac{\zeta_1^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_1 \zeta_3}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \\ \frac{-\zeta_2}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{\zeta_2 \zeta_1}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & 1 + \frac{\zeta_2^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_2 \zeta_3}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \\ \frac{-\zeta_3}{\zeta} \sinh \zeta & \frac{\zeta_3 \zeta_1}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & \frac{\zeta_3 \zeta_2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) & 1 + \frac{\zeta_3^2}{\zeta^2} (\cosh \zeta - 1) \end{pmatrix}. \quad (6.151)$$

Finalmente, definiendo

$$\beta^i := \tanh \zeta^i, \quad (6.152)$$

de modo que (identidades)

$$\sinh \zeta^i = \gamma \beta^i, \quad \beta = \tanh \zeta, \quad \cosh \zeta = \gamma, \quad \sinh \zeta = \gamma \beta, \quad (6.153)$$

y además

$$\frac{\zeta_i}{\zeta} = \frac{\beta^i}{\beta}. \quad (6.154)$$

Reemplazando (6.153) y (6.154) en (6.151) obtenemos el boost general (6.96).

## 6.4. Mecánica Relativista.

### 6.4.1. 4-velocidad

Definiremos la 4-velocidad como una cantidad que sea un vector bajo TL's y que está relacionada con la usual velocidad. Recuerde que la velocidad de una partícula no forma directamente un 4-vector bajo TL's, ver (6.77). Para esto, usaremos el intervalo de tiempo propio  $d\tau = ds/c = \gamma^{-1} dt$  sobre la trayectoria de una partícula, que es un escalar bajo TL's, para parametrizar la línea de mundo de la misma partícula. En lugar de usar  $\vec{x} = \vec{x}(t)$ , usaremos  $x^\mu = x^\mu(\tau)$ , y definimos la 4-velocidad (instantánea) por

$$\boxed{u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}}. \quad (6.155) \text{ 4-velocidad}$$

Debido a las propiedades de transformación de las coordenadas  $x^\mu$  y del tiempo propio  $d\tau$ , es directo verificar que la 4-velocidad  $u^\mu$  es un 4-vector (contravariante) bajo TL's. Además, la definición (6.155) implica que

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma, \quad (6.156)$$

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \vec{v}\gamma. \quad (6.157)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{u^\mu = (\gamma c, \gamma \vec{v})}. \quad (6.158)$$

Similarmente, si conocemos las componentes de la 4-velocidad, entonces las componentes de la velocidad (tridimensional, a veces llamada “velocidad ordinaria”) quedan dados por

$$\vec{v} = c \frac{\vec{u}}{u^0}. \quad (6.159)$$

Lo anterior muestra que la 4-velocidad  $u^\mu$  contiene la misma información que la velocidad  $\vec{v}$ , con la diferencia que  $u^\mu$  transforma como un 4-vector bajo TL’s.

Además, es directo verificar que

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 \quad (6.160)$$

$$= (c^2 - v^2)\gamma^2 \quad (6.161)$$

$$= \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} \quad (6.162)$$

$$= c^2. \quad (6.163)$$

En resumen,

$$\boxed{u^\mu u_\mu \equiv c^2}. \quad (6.164)$$

Observe que  $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu = (u^0, -u^i) = (u^0, -\vec{u}) = (\gamma c, -\gamma \vec{v})$ .

#### 6.4.2. 4-aceleración

Análogamente a la 4-velocidad, definimos la 4-aceleración  $a^\mu$  de una partícula, por

4-aceleración  $\boxed{a^\mu := \frac{du^\mu}{d\tau}}. \quad (6.165)$

Usando la identidad (6.164) es directo probar que

$$a^\mu u_\mu \equiv 0. \quad (6.166)$$

Podemos expresar las componentes de la 4-aceleración  $a^\mu$  en términos de la aceleración (“ordinaria”)  $\vec{a} := d\vec{v}/dt$ :

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \quad (6.167)$$

$$= \frac{d}{d\tau} (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (6.168)$$

$$= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v}) \quad (6.169)$$

$$= \gamma \frac{d}{dt} (\gamma c, \gamma \vec{v}), \quad (6.170)$$

pero

$$\frac{d}{dt}\gamma = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}} \quad (6.171)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\left(-\frac{2}{c^2}\right) \vec{v} \cdot \vec{a}}{\left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (6.172)$$

$$= \frac{1}{c^2} \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}, \quad (6.173)$$

luego

$$\mathbf{a}^\mu = \left( c\gamma \frac{d}{dt}\gamma, \gamma \frac{d}{dt}\gamma \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad (6.174)$$

$$= \left( c\gamma \frac{1}{c^2} \gamma^3 \vec{v} \cdot \vec{a}, \gamma \frac{1}{c^2} \gamma^3 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right) \quad (6.175)$$

$$= \left( \frac{1}{c} \gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a}, \frac{1}{c^2} \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a} \right), \quad (6.176)$$

de donde

$$\mathbf{a}^0 = \frac{1}{c} \gamma^4 \vec{v} \cdot \vec{a}, \quad (6.177)$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{c^2} \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) \vec{v} + \gamma^2 \vec{a}. \quad (6.178)$$

De aquí podemos encontrar que

$$\mathbf{a}^\mu \mathbf{a}_\mu = -\frac{\gamma^6}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{a})^2 - \gamma^4 \vec{a}^2 = -\gamma^6 \left[ \vec{a}^2 - \frac{1}{c^2} (\vec{v} \times \vec{a})^2 \right]. \quad (6.179)$$

Finalmente, es posible escribir la aceleración de la partícula en función de las componentes de la 4-aceleración:

$$\vec{a} = \frac{1}{\gamma^2} \left( \vec{\mathbf{a}} - \frac{\vec{v}}{c} \mathbf{a}^0 \right). \quad (6.180)$$

### 6.4.3. 4-momento y Energía

Una forma simple de motivar la (nueva) definición relativista de la energía y momento lineal es usando una formulación covariante, es decir, usando vectores bajo TL's. Si el momento  $\vec{p}$  corresponde a las componentes espaciales de un 4-vector  $p^\mu$ , es decir, si existe un 4-vector  $p^\mu$  tal que  $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ , entonces la ley de conservación del momento ( $p_{1,i}^\mu + p_{2,i}^\mu = p_{1,f}^\mu + p_{2,f}^\mu$ ) será con seguridad válida en todo SRI.

#### 4-momento

Motivados por lo anterior, definimos el 4-momento como:

$$\boxed{p^\mu := mu^\mu}, \quad (6.181)$$

donde  $m$  es un escalar que describe las propiedades inerciales de la partícula. Algunos autores se refieren a  $m$  como la ‘masa en reposo’ de la partícula, para distinguirla de la ‘masa relativista’  $m(v) = \gamma m = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Aquí, por el contrario, diremos que  $m$  es simplemente la masa (inercial) de la partícula (la única que definiremos en RE).

Usando (6.158) encontramos que las componentes del 4-momento  $p^\mu = (p^0, \vec{p})$ , están dadas por:

$$\boxed{p^0 = mu^0 = m\gamma c = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (6.182)$$

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{u} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (6.183)$$

De esta forma, encontramos que si definimos el momento como  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$  (es decir, básicamente la expresión no-relativista ‘corregida’ con un factor relativista  $\gamma$ ), entonces la ley de conservación del momento será válida en todo SRI.

El 4-momento, por otro lado, incluye una componente extra  $p^0$ , que es necesaria para formar un 4-vector y así asegurar la validez de la ley de conservación del momento en todo SRI, y que también describirá una ley de conservación. La componente temporal  $p^0 = m\gamma c$  puede ser indentificada con la energía de la partícula, por medio de  $E = p^0 c = \gamma mc^2$ . Podemos motivar esta interpretación notando que para velocidades no-relativistas  $p^0 c$  incluye la usual energía cinética (no-relativista) de la partícula:

$$p^0 c = m\gamma c^2 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right). \quad (6.184)$$

En RE, por tanto, se interpreta la componente temporal  $p^0$  del 4-momento como proporcional a la energía de una partícula,  $p^0 = E/c$ , de modo que

$$\boxed{E = m\gamma c^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}. \quad (6.185)$$

Esta identificación tiene como consecuencia que incluso una partícula en reposo, con  $\vec{v} = \vec{0}$ , poseerá una energía no nula, no presente en mecánica no-relativista, llamada energía en reposo:

$$\boxed{E_0 = mc^2}. \quad (6.186)$$

Ha sido comprobado experimentalmente que esta energía en reposo, que cada cuerpo posee por el sólo hecho de poseer masa, es real, en el sentido que puede ser transformada a otras formas de energía, por ejemplo, en procesos nucleares. Más aún, es posible interpretar (6.186) como una expresión que define la masa de un cuerpo: la masa de un cuerpo es una medida de la energía que posee cuando está en reposo:  $m = E_0/c^2$ . Si esta interpretación es correcta, si aumentamos la energía de un cuerpo en reposo, aumentamos también su masa, es decir, su inercia. Como consecuencia, la masa de un litro de agua a  $80^\circ C$  sería un poco mayor que la masa de un litro de agua a  $20^\circ C$  (¿cuánto?), la masa de un átomo de hidrógeno un poco menor que la suma de las masas de un protón y un electrón (¿cuánto?), etc.

La relación entre la energía de un cuerpo y su masa fue considerada por primera vez por Einstein en su paper de Septiembre de 1905 [?], cuyo título se traduciría como ¿Es la inercia de un cuerpo dependiente de su contenido de energía?. En 1935 Einstein escribió una “versión elemental de la equivalencia entre masa y energía” [?]. Un test moderno de esta relación puede encontrarse en [?], donde se observan procesos donde un núcleo atómico captura un neutrón y emite un rayo  $\gamma$ , ya que la diferencia de masa de los estados iniciales y finales, multiplicados por  $c^2$ , debería ser igual a la energía del rayo  $\gamma$  emitido. Las mediciones confirman la relación masa-energía con un error máximo de 0.00004 %!. Por otro lado, en [?] se presenta el primer cálculo de las masas de los protones, neutrones, y otros hadrones livianos a partir de sus constituyentes, calculando a energía de cada sistema y usando  $m = E/c^2$ .

La interpretación de la componente temporal del 4-momento en términos de la energía expresa el caracter conjugado de estas dos variables. Recuerde que en mecánica clásica energía y momento lineal son variables conjugadas al tiempo y a las coordenadas espaciales, respectivamente. En particular, es conocido que si un sistema mecánico (su lagrangiano o hamiltoniano) es invariante bajo desplazamientos (“traslaciones”) temporales, entonces la energía del sistema será conservada. Por otro lado, si el sistema presenta invariancia bajo translaciones (espaciales), entonces su momento lineal total será conservado. Es entonces satisfactorio que en RE la energía y el momento lineal de un cuerpo sean respectivamente (proporcionales a) las componentes temporales y espaciales del 4-momento.

En RE (re-)definimos la energía cinética como la diferencia entre la energía total y la energía en reposo:

$$E_c := E - E_0, \quad (6.187)$$

$$= mc^2(\gamma - 1) \quad (6.188)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}\frac{m}{c^2}v^4 + O\left(\frac{v^6}{c^6}\right). \quad (6.189)$$

En resumen, en RE el 4-momento condensa el momento lineal y la energía

de una partícula:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad (6.190)$$

con

$$E = m\gamma c^2, \quad \vec{p} = m\gamma \vec{v}. \quad (6.191)$$

Una relación interesante es aquella que suministra la velocidad de la partícula en función de su momento y energía:

$$\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{E}. \quad (6.192)$$

Note que esta relación no involucra la masa de la partícula.

### Energía, momento y teorema trabajo-energía

Podemos verificar que la identificación de la componente temporal del 4-momento con la energía es consistente con el teorema de trabajo-energía en su formulación usual: **El trabajo total realizado sobre un cuerpo es igual al incremento en su energía.**

El trabajo que una fuerza  $\vec{F}$  realiza sobre un cuerpo, cuando éste se desplaza desde un punto a otro es dado por

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x}, \quad (6.193)$$

donde la fuerza  $\vec{F}$  es (por definición) la derivada temporal del momento  $\vec{p}$ , de modo que

$$W = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{x} \quad (6.194)$$

$$= \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt \quad (6.195)$$

$$= \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} dt. \quad (6.196)$$

Evaluando el producto en el integrando encontramos que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v} = \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} \quad (6.197)$$

$$= \left[ \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} \left( 1 + \frac{(v\gamma)^2}{c^2} \right) \right] \cdot m\vec{v} \quad (6.198)$$

$$= \frac{m\vec{v}}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6.199)$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (6.200)$$

$$= \frac{dE}{dt}, \quad (6.201)$$

de modo que:

$$\boxed{W = \Delta E.} \quad (6.202)$$

Note que, como consecuencia de lo anterior, y de la expresión relativista de la energía (6.185), el trabajo requerido para acelerar un cuerpo aumenta a medida que su velocidad es mayor. En particular, se requeriría infinita energía para acelerar un cuerpo hasta alcanzar la velocidad de la luz. En otras palabras, **no es posible acelerar un cuerpo de modo que este viaje a la velocidad de la luz.**

### Energía en función del momento

Es directo encontrar a partir de (6.164) y (6.181) que  $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ . Además, usando (6.190) podemos escribir

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (6.203)$$

Despejando la energía en función del momento, encontramos

$$\boxed{E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}.} \quad (6.204)$$

Combinando (6.204) con (6.192) podemos escribir la velocidad de un cuerpo en términos de su masa en reposo y su momento

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}}. \quad (6.205)$$

De aquí confirmamos que necesariamente  $v < c$ , para  $m \neq 0$ .

El caso límite en que la rapidez sea igual a la de la luz,  $v = c$ , al mismo tiempo que  $E \neq 0$ , sólo podría ocurrir si  $E = pc$  y  $m = 0$ . En efecto, de acuerdo a (6.192),  $v = c$  implica  $E = pc$  y por otro lado (6.204) requiere  $m = 0$  en este caso. Resumiendo, una partícula que se mueva a la velocidad de la luz puede ser descrita como caso particular de las relaciones cinemáticas de RE siempre que se asuma que  $m = 0$ , y que satisfaga

$$E = pc. \quad (6.206)$$

Sabemos que los fotones (los cuantos de energía electromagnética) satisfacen estas propiedades: tienen energía  $E = \hbar\omega$  y momento  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $\vec{k}$  el vector de onda de la radiación, que satisfacen la relación de dispersión (en el vacío)  $\omega = |\vec{k}|c$ . De esta forma vemos que los fotones también pueden ser incorporados a la descripción que la teoría de RE suministra para la energía y momento de un cuerpo, siempre que se considere su masa nula. Las expresiones relativistas de energía y momento son en este sentido universales, puesto que se aplican a todo tipo de partícula o cuerpo conocido.

#### 6.4.4. Ejemplos

- Efecto Compton. Ver figura (6.14). La conservación del 4-momento (es

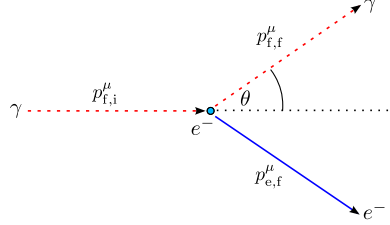


Figura 6.14: Scattering por un electrón, visto desde el SRI comóvil con el electrón inicial

decir, energía y momento), en este caso es:

$$p_{e,i}^{\mu} + p_{f,i}^{\mu} = p_{e,f}^{\mu} + p_{f,f}^{\mu}. \quad (6.207)$$

Es conveniente reordenar los términos y calcular el escalar correspondiente al “cuadrado” del 4-vector correspondiente, de modo que

$$(p_{e,i} - p_{e,f})^2 = (p_{f,f} - p_{f,i})^2, \quad (6.208)$$

$$p_{e,i}^2 + p_{e,f}^2 - 2 p_{e,i}^{\mu} p_{e,f}^{\mu} = p_{f,f}^2 + p_{f,i}^2 - 2 p_{f,i}^{\mu} p_{f,f}^{\mu}, \quad (6.209)$$

$$m_e^2 c^2 + m_e^2 c^2 - 2 \left[ \frac{E_{e,i}}{c} \frac{E_{e,f}}{c} - \vec{0} \cdot \vec{p}_{e,f} \right] = 0 + 0 - 2 \left[ \frac{E_{f,i}}{c} \frac{E_{f,f}}{c} - \vec{p}_{f,i} \cdot \vec{p}_{f,f} \right] \quad (6.210)$$

$$m_e^2 c^2 - m_e E_{e,f} = - \left[ \frac{\hbar \omega_i}{c} \frac{\hbar \omega_f}{c} - |\vec{p}_{f,i}| |\vec{p}_{f,f}| \cos \theta \right] \quad (6.211)$$

$$m_e^2 c^2 - m_e E_{e,f} = - \frac{\hbar \omega_i}{c} \frac{\hbar \omega_f}{c} (1 - \cos \theta). \quad (6.212)$$

Aquí hemos usado que en el SRI comóvil con el electrón inicial  $p_{e,i}^{\mu} = (E_{e,i}/c, \vec{0})$ , y que para fotones  $E_f = |\vec{p}_f|c = \hbar \omega$ . Ahora reescribiremos la energía  $E_{e,f}$  usando la conservación de la energía:

$$E_{e,i} + E_{f,i} = E_{e,f} + E_{f,f}, \quad (6.213)$$

$$m_e c^2 + \hbar \omega_i = E_{e,f} + \hbar \omega_f. \quad (6.214)$$

Entonces, podemos escribir

$$m_e^2 c^2 - m_e \left( m_e c^2 + \hbar \omega_i - \hbar \omega_f \right) = - \frac{\hbar \omega_i}{c} \frac{\hbar \omega_f}{c} (1 - \cos \theta) \quad (6.215)$$

$$- m_e \hbar \omega_i + m_e \hbar \omega_f = - \frac{\hbar \omega_i}{c} \frac{\hbar \omega_f}{c} (1 - \cos \theta) \quad (6.216)$$

$$\omega_f \left[ m_e + \frac{\hbar \omega_i}{c^2} (1 - \cos \theta) \right] = m_e \omega_i. \quad (6.217)$$



Así, encontramos que la frecuencia del fotón emitido en un ángulo  $\theta$  es de la forma

$$\omega_f = \frac{\omega_i}{\left[1 + \frac{\hbar\omega_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)\right]} \quad (6.218)$$

o, equivalentemente, su longitud de onda es

$$\lambda_f = \lambda_i \left[1 + \frac{\hbar\omega_i}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)\right] \quad (6.219)$$

$$= \lambda_i + \frac{2\pi\hbar}{m_e c} (1 - \cos \theta). \quad (6.220)$$

De aquí obtenemos directamente la expresión para el cambio de longitud de onda del fotón:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (6.221)$$

Desde el punto de vista de una teoría corpuscular de la luz, la reducción de frecuencia de la radiación emitida es natural debido a que parte de la energía del fotón inicial es transferida al electrón (recoil). Por otra parte, este resultado no puede ser entendido en el marco de la teoría ondulatoria clásica. Compton dedujo y confirmó experimentalmente (6.221) en 1922 [?]. El recoil del electrón fue medido un año más tarde por Wilson, usando una cámara de niebla. La longitud de Compton del electrón,  $h/m_e c \approx 2,426 \times 10^{-12} m$ .

$$p_{e,i}^\mu = p_{e,f}^\mu + p_f^\mu. \quad (6.222)$$

$$(p_{e,i} - p_f)^2 = (p_{e,f})^2, \quad (6.223)$$

$$p_{e,i}^2 + p_f^2 - 2p_{e,i}^\mu p_{\mu,f} = p_{e,f}^2, \quad (6.224)$$

$$m_e^2 c^2 + 0 - 2p_{e,i}^\mu p_{\mu,f} = m_e^2 c^2. \quad (6.225)$$

Por lo tanto,

$$p_{e,i}^\mu p_{\mu,f} = 0. \quad (6.226)$$

En el sistema en reposo del electrón inicial, tenemos

$$p_{e,i}^\mu p_{\mu,f} = \frac{E_{e,i}}{c} \frac{E_f}{c} = m_e E_f, \quad (6.227)$$

de modo que (6.226) implica que  $E_f = 0$  y por tanto  $p_f^\mu = 0$ , es decir, que no hay fotón!

6. *INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA ESPECIAL DE LA  
RELATIVIDAD*

Notas

---

## APÉNDICE A

---

### Demostración Teorema Helmholtz

---

Todo campo vectorial en 3 dimensiones, continuo y diferenciable (de clase  $C^2$ ), y que se anula en el infinito más rápidamente que  $r^{-3/2}$ , está únicamente determinado por “sus fuentes”: su rotacional (“densidad de circulación”) y por su divergencia (“densidad de fuente”).

Considere un campo vectorial  $\vec{V}(\vec{x})$ , definimos su divergencia y su rotacional, respectivamente, por

$$D(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}, \quad \vec{C}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (\text{A.1})$$

Entonces es posible descomponer  $\vec{V}(\vec{x})$  del modo siguiente:

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad (\text{A.2})$$

con

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV', \quad (\text{A.3})$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\vec{C}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV'. \quad (\text{A.4})$$

En efecto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{A.5})$$

$$= -\nabla^2\phi \quad (\text{A.6})$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \int_{R^3} \frac{D(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{A.7})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} D(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{A.8})$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{R^3} D(\vec{x}') (-4\pi\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')) dV' \quad (\text{A.9})$$

$$= \int_{R^3} D(\vec{x}')\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (\text{A.10})$$

$$= D(\vec{x}). \quad (\text{A.11})$$

Además

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{A.12})$$

$$= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \quad (\text{A.13})$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{A.14})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' - \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \vec{C}(\vec{x}') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' + \int_{R^3} \vec{C}(\vec{x}')\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}') dV' \quad (\text{A.16})$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} (\vec{C}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) dV' + \vec{C}(\vec{x}). \quad (\text{A.17})$$

Probaremos ahora que el primer término de (A.17) es cero si  $\vec{C}$  es un campo acotado. Usando notación indicial, tenemos que la (componente  $i$ -ésima de la) expresión en el primer término de (A.17), puede escribirse como

$$\int_{R^3} C'_j \partial_j \partial_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' = \int_{R^3} C'_j \partial'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dV' \quad (\text{A.18})$$

$$= \int_{R^3} \left[ \partial'_j \left( C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) - (\partial'_j C'_j) \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] dV' \quad (\text{A.19})$$

$$= \int_{R^3} \left[ \partial'_j \left( C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) + 0 \right] dV' \quad (\text{A.20})$$

$$= \oint_{\partial R^3} C'_j \partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS'_j \quad (\text{A.21})$$

$$(\text{A.22})$$

En el infinito ( $\partial R^3$ ),  $|\vec{x}'| \rightarrow \infty$ , de modo que  $\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{r}$ ,  $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \sim \frac{1}{r^2}$ . Además  $dS \sim r^2 d\Omega$  en el mismo límite, de modo que  $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS_j \sim d\Omega$ . En

otras palabras, la contribución de  $\partial'_i \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} dS_j$  es finita en el infinito espacial. Por lo tanto, la integral en (A.17) se anulará si  $\vec{C} \rightarrow \vec{0}$  en el infinito.

Hemos así verificado que, dada la divergencia y el rotacional de un campo vectorial tridimensional, es posible reconstruir el campo original. Además, todo campo vectorial tridimensional puede ser descompuesto en un término derivado de un campo escalar (de rotacional nulo) y un término derivado de un potencial vectorial (de divergencia nula). Note, sin embargo, que los campos “potenciales”  $\phi$  no son únicos (siempre es posible sumar una constante al potencial escalar  $\phi$  y un gradiente de otro campo escalar al potencial vectorial  $\vec{A}$ ).

Por otro lado, el vector  $\vec{V}$  calculado usando (A.2) es el único que tiene divergencia  $D$  y rotacional  $\vec{C}$ . En efecto, suponga que existen 2 campos  $\vec{V}_1$  y  $\vec{V}_2$  que satisfacen (A.1). Definiendo  $\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$  encontramos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{W} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{0}. \quad (\text{A.23})$$

La condición (A.23b) implica que es posible escribir  $\vec{W} = -\vec{\nabla}\psi$  con un campo escalar  $\psi$ . Con esto, (A.23a) implica que  $\psi$  debe satisfacer la ecuación de Laplace  $\nabla^2\psi = 0$ .

Usando la identidad primera identidad de Green:

$$\oint_{\partial V} \psi \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{S} \equiv \int_V [\psi \nabla^2\psi + (\vec{\nabla}\psi)^2] dV, \quad (\text{A.24})$$

encontramos:

$$\oint_{\partial V} \psi \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{S} \equiv \int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 dV. \quad (\text{A.25})$$

La integral del lado izquierdo de (A.25) se anula en el caso que  $V = R^3$  puesto que la familia de campos vectoriales  $\vec{V}$  considerados decrece más rápido que  $r^{-3/2}$  en el infinito<sup>1</sup>. Finalmente, la anulación del lado derecho de (A.25) requiere que  $\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$ , de modo que  $\psi$  puede a lo sumo ser una constante. En este caso, sin embargo,  $\vec{W} = -\vec{\nabla}\psi = \vec{0}$ , es decir  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ .

Como consecuencia de lo anterior, podemos establecer los siguientes resultados para un campo vectorial  $\vec{V}$  que se anula en el infinito más rápidamente que  $r^{-3/2}$ :

- Si la divergencia y el rotacional de un campo vectorial son conocidos y si este campo no tiene fuentes en el infinito, entonces el campo está únicamente determinado
- Si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$  y  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$  entonces  $\vec{V}$  puede ser derivado de un campo escalar:  $\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi$ .
- Si  $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \vec{0}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  entonces  $\vec{V}$  puede ser derivado de un campo vectorial:  $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ .

---

<sup>1</sup>Como consecuencia  $\psi$  decrece más rápido que  $r^{-3/2}$  y  $\psi\vec{\nabla}\psi$  decrece más rápido que  $r^{-2}$ , mientras que  $d\vec{S}$  aumenta como  $r^2$ .

- $\vec{V}$  puede ser descompuesto como una superposición (suma) de un campo libre de rotación y uno libre de fuentes.
- Si  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  en una cierta región, entonces  $\vec{V}$  puede ser derivado de un potencial  $\phi$  que satisface  $\nabla^2 \phi = 0$ . Decimos que  $\vec{V}$  es armónico en dicha región.
- Si  $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$  y  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$  en todo el espacio, entonces  $\vec{V} = \vec{0}$ .

## APÉNDICE B

---

### Sistemas de Unidades

---

#### B.1. Tabla de equivalencias para unidades gaussianas y S.I.

Corriente	1 statampere	=	$\frac{10}{c}$ ampere
Carga	1 statcoulomb	=	$\frac{c}{10}$ coulomb
voltaje	1 statvolt	≈	300 volt
Resistencia	1 statohm	≈	$9 \times 10^{11}$ ohm
Resistividad	1 segundo	≈	$9 \times 10^9$ ohm $\times$ metro
Capacitancia	1 centímetro	≈	$\frac{1}{9 \times 10^{11}}$ farad
Campo eléctrico	$1 \frac{\text{dina}}{\text{statcoulomb}}$	≈	$3 \times 10^4 \frac{\text{newton}}{\text{coulomb}}$
Autoinductancia	1 stathenry	≈	$9 \times 10^{11}$ henry
Inducción magnética	1 gauss	=	$10^{-4}$ tesla
Flujo magnético	1 maxwell	=	$10^{-8}$ tesla $\times$ m <sup>2</sup>
Intensidad de campo	1 oersted	=	$\frac{10^3}{4\pi} \frac{\text{ampere}}{\text{metro}}$

Cantidad	Símbolo	MKS		CGS
Longitud	$l$	1m	$10^2$	cm
Masa	$m$	1kg	$10^3$	g
Tiempo	$t$	1s	1	s
Frecuencia	$\nu$	1Hz	1	Hz
Fuerza	$F$	1N	$10^5$	dinas
Energía	$U, W$	1J	$10^7$	erg
Potencia	$P$	1W	$10^7$	$\frac{\text{erg}}{\text{s}}$
Carga	$q$	1coulomb	$3 \times 10^9$	statcoulombs
Densidad de Carga	$\rho$	$1 \frac{\text{coulomb}}{\text{m}^3}$	$3 \times 10^3$	$\frac{\text{statcoulombs}}{\text{cm}^3}$
Corriente	$I$	1amp	$3 \times 10^9$	statamperes
Densidad de Corriente	$J$	$1 \frac{\text{amp}}{\text{m}^2}$	$3 \times 10^5$	$\frac{\text{statamperes}}{\text{cm}^2}$
Campo Eléctrico	$E$	$1 \frac{\text{volt}}{\text{m}}$	$\frac{1}{3} \times 10^{-4}$	$\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$
Potencial	$\phi$	1volt	$\frac{1}{300}$	statvolt
Polarización	$P$	$1 \frac{\text{coul}}{\text{m}^2}$	$3 \times 10^5$	momento dipolar $\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^3}$
Desplazamiento	$D$	$1 \frac{\text{coul}}{\text{m}^2}$	$12\pi \times 10^5$	$\frac{\text{statvolt}}{\text{cm}}$ ó $\frac{\text{statcoulombs}}{\text{cm}^2}$
Conductividad	$\sigma$	$1 \frac{\text{mho}}{\text{m}}$	$9 \times 10^9$	$\frac{1}{\text{s}}$
Resistencia	$R$	1ohm	$\frac{1}{9} 10^{-11}$	$\frac{\text{s}}{\text{cm}}$
Capacitancia	$C$	1farad	$9 \times 10^{11}$	cm
Inducción Magnética	$B$	1tesla	$10^4$	gauss
Magnetización	$M$	$1 \frac{\text{ampere}}{\text{m}}$	$10^{-3}$	$\frac{\text{momento magnético}}{\text{cm}^3}$
Inductancia	$L$	1henry	$\frac{1}{9} \times 10^{-11}$	¿?
Acción	$S$	$\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$	$10^7$	$\text{g} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$

Los diferentes sistemas de unidades usados en la teoría electromagnética pueden entenderse en función de la libertad que existe para definir las unidades de carga y campo eléctrico y magnético. Aquí discutiremos algunas posibilidades, que incluyen al sistema S.I. y al gaussiano. Discutiremos cómo estos sistemas de unidades “separan” de forma diferente la magnitud de la carga eléctrica de la de los campos electromagnéticos. Las cantidades mecánicas, sin embargo, no son alteradas por estas diferentes formas de separar cargas y campos.

Para esta discusión, es conveniente considerar las cantidades puramente mecánicas relacionadas con las definiciones básicas de las cantidades electromagnéticas. En particular, la ley de Coulomb establece que la fuerza entre dos cargas es proporcional al producto de cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa:

$$F_e \propto \frac{qq'}{r^2}. \quad (\text{B.1})$$

Las unidades en que se miden las cargas depende del valor de la constante de proporcionalidad,

$$\vec{F}_e = \alpha_1 \frac{qq'}{r^2} \hat{r}. \quad (\text{B.2})$$



Esto determina además las unidades del campo eléctrico que es dado, por definición<sup>1</sup>, por  $\vec{E} = \vec{F}_e/q$ . De esta forma:

$$[q] = [\alpha_1]^{-1/2}[F]^{1/2}L = [\alpha_1]^{-1/2}M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}, \quad (\text{B.3})$$

$$[E] = [\alpha_1]^{1/2}[F]^{1/2}L^{-1} = [\alpha_1]^{1/2}M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}. \quad (\text{B.4})$$

Por otro lado, la fuerza magnética entre cargas en movimiento (corrientes) están dadas, por ejemplo, por la ley de Biot-Savart:

$$dF_m \propto II' dx \times dx' \frac{1}{r^2}. \quad (\text{B.5})$$

Aquí debemos introducir nuevamente una constante, tal que,

$$dF_m = \alpha_2 II' dx \times dx' \frac{1}{r^2}. \quad (\text{B.6})$$

El campo magnético, es definido tal que

$$d\vec{F}_m \propto I' d\vec{x}' \times d\vec{B}. \quad (\text{B.7})$$

En particular, existen sistemas de unidades que difieren en la constante de proporcionalidad de esta definición. Introducimos entonces otra constante de modo que

$$d\vec{F}_m = \alpha_3 I' d\vec{x}' \times d\vec{B}, \quad (\text{B.8})$$

y así

$$d\vec{B} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \frac{Id\vec{x} \times \hat{r}}{r^2}. \quad (\text{B.9})$$

Esto implica que

$$[B] = [\alpha_1]^{-1/2}[\alpha_2][\alpha_3]^{-1}M^{1/2}L^{1/2}T^{-2}. \quad (\text{B.10})$$

De la expresión (B.8) encontramos, equivalentemente, que la fuerza que ejerce un campo magnético sobre cargas puntuales es dado por

$$\vec{F}_m = \alpha_3 q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (\text{B.11})$$

de modo que la fuerza de Lorentz adopta la forma

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \alpha_3 \vec{v} \times \vec{B} \right). \quad (\text{B.12})$$

Usando (B.6) encontramos en particular que la fuerza entre dos líneas de corriente  $I$  e  $I'$ , de largo  $L$  y separadas una distancia  $d$  es

$$F = 2\alpha_2 II' \frac{L}{d}. \quad (\text{B.13})$$

---

<sup>1</sup>En principio, es posible definir el campo eléctrico y sus unidades asociadas introduciendo otra constante a elección, por ejemplo,  $\vec{E} = 8\vec{F}_e/q$ . No exploraremos aquí esta posibilidad.

A partir de estas definiciones básicas es posible encontrar la forma de las ecuaciones de Maxwell correspondientes, de modo que se satisfaga la ley de Faraday y la ecuación de continuidad. Así obtenemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\alpha_1\rho, \quad (\text{B.14})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{B.15})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \alpha_3 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (\text{B.16})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \vec{J} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{B.17})$$

En una región libre de fuentes podemos derivar la ecuación de onda para las componentes del campo eléctrico, obteniendo

$$\left( \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{B.18})$$

de donde encontramos que la velocidad de la luz es dada por la relación

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{B.19})$$

Ya que  $c$  es una cantidad mecánica, su valor no debe depender del sistema de unidades usado para las cantidades electromagnéticas. Esto significa que sólo 2 de las 3 constantes pueden elegirse arbitrariamente, por ejemplo,  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$ , mientras que  $\alpha_1 = \alpha_2 c^2$ . A continuación resumiremos los dos sistemas de unidades más comúnmente usados.

## B.2. Sistema Internacional de unidades (S.I.)

En este sistema de unidades se define<sup>2</sup> un Ampere como “la intensidad de una corriente constante que manteniéndose en dos conductores paralelos, rectilíneos, de longitud infinita, de sección circular despreciable y situados a una distancia de un metro uno de otro en el vacío, produce una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  N por metro de longitud”. Esto implica que

$$\alpha_2 \stackrel{!}{=} 10^{-7} \text{NA}^{-2} =: \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (\text{B.20})$$

$$\alpha_3 \stackrel{!}{=} 1, \quad (\text{B.21})$$

---

<sup>2</sup>Ver, por ejemplo, la página correspondiente del Instituto Nacional de Estándars y Tecnología de Estados Unidos (NIST): <http://physics.nist.gov/cuu/Units/ampere.html>.

$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$	$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$
$\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}$	$[\vec{B}] = \frac{\text{Ns}}{\text{Cm}} = \frac{\text{kg}}{\text{Cs}}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$[\varepsilon_0] = \frac{\text{C}}{\text{mV}}$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$[\mu_0] = \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2}$
$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$[\vec{A}] = \frac{\text{N}}{\text{A}}$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$[F] = \text{N}$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	$[\phi] = \text{V}$

Cuadro B.1: Resumen Sistema Internacional de Unidades.

y además se denota

$$\alpha_1 =: \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (\text{B.22})$$

Por lo tanto, la velocidad de la luz es dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}. \quad (\text{B.23})$$

La tabla B.2 resume las ecuaciones de Maxwell en este sistema de unidades y las unidades en que son medidas cada cantidad.

### B.3. Sistema Gaussiano de Unidades (C.G.S.)

En este caso, se impone que

$$\alpha_1 \stackrel{!}{=} 1, \quad \alpha_3 \stackrel{!}{=} \frac{1}{c}, \quad (\text{B.24})$$

y como consecuencia

$$\alpha_2 = \frac{1}{c^2}. \quad (\text{B.25})$$

Como resultado, las cargas eléctricas así como los campos electromagnéticos necesariamente se miden en unidades con exponentes fraccionarios de las magnitudes básicas de longitud, tiempo y masa:

$$[q] = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}, \quad [E] = [B] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1}. \quad (\text{B.26})$$

Una ventaja relativa de este sistema es que los campos eléctricos y magnéticos tienen las mismas unidades. Otra es que en las ecuaciones de Maxwell sólo aparece una constante fundamental, la velocidad de la luz.

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$
$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$
$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Cuadro B.2: Resumen Sistema Gaussiano de Unidades.

#### B.4. Conversión de magnitudes S.I. a Gaussianas

$$\vec{E}_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{E}_{\text{G}}, \quad \vec{B}_{\text{SI}} = \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{B}_{\text{G}}, \quad q_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_{\text{G}} \quad (\text{B.27})$$

$$\vec{A}_{\text{SI}} = \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \vec{A}_{\text{G}}, \quad \phi_{\text{SI}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \phi_{\text{G}}. \quad (\text{B.28})$$

S.I.	→	Gauss.
$\vec{E}$	→	$\frac{\vec{E}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
$\vec{B}$	→	$\frac{\vec{B}}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
$q$	→	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} q$
$\vec{A}$	→	$\frac{\vec{A}}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
$\phi$	→	$\frac{\phi}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
$\vec{J}$	→	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{J}$
$\rho$	→	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho$

## APÉNDICE C

---

### Constantes Físicas (S.I.)

---

Nombre	Símbolo	Valor	Unidad
Número $\pi$	$\pi$	3.1415926535...	
Número e	e	2.7182818284...	
Carga elemental	$e$	$1,60217733 \cdot 10^{-19}$	C
Constante gravitacional	$G$	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$
Constante de Estructura fina	$\alpha = e^2/2hc\varepsilon_0$	$\approx 1/137$	
Rapidez de la luz en el vacío	$c$	$2,99792458 \cdot 10^8$	m/s (def)
Permitividad del vacío	$\varepsilon_0$	$8,854187 \cdot 10^{-12}$	F/m
Permeabilidad del vacío	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H/m (def)
$(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$		$8,9876 \cdot 10^9$	$\text{Nm}^2\text{C}^{-2}$
Constante de Planck	$h$	$6,6260755 \cdot 10^{-34}$	Js
Constante de Dirac	$\hbar = h/2\pi$	$1,0545727 \cdot 10^{-34}$	Js
Magnetón de Bohr	$\mu_B = e\hbar/2m_e$	$9,2741 \cdot 10^{-24}$	$\text{Am}^2$
Radio de Bohr	$a_0$	0,52918	Å
Constante de Rydberg	$Ry$	13.595	eV
Longitud de Compton del electrón	$\lambda_{Ce} = h/m_e c$	$2,463 \cdot 10^{-12}$	m
Longitud de Compton del protón	$\lambda_{Cp} = h/m_p c$	$1,3214 \cdot 10^{-15}$	m
Masa reducida del átomo de Hidrógeno	$\mu_H$	$9,1045755 \cdot 10^{-31}$	kg
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma$	$5,67032 \cdot 10^{-8}$	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante de Wien	$k_W$	$2,8978 \cdot 10^{-3}$	mK
Constante molar de los gases	$R$	8.31441	J/mol
Número de Avogadro	$N_A$	$6,0221367 \cdot 10^{23}$	$\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1,380658 \cdot 10^{-23}$	J/K
Masa del electrón	$m_e$	$9,1093897 \cdot 10^{-31}$	kg
Masa de protón	$m_p$	$1,6726231 \cdot 10^{-27}$	kg
Masa de neutrón	$m_n$	$1,674954 \cdot 10^{-27}$	kg
Unidad elemental de masa	$m_u = \frac{1}{12}m(^{12}_6\text{C})$	$1,6605656 \cdot 10^{-27}$	kg
Magnetón nuclear	$\mu_N$	$5,0508 \cdot 10^{-27}$	J/T
Diámetro del Sol	$D_\odot$	$1392 \cdot 10^6$	m
Masa del Sol	$M_\odot$	$1,989 \cdot 10^{30}$	kg
Periodo de rotación del Sol	$T_\odot$	25.38	días
Radio de la Tierra	$R_A$	$6,378 \cdot 10^6$	m
Masa de la Tierra	$M_A$	$5,976 \cdot 10^{24}$	kg
Periodo de rotación de la Tierra	$T_A$	23.96	hours
Periodo orbital Terrestre	A no tropical	365.24219879	días
Unidad Astronómica	AU	$1,4959787066 \cdot 10^{11}$	m
A no Luz	ly	$9,4605 \cdot 10^{15}$	m
Parsec	pc	$3,0857 \cdot 10^{16}$	m
Constante de Hubble	$H$	$\approx (75 \pm 25)$	$\text{km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}$

## APÉNDICE D

---

### Coordenadas curvilineas

---

#### D.1. Coordenadas Cartesianas

Vector

$$\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z} \quad (\text{D.1})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{D.2})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{D.3})$$

rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z} \quad (\text{D.4})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{D.5})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (\text{D.6})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = dy dz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z} \quad (\text{D.7})$$

Elemento de volumen:

$$dV = dx dy dz \quad (\text{D.8})$$

## D.2. Coordenadas Cilíndricas

Definición:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z \quad (\text{D.9})$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z \quad (\text{D.10})$$

Vector

$$\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\varphi} + A_z \hat{z} \quad (\text{D.11})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \hat{z} \quad (\text{D.12})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{D.13})$$

rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} \\ & + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (\text{D.15})$$

$$(\text{D.16})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\varphi} + dz \hat{z} \quad (\text{D.17})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = \rho d\varphi dz \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\varphi} + \rho d\rho d\varphi \hat{z} \quad (\text{D.18})$$

Elemento de volumen:

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz \quad (\text{D.19})$$



### D.3. Coordenadas Esféricas

Definición:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta \quad (\text{D.20})$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \varphi = \arctan(y/x) \quad (\text{D.21})$$

Vector

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi} \quad (\text{D.22})$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \quad (\text{D.23})$$

Divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (\text{D.24})$$

rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Laplaciano

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad (\text{D.26})$$

Desplazamiento:

$$d\vec{x} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi} \quad (\text{D.27})$$

Elemento de superficie:

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r} + r \sin \theta dr d\varphi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\varphi} \quad (\text{D.28})$$

Elemento de volumen:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{D.29})$$



## APÉNDICE E

---

### Números complejos

---

Un número o variable compleja se define como  $z = a + bj$ , donde<sup>1</sup>  $j = \sqrt{-1}$  y  $a, b \in R$ . Denotamos por  $C$  al conjunto de números complejos, es decir,  $z \in C$ . Esta forma de representar  $z$  se conoce como forma rectangular. La variable compleja  $z \in C$  se puede escribir en coordenadas polares, también conocida como forma de *Stenmetz*, como

$$z = r\angle\theta, \quad (\text{E.1})$$

donde

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{E.2})$$

$$\theta = \arctan \frac{b}{a}. \quad (\text{E.3})$$

La fórmula de Euler  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  permite representar la variable compleja  $z$  como

$$z = r \cos \theta + jr \sin \theta = re^{j\theta}. \quad (\text{E.4})$$

La suma de  $z_1 = a_1 + b_1j$  y  $z_2 = a_2 + b_2j$  está dada por

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j. \quad (\text{E.5})$$

El producto de  $z_1 = r_1\angle\theta_1j$  y  $z_2 = r_2\angle\theta_2$  está dada por

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)j. \quad (\text{E.6})$$

El inverso de un número complejo se calcula por medio del conjugado ( $\bar{z} = a - bj$ );

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bj}{a^2 + b^2}. \quad (\text{E.7})$$

---

<sup>1</sup>En matemáticas normalmente se define  $i := \sqrt{-1}$ . Dado que en teoría de redes la variable  $i$  se usa para denotar la corriente, usamos  $j$  en vez de  $i$ .



## APÉNDICE F

---

### Efecto Termionico

---

Usaremos el supuesto de que los electrones en un metal siguen la distribución de Boltzmann (debido a que la temperatura de operación es muy elevada con respecto al cero absoluto), asumiendo además que los electrones tienen una energía de degeneración constante  $E_F$  dentro del metal. Resultando una energía total  $E_F + \frac{1}{2}mv^2$ .

La densidad de estados combinada con el factor Boltzmann nos da la cantidad de electrones por unidad de volumen con una velocidad particular. Para que un electrón escape durante algún tiempo  $\Delta t$ , debe tener una velocidad  $v_x$  suficiente para superar la barrera de potencial del metal y además debe estar lo suficientemente cerca de la pared. Todos los electrones con  $v_x > 2U/ma$  una distancia  $v_x\Delta t$ , escapará, donde  $U$  es la profundidad del pozo potencial para los electrones. Por lo tanto, el número de electrones que escapan por el área  $A$  durante  $\Delta t$  es:

$$N \int e^{-E/kT} d^3v = e^{-E_F/kT} NA\Delta t \int_{\sqrt{2U/m}}^{\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} dv_z \quad (\text{F.1})$$

, usando la integral para una gaussiana  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ , podemos deducir

$$J = \frac{eN \int e^{-E/kT} d^3v}{A\Delta t} = \frac{N\pi e(kT)^2}{m^2} e^{-(U-E_F)/kT} = \frac{N\pi e(kT)^2}{m^2} e^{-W/kT}, \quad (\text{F.2})$$

donde  $W$  es conocida como la función de trabajo del metal.



---

## Bibliografía

---

- [1] BURBANO, FISICA GENERAL - 32 EDICIÓN, paginas 70-80. Ed. Tebar Flores.
  - [2] Apostol, T. Calculus (Vol. 2). Editorial Rerverté.
  - [3] MATTHEW N.O. SADIKU , elementos de electromagnetismo (3<sup>a</sup> ed.), Editoria Universidad
  - [4] Guillermo Monsivais et all, Teoremas de Green Gauss y Stokes para funciones discontinuas, Prensa Ciencias.
  - [5] A.H. Zemanian, Distribution Theory and Transform Analysis: An Introduction to Generalized Functions, with Applications, Dover
  - [6] WILLIAM R. SMYTHE, Static-and-Dynamic-Electricity, Ed Taylor and francis.
- 
- [1] Griffiths, David. *Introduction to electrodynamics*. Upper Saddle River, New Jersey. Prentice Hall, 1999.
  - [2] Barret O'Neil . "Elementos de Goemetría Diferencial"

---

## Índice alfabético

---

Balanza de coulomb, 50  
carga eléctrica, 47  
Efecto triboeléctrico, 49  
Electrostática, 47  
Ley de Coulomb, 51  
Magnetostática, 127  
Teorema de Earnshaw, 60  
Teorema de Thompson , 61