T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL HALKALAR ÜZERİNDE HOMOJEN METRİĞİNE GÖRE MÜKEMMEL LİNEER KODLARIN VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer KARA

Enstitü Anabilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Mehmet ÖZEN

MAYIS 2012

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÖZEL HALKALAR ÜZERİNDE HOMOJEN METRİĞİNE GÖRE MÜKEMMEL LİNEER KODLARIN VARLIĞI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ömer KARA

Enstitü Anabilim Dalı :MATEMATİK

Enstitü Bilim Dalı :CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

Bu tez 31 / 05 /2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç.Dr. Mehmet ÖZEN	Prof.Dr. İrfan ŞİAP	Prof.Dr. Metin BAŞARIR
Jüri Başkanı	**Jüri Üyesi**	**Jüri Üyesi**

TEŞEKKÜR

Tezin hazırlanma aşamasında desteklerini esirgemeyen danışman hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet ÖZEN'e, problemin ilerlemesinde katkıları olan Sayın Prof. Dr. İrfan ŞİAP ve Sayın Dr. Vedat ŞİAP'a teşekkürlerimi bildiririm. Bu çalışma 109T328 numarasıyla, Tübitak tarafından desteklenen projenin bir parçasıdır. TÜBİTAK'a da desteklerinden ötürü teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, benden manevi desteklerini esirgemeyen annem, babam ve eşime de teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

w_{hom}	: Homojen Ağırlık
C	: Kodların bulunduğu küme
$[n,k,d]$	: n uzunluğunda, k boyutlu, d minimum uzaklığında bir lineer kod
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar Kümesi

TABLOLAR LİSTESİ

ÖZET

Anahtar Kelimeler : Lineer Kodlar, Mükemmel Kodlar, Homojen Ağırlık

Dört bölüm halinde düzenlenen bu çalışmanın birinci bölümünde gerekli cebirsel tanımlar, teoremler, lineer kodlar ve $\mathbb{Z}_{2^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre mükemmel kodlarla ilgili bilgiler verilmektedir.

İkinci bölümde $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Üçüncü bölümde $\mathbb{Z}_{5^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili çalışmalar yapılmıştır.

ON THE EXISTENCE OF PERFECT LINEAR CODES OVER SOME SPECIAL RINGS WITH RESPECT TO HOMOGENOUS **METRIC**

SUMMARY

Keywords : Linear Codes, Perfect Codes, Homogenous Weight

This study consists of four chapters. First chapter includes algebraic definitions, theorems, some information for linear codes and the studies on perfect codes over homogenous weight have been summarized.

In the second chapter, studies on the existence of perfect codes over $\mathbb{Z}_{3^l}$ have been carried out.

In the third chapter, studies on the existence of perfect codes over $\mathbb{Z}_{5^l}$ have been carried out.

In the fourth chapter, studies on the existence of perfect codes over $\mathbb{Z}_{p^l}$ have been carried out.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Cebirsel Tanımlar

Bu bölümde verilecek tanım, önerme ve teoremler diğer bölümler için bir hazırlık niteliğinde olup diğer bölümlerde bu tanım ve teoremler kullanılacaktır.

Tanım 1.1.1 S boştan farklı bir küme olsun. S kümesinin elemanlarından oluşan her sıralı ikiliye S' de bir ve yalnız bir eleman karşılık getiren bir fonksiyona S üzerinde bir ikili işlem denir. Bu işlem "$*$" sembolü ile gösterilirse;

$$S \times S \to S$$

$$(a, b) \mapsto a * b$$

ile tanımlanır [1].

Tanım 1.1.2 G boştan farklı bir küme ve "$\cdot$" G'de bir ikili işlem olsun. Eğer $(G,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir grup denir.

$G1$: $\cdot$, G de bir ikili işlemdir.

$G2$: $\cdot$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ için, $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ dir.

$G3$: $\cdot$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani $\forall g \in G$ için sırasıyla $g \cdot e = e \cdot g = g$ olacak şekilde $\exists e \in G$ vardır.

$G4$: $\cdot$ işlemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani $g \in G$ için, $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ olacak şekilde $\exists g^{-1} \in G$ bulunabilir [1].

Tanım 1.1.3 G bir grup ve $g_1, g_2, \ldots, g_l \in G$ olsun. Eğer G'nin her elemanı $g_1, g_2, \ldots, g_l$ elemanlarından elde ediliyorsa bu elemanlara G grubunun üreteçleri denir ve G'nin bu elemanlar tarafından üretildiği $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_l \rangle$ şeklinde gösterilir [1].

Tanım 1.1.4 Eğer G grubu bir a elemanı tarafından üretiliyorsa bu gruba devirli grup denir ve $G = \langle a \rangle$ ile gösterilir. Bu durumda $\forall g \in G$ için $g = a^k$ olacak şekilde $\exists k \in \mathbb{Z}$ vardır [1].

Tanım 1.1.5 $R \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı ikili işlem $\oplus$ ve $\otimes$ olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $(R, \oplus, \otimes)$ cebirsel yapısına bir halka denir.

a. $(R, \oplus)$ bir değişmeli gruptur.

b. $\otimes$ işleminin R'de birleşme özelliği vardır.

c. $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine R'de sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır [1].

Tanım 1.1.6 R birimli değişmeli bir halka olsun. Eğer $R^* = R - \{0_R\}$ kümesi $\otimes$ işlemine göre bir grup ise R'ye bir cisim denir [1].

Tanım 1.1.7 R bir halka ve $\varnothing \neq I \subseteq R$ olsun.

a. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve

b. $\forall r \in R$ ve $\forall a \in I$ için, $ra \in I$ (veya $ar \in I$) ise I'ya R'nin bir sol (veya sağ) ideali denir. Hem sol hem de sağ ideale iki taraflı ideal ya da kısaca ideal denir [1].

Tanım 1.1.8 A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R' nin A'yı kapsayan bütün ideallerinin arakesitine A'nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. A'nın elemanlarına da, (A)nın üreteçleri denir [2] .

Tanım 1.1.9 I ve J bir R halkasının ideali olsun.

$I+J=\{a+b : a\in I,\ b\in J\}$

ye, I ve J ideallerinin toplamı denir. $I+J$ nin de bir ideal olduğu gösterilebilir [2].

Tanım 1.1.10 R bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. $\forall a,b\in R$ için,

$a\equiv b\ (\operatorname{mod} I)\Leftrightarrow a-b\in I$

biçiminde tanımlanır [2].

Önerme 1.1.1 R halkasının, bir I idealine göre Tanım 1.1.10 da tanımlanan $\equiv$ bağıntısı, R de bir denklik bağıntısıdır. $r\in R$ nin denklik sınıfı da

$\bar{r}=r+I=\{r+a : a\in I\}$

dir. Bütün denklik sınıfları kümesi R/I ile gösterilir [2].

Önerme 1.1.2 R halkasının, bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;

$(a+I)\oplus(b+I)=(a+b)+I$, $(a+I)\odot(b+I)=(ab)+I$

ile tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu halkaya R nin I idealine göre bölüm halkası denir [2].

Tanım 1.1.11 R değişmeli bir halka ve M bir değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} \bullet : R\times M &\to M \\ (r,m) &\mapsto r.m \end{aligned}$$

dönüşümü altında, $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $\forall m_1, m_2 \in M$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M bir sol $R-$modüldür.

$a.\quad r\left(m+m_2\right)=rm+rm_2,$

$b.\ \left(r+r_1\right)m=rm+r_1m,$

$c.\left(rr_1\right)m=r\left(r_1m\right),$

$d.1_R m=m.$

Eğer R halkasının yerine $\mathbb{F}$ cismi alınırsa M, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur [3].

Tanım 1.1.12 $m>0$ ve $a,b\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $a\equiv b\left(\bmod m\right)\Leftrightarrow a=b+qm$ olacak şekilde bir q tam sayısı vardır [4] .

Tanım 1.1.13 $a,b,c\in\mathbb{Z}$ ve $m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

1) $a\equiv b\left(\bmod m\right)\Rightarrow a+c\equiv b+c\left(\bmod m\right)$

2) $a\equiv b\left(\bmod m\right)\Rightarrow a\cdot c\equiv b\cdot c\left(\bmod m\right)$ [5]

Teorem 1.1.1 a ile b birer tamsayı ve $d=\left(a,b\right)$ olsun. $ax+by=c$ denkleminin çözümünün olması için gerek ve yeter şart $d\mid c$ olmasıdır. $d\nmid c$ ise çözüm yoktur [5].

1.2. Lineer Kodlar

Tanım 1.2.1 $A=\left\{a_1,\quad a_2,\quad \cdots\quad a_q\right\}$ sonlu cümlesine $q-$lu alfabe ya da kısaca alfabe diye tanımlanır. A cümlesinin elemanlarından oluşan $n-$lilerin oluşturduğu A^n kümesine sözler ailesi denir. A^n'nin herhangi bir C altkümesine $q-$lu blok kodu ve C'nin elemanlarına ise kodsöz denir. $C\subset A^n$'nin M tane elemanı varsa

C' n uzunluğunda, M büyüklüğünde bir kod diye isimlendirilir ve (n, M) parametreleri ile gösterilir [6].

Tanım 1.2.2 u ve v aynı uzunlukta ve aynı alfabe üzerinde tanımlanmış $n-$liler olsun. u ile v'nin farklı bileşenlerinin sayısına u ile v arasındaki Hamming uzaklığı denir ve $d(u,v)$ ile gösterilir. $d: A^n \times A^n \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, $d(u,v) = \left|\{i: \ u_i \neq v_i, \ 1 \leq i \leq n\}\right|$ olmak üzere (A^n, d) ikilisi bir metrik uzay oluşturur [6].

Tanım 1.2.3 $d(C) = \min\limits_{u,v \in C, u \neq v} d(u,v)$ sayısına C kodunun minimum uzaklığı denir. n uzunluğunda, M elemana sahip ve minimum uzaklığı d olan bir kod kısaca (n, M, d) şeklinde gösterilir [6].

Tanım 1.2.4 q elemanlı $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde n uzunluklu bütün vektörlerden oluşan küme bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzay $V(n,q)$ ile gösterilir. C kümesi $V(n,q)$ vektör uzayının k boyutlu bir altkümesi olsun. C'ye n uzunluğunda ve k boyutlu bir lineer kod denir ve $[n,k]$ ile gösterilir. Eğer C kodunun minimum uzaklığı d ise bu kod $[n,k,d]$ parametreleri ile gösterilir.

$c \in C$'nin Hammimg ağırlığı bu koddaki sıfırdan farklı bileşenlerin sayısı olarak tanımlanır ve $w(c)$ biçiminde gösterilir. C'nin sıfır vektörü hariç geri kalan elemanlarının en küçüğüne ise C kodunun minimum ağırlığı denir ve $w(C)$ ile gösterilir.

Lineer kodlarda $d(C) = w(C)$'dir [6].

Tanım 1.2.5 Hamming metriğine göre iç çarpım, $u, v \in C \subset V(n,q)$ olmak üzere

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

şeklinde tanımlanır .

Tanım 1.2.6 C kodu bir $[n, k]$ lineer kod olsun. $C^{\perp} = \{u \in V(n, q) : \langle u, v \rangle = 0,$ $\forall v \in C\}$ kümesine C kodunun diki (duali) denir [6].

Teorem 1.2.1 $\mathbb{F}_q$ cismi üzerinde bir lineer $[n, k, d]$ kodu verildiğinde, ilk k sütunu k boyutlu I_k birim matrisi olan $G = [I_k, A]$ standart formdaki üreteç matrisine sahip bir koda denktir [6].

Teorem 1.2.2 C kodu $G = [I_k, A]$ standart formdaki üreteç matrisine sahip $[n, k]$ parametreli bir lineer kod ise C'nin diki de $H = [-A^{tr}, I_{n-k}]$ üreteç matrisine sahip bir $[n, n-k]$ lineer kod olur. H matrisine C kodunun kontrol matrisi denir [6].

1.3. $\mathbb{Z}_{2^l}$ Üzerinde Mükemmel Kodlar

Bu kısımda, çalıştığımız konunun kısa bir tarihçesi ve bu konuda daha önce yapılan benzer çalışmaların kısa özeti verilmektedir.

Mükemmel kodlar, kodlama teorisinde önemli bir konu başlığıdır. Bu konudaki ilk çalışmalar 1940'lı yıllarda başladı. Hamming ve Golay bir hata düzelten mükemmel kodlarla ilgili ilk örnekleri vermişlerdir. Günümüzde de, mükemmel kodun bulunması, kodlama teorisinde zor bir problem olduğundan dolayı pek çok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu kod ailesinin bu kadar önemli olmasının altında yatan sebepler, optimal olması, dijital haberleşme ve transferi en iyi şekilde mümkün kılmasıdır. Farklı metriklerde mükemmel kodlar ile ilgili çalışılmalar yapılmaktadır. Hamming metriğinde [7] bilinen mükemmel kodlar, tek hatayı bulup düzeltebilen Hamming kodları ve Golay'ın $\mathbb{Z}_2$ üzerinde $G_{23}(23,12,7)$ ve onun $\mathbb{Z}_3$

üzerinde $(11,6,5)$ kodlarıdır [8]. Daha sonra yapılan çalışmalarda 1973 yılında Hamming metriğinde, asal kuvvet alfabesinde mükemmel kod olmadığı Tietavainen [9] ve Van Lint [10] tarafından ispatlandı.

Geçtiğimiz yıl yapılan bir çalışmada [11], $\mathbb{Z}_4$ halkasında homojen ağırlığa göre mükemmel kodun varlığı ile ilgili problem çözülmüş ve tek veya çift uzunluğa sahip aşikar olmayan mükemmel $\mathbb{Z}_4$ lineer kod yoktur sonucuna varılmıştır. Homojen metriğe göre $l \geq 3$ için modulo 2^l de tamsayılar halkası üzerinde mükemmel lineer kod olup olmadığı incelenmiştir [12]. $l \geq 3$ pozitif tamsayısı için modulo 2^l deki tamsayıların bir halkası $\mathbb{Z}_{2^l}$ olsun. $\mathbb{Z}_{2^l}$ üzerinde oluşturulabilecek bütün n'liler $V_{2^l}^n$ olduğu takdirde $V_{2^l}^n$, $\mathbb{Z}_{2^l}$ üzerinde bir modüldür. Eğer C, sadece $\mathbb{Z}_{2^l}$'nin M tane uzunluğa sahip bir alt modülü ise, C'nin $[n,M]$ lineer kodu olduğu söylenebilir. Eğer, C n uzunluğunda ve bir k serbest alt modülü varsa, C'ye $[n,k]$ lineer kodu denir.

Tanım 1.3.1. p asal ve $k \geq 1$ olmak üzere, Z_{p^l} üzerinde homojen ağırlık aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} p^{kl-1}, & x \in p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l} - \{0\} \\ p^{l-2}(p-1), & x \notin p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad . \qquad [13]$$

Z_{2^l} üzerinde tanımlanan homojen ağırlık w_{hom} ise

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 2^{l-1}, & x \in 2^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} - \{0\} \\ 2^{l-2}, & x \notin 2^{l-1}\mathbb{Z}_{2^l} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Dahası $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in \mathbb{Z}_{2^l}^n$ için

$$w_{\text{hom}}(u) = \sum_{i=1}^{n} w_{\text{hom}}(u_i)$$

olur.

Her $u, v \in \mathbb{Z}_{2^l}^n$ için, homojen uzaklık d_{hom},

$$d_{\text{hom}}(u, v) = w_{\text{hom}}(u - v)$$

olarak tanımlanır [21].

1.3.1. Z_{2^l} üzerinde lineer kodlar

Sonlu halkalar üzerindeki kodlarla özellikle de $\mathbb{Z}_4$ halkasıyla çok fazla ilgilenilmiştir. $\mathbb{Z}_4$ üzerindeki lineer kodlar ve $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki lineer kodlar arasındaki önemli ilişki A.R. Hammons Jr., P.V. Kumar, A.R. Calderbank, N.J.A. Sloane ve P. Sole un çalışmaları ile ortaya çıkmıştır [14]. En iyi bilinen lineer olmayan ikili kodlar olan Kerdock ve Prepeta [15] kodlarıdır ki bu kodlar Gray fonksiyonu vasıtasıyla $\mathbb{Z}_4$ üzerindeki lineer kodlarının görüntüleri alınarak elde edilmiştir. J. Wolfman [16], $\mathbb{Z}_4$ üzerinde n uzunluklu lineer bir negacylic kodun Gray fonksiyonu altında uzaklığının korunduğunu fakat lineer olması gerekmeyen bir, ikili lineer kod olduğunu göstermiştir. Yukarıda bahsi geçen bu sonuçlar, daha sonra Tapia-Recillas ve Vega tarafından Z_{2^l} üzerindeki kodların kümesine genişletilmiştir [17]. S. Ling ve T.Blackford[18] çalışmalarında, [16] ve [17] sonuçları, $\mathbb{Z}_{2^{l+1}}$ halkası üzerine genişletmişlerdir. Bu halkdaki lineer kodların yapısını aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 1.3.1 Sıfır olmayan C lineer kodunun, Z_{2^l} üzerindeki üreteç matrisi, koordinatlarındaki uygun permütasyonları ile aşağıdaki formda yazılabilir.

$$G=\begin{pmatrix} I & A_{0,1} & A_{0,2} & A_{0,3} & \cdots & A_{0,l-1} & A_{0,l} \\ 0 & 2I & 2A_{1,2} & 2A_{1,3} & \cdots & 2A_{1,l-1} & 2A_{1,l} \\ 0 & 0 & 2^2 I & 2^3 A_{2,3} & \dots & 2^2 A_{2,l-1} & 2^2 A_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^{l-1} I & 2^{l-1} A_{l-1,l} \end{pmatrix}$$

Burada s_i n uzunluğuna eklenen sıfırdan farklı tamsayılar olmak üzere; G üreteç matrisinin sütunları $s_o, s_1, ..., s_{l-1}, s_l$ boyutlu bloklar halinde gruplandırılmaktadır. Buna ek olarak, C 2^s elemanlı bir koddur.

$$s=\sum_{i=0}^{l-1}(l-i)s_i$$

ise, C kodunun tipi

$$1^{s_0} 2^{s_1} \left(2^2\right)^{s_2} .....\left(2^{l-1}\right)^{s_{l-1}}$$

dir [21].

1.3.2. Z_{2^l} üzerinde mükemmel lineer kodlar

$\mathbb{Z}_{2^l}^n$ de uzaklık d_{hom} olduğunda, eğer $u \in \mathbb{Z}_{2^l}^n$ ve $t \geq 0$ tamsayısı ise, merkezi u ve yarıçapı t olan $B_{\text{hom}}(u,t)$ küresini

$$B_{\text{hom}}(u,t)=\left\{v \in \mathbb{Z}_{2^l}^n : d_{\text{hom}}(u,v) \leq t\right\}$$

tanımlanabilir.

$B_{\text{hom}}(u,t)$ nin eleman sayısı

$$\left|B_{\text{hom}}(u,t)\right| = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} \left(2^l - 1\right)^i$$

olur.

Eğer C;

$$\forall u, v \in C\left[(u \neq v) \Rightarrow B_{\text{hom}}(u,t) \cap B_{\text{hom}}(v,t) = \varnothing\right]$$

şartını sağlıyorsa, t hata düzelten bir koddur.

Yukarıdaki bahsedilen özellikleri sağlayan C'deki kodsözlerin oluşturduğu kürelerin birleşimi $\mathbb{Z}_{2^l}^n$ olur. C, t hata düzelten bir kod ve

$$\mathbb{Z}_{2^l}^n = \cup_{u \in C} B_{\text{hom}}(u,t)$$

ise C kodu mükemmel kod olarak adlandırılır. Bu durumda, her $v \in \mathbb{Z}_{2^l}^n$ ve $u \in C$ için $d(u,v) \leq t$ olacaktır.

$\mathbb{Z}_{2^l}$ üzerinde homojen ağırlığa bağlı olarak mükemmel lineer kod elde etmek için iki yol izlenebilir. Birincisi, $\mathbb{Z}_{2^l}$ üzerinde verilen bir C kodunun mükemmel bir kod olabilmesi için yukarıda bahsi geçen C kodundan alınan her u ve v elemanlarını içeren kürelerin ayrık olması ve bu kürelerin bütün uzayı örtmesi yoludur [19]. Diğer yol ise $\mathbb{Z}_2$ üzerinde mükemmel kodların varlığı ve yokluğu probleminin çözümü bilindiğinden, $\mathbb{Z}_{2^l}$ üzerinde mükemmel kod olup olmadığı problemini $\mathbb{Z}_2$ üzerine belli bir fonksiyon aracılığıyla taşıma yoludur.

Tanım 1.3.2 t bir pozitif tamsayı olmak üzere, eğer bir $[n,k]$ lineer kodu ağırlığı t'ye eşit ya da t'den küçük olan tüm hataları düzeltebiliyor ancak ağırlığı t'den büyük olan hataları düzeltemiyorsa, bu koda mükemmel kod denir. t ağırlığında veya t'den küçük hataları düzelten mükemmel kod için bütün sıfır vektörlerini içeren t veya t'den küçük ağırlıktaki vektörlerin sayısı mevcut sınıfların sayısına eşittir [20].

BÖLÜM 2. $\mathbb{Z}_{3^l}$ HALKASI ÜZERİNDE HOMOJEN AĞIRLIĞA GÖRE MÜKEMMEL LİNEER KODLARIN VARLIĞIN TESPİTİ

Bu bölümde $\mathbb{Z}_{3^2}$, $\mathbb{Z}_{3^3}$, $\mathbb{Z}_{3^4}$ halkaları üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemleri yapılmış ve bu durumlar $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerine genelleştirilmiştir. Homojen ağırlığı t olan söz sayıları hesaplanmış ve daha sonra hatalı vektör sayılarına göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili incelemeler yapılmıştır.

2.1. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Üzerinde Ağırlıklara Göre Sayma

Bu kısımda $\mathbb{Z}_{3^2}$, $\mathbb{Z}_{3^3}$, $\mathbb{Z}_{3^4}$ halkaları üzerinde homojen ağırlığa göre saymalar ve homojen ağırlığı t olan söz sayıları bulunmuş ve $\mathbb{Z}_{3^l}$ üzerine genelleştirilmiştir.

2.1.1. $\mathbb{Z}_{3^2}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{3^2}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibidir.

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 3 & , \quad x = 3,6 \\ 2 & , \quad x = 1,2,4,5,7,8 \end{cases} .$$

Tablo 2.1 $\mathbb{Z}_{3^2}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere $t = 0 \rightarrow 1 \cdot \binom{n}{0}$

Tablo 2.1 $\mathbb{Z}_{3^2}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı "(Devam)"

$$t=2\rightarrow\ 6\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=3\rightarrow\ 2\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=4\rightarrow\ 6^2\cdot\binom{n}{2}$$

$$t=5\rightarrow\ 2\cdot 6\cdot\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t=6\rightarrow\ 2^2\binom{n}{2}+6^3\binom{n}{3}$$

$$t=7\rightarrow\ 2.6^2\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$$

$$t=8\rightarrow\ 2^2.6\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}+6^4\binom{n}{4}$$

$$t=9\rightarrow\ 2.6^3\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}+2^3\binom{n}{3}$$

$$t=10\rightarrow\ 2^2.6^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}+6^5\binom{n}{5}$$

Teorem 2.1.1. $i=0$'dan $m-3i\geq 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının çift veya tek olma durumuna göre toplam sayısı,

$$t = 2m \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{m-3i} \binom{n-m+3i}{2i} \left(3^2 - 3\right)^{m-3i} 2^{2i}$$

$$t = 2m+1 \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{m-1-3i} \binom{n-m+1}{2i+1} \left(3^2 - 3\right)^{m-1} 2^{2i+1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $i \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

2.1.2. $\mathbb{Z}_{3^3}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{3^3}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibidir.

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 9 & , \quad x = 9,18 \\ 6 & , \quad x \in \mathbb{Z}_{27} \text{-} \{0,9,18\} \end{cases} \quad .$$

Tablo 2.2. $\mathbb{Z}_{3^3}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;
$t = 0 \rightarrow 1\binom{n}{0}$
$t = 6 \rightarrow 24\binom{n}{1}$
$t = 9 \rightarrow 2\binom{n}{1}$
$t = 12 \rightarrow 24^2\binom{n}{2}$
$t = 15 \rightarrow 24.2\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$
$t = 18 \rightarrow 24^3\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{2}$

Tablo 2.2. $\mathbb{Z}_{3^3}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı "(Devam)"

$t=21 \rightarrow 2.24^2\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$
$t=24 \rightarrow 2^2.24\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}+24^4\binom{n}{4}$
$t=27 \rightarrow 2^3\binom{n}{3}+2.24^3\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}$
$t=30 \rightarrow 2^2.24^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}+24^5\binom{n}{5}$

Teorem 2.1.2. $i=0$'dan $m-3i\geq 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının çift veya tek olma durumuna göre toplam sayısı,

$$t=2m(3) \rightarrow \sum_{i=0}\binom{n}{m-3i}\binom{n-m+3i}{2i}\left(3^3-3\right)^{m-3i}2^{2i}$$

$$t=2m+1(3) \rightarrow \sum_{i=0}\binom{n}{m-1-3i}\binom{n-m+1}{2i+1}\left(3^3-3\right)^{m-1}2^{2i+1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $i\in\mathbb{N}$ ve $m\in\mathbb{Z}^+$ dir.

2.1.3. $\mathbb{Z}_{3^4}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{3^4}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibidir.

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ 27 & , \quad x=27,54\\ 18 & , \quad x\in\mathbb{Z}_{81}\text{-}\{0,27,54\}\end{cases} \quad .$$

Tablo 2.3. $\mathbb{Z}_{3^4}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;

$$t=0 \rightarrow 1\binom{n}{0}$$

$$t=18 \rightarrow 78\binom{n}{1}$$

$$t=27 \rightarrow 2\binom{n}{1}$$

$$t=36 \rightarrow 78^2\binom{n}{2}$$

$$t=45 \rightarrow 78\cdot 2\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t=54 \rightarrow 78^3\binom{n}{3}+2^2\binom{n}{2}$$

$$t=63 \rightarrow 2.78^2\binom{n}{1}\binom{n-1}{2}$$

$$t=72 \rightarrow 78^4\binom{n}{4}+2^2.78^1\binom{n}{2}\binom{n-2}{1}$$

$$t=81 \rightarrow 2.78^3\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}+2^3\binom{n}{3}$$

$$t=90 \rightarrow 2^2\cdot 78^2\binom{n}{2}\binom{n-1}{2}+78^5\binom{n}{5}$$

Teorem 2.1.3. $i=0$'dan $m-3i \geq 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının çift veya tek olma durumuna göre toplam sayısı,

$$t=2m(9) \rightarrow \sum_{i=0}\binom{n}{m-3i}\binom{n-m+3i}{2i}\left(3^4-3\right)^{m-3i}2^{2i}$$

$$t = 2m+1(9) \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{m-1-3i} \binom{n-m+1}{2i+1} \left(3^4-3\right)^{m-1} 2^{2i+1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $i \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ dir.

2.1.4. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{3^l}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibidir.

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 3^{l-1} & , \quad x \in 3^{l-1}\mathbb{Z}_{3^l} - \{0\} \\ 2 \cdot 3^{l-2} & , \quad x \notin 3^{l-1}\mathbb{Z}_{3^l} \end{cases} .$$

Tablo 2.4. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;
$t = 0\left(3^{l-2}\right) \rightarrow \left(3^l-3\right)^0 \binom{n}{0}$
$t = 2\left(3^{l-2}\right) \rightarrow \left(3^l-3\right)^1 \binom{n}{1}$
$t = 3\left(3^{l-2}\right) \rightarrow 2\left(3^l-3\right)^0 \binom{n}{1}$
$t = 4\left(3^{l-2}\right) \rightarrow \left(3^l-3\right)^2 \binom{n}{2}$
$t = 5\left(3^{l-2}\right) \rightarrow 2.\left(3^l-3\right)^1 \binom{n}{1} \binom{n-1}{1}$
$t = 6\left(3^{l-2}\right) \rightarrow \left(3^l-3\right)^3 \binom{n}{3} + 2^2 \binom{n}{2}$
$t = 7\left(3^{l-2}\right) \rightarrow 2.\left(3^l-3\right)^2 \binom{n}{1} \binom{n-1}{2}$

Tablo 2.4. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı “(Devam)”

$t=8\left(3^{l-2}\right)\rightarrow\left(3^l-3\right)^4\binom{n}{4}+\left(3^l-3\right)^1 2^2\binom{n}{2}\binom{n-1}{1}$
$t=9\left(3^{l-2}\right)\rightarrow 2.\left(3^l-3\right)^3\binom{n}{1}\binom{n-1}{3}+\left(3^l-3\right)^0 2^3\binom{n}{3}\binom{n-3}{0}$
$t=10\left(3^{l-2}\right)\rightarrow\left(3^l-3\right)^5\binom{n}{5}+\left(3^l-3\right)^2 2^2\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$

Teorem 2.1.4. $i=0$’dan $m-3i\geq 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının çift veya tek olma durumuna göre toplam sayısı,

$$t=2m\left(3^{l-2}\right)\rightarrow\sum_{i=0}\binom{n}{m-3i}\binom{n-m+3i}{2i}\left(3^l-3\right)^{m-3i}2^{2i}$$

$$t=2m+1\left(3^{l-2}\right)\rightarrow\sum_{i=0}\binom{n}{m-1-3i}\binom{n-m+1}{2i+1}\left(3^l-3\right)^{m-1-3i}2^{2i+1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $i\in\mathbb{N}$ ve $m\in\mathbb{Z}^+$ dir.

2.2. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Üzerinde Hatalı Vektör Sayılarına Göre Mükemmel Kod İncelemesi

2.2.1. $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=2\cdot\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=2\cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 2.4. yardımıyla

$$1+\left(3^l-3\right)n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için;

$$1+\left(3^{l}-3\right)n=3^{s}$$

Burada $|V|=3^{kn}$ olduğundan ve $|C|=a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|}=3^{kn-a}$$

elde edilir. $kn-a=s$ alınmaktadır.

$1+\left(3^{l}-3\right)n=3^{s}$ denklemini $(\bmod 3)$ de incelediğimizde

$$1\equiv 0 \pmod 3$$

elde edilir ki bu da bize $t=2\cdot\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayıları için mükemmel kod olmadığını gösterir.

2.2.2 $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=3\cdot\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=3\cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 2.4. yardımıyla

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için;

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n=3^{s}$$

$$1+\left(3^{l}-1\right)\cdot n=3^{s}$$

$$\left(3^{l}-1\right)\cdot n=3^{s}-1$$

$$n=\frac{3^{s}-1}{3^{l}-1}$$

olur.

Bu eşitlikte $l|s$ parametreleri için sonsuz çözüm vardır. Bazı (l,s,n) parametreleri aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.5. Bazı (l,s,n) parametrelerinin tablosu

l	s	n
2	4	10
2	6	91
2	8	820
3	6	28
3	9	757
3	12	20440
4	8	82
4	12	6640
5	10	244
5	15	59253

Eğer mükemmel kod varsa bu parametreleri sağlamak durumundadır.

2.2.3 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=4\cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=4\cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 2.4. yardımıyla

$$1+\left(3^l-3\right)n+2n+\left(3^l-3\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için, ağırlığı $t = 4.\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n+\left(3^{l}-3\right)^{2}\frac{n\left(n-1\right)}{2} \tag{2.1}$$

biçimindedir.

(1) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{3^{2l}}{2}-3^{l+1}+\frac{9}{2}\right)n^{2}+\left(-\frac{3^{2l}}{2}+4.3^{l}-\frac{11}{2}\right)n+1 \tag{2.2}$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(3^{2l}-2.3^{l+1}+9\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)n+2=2.3^{s} \tag{2.3}$$

olduğundan

(3) no'lu denklemin her iki tarafı 2 ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\left(\underbrace{3^{2l}-6.3^{l}+9}_{a}\right)n^{2}+\left(\underbrace{-3^{2l}+8.3^{l}-11}_{b}\right)n+\underbrace{2-2.3^{s}}_{c}=0 \tag{2.4}$$

elde edilir. (4) no'lu denklemin diskriminantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta=\sqrt{b^{2}-4ac}$$

$$\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}-4\cdot\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\cdot\left(2-2.3^{s}\right) \tag{2.5}$$

$$\left(-3^{2l}+8.3^{l}-11\right)^{2}+4\cdot\left(3^{2l}-6.3^{l}+9\right)\cdot\left(2.3^{s}-2\right)$$

olur. Bu son eşitlik incelendiğinde $l \geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta > 0$ dır. Dolayısıyla (4) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.6}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 8.3^l - 11\right)^2 + 4\cdot\left(3^{2l} - 6.3^l + 9\right)\cdot\left(2.3^s - 2\right)} \tag{2.7}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (2.6) no'lu kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned} &(1)\ l = s \\ &(2)\ s > l \\ &(3)\ s < l \end{aligned} \tag{2.8}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (7) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 8.3^l - 11\right)^2 + 4\cdot\left(3^{2l} - 6.3^l + 9\right)\cdot\left(2.3^l - 2\right)} \tag{2.9}$$

olur. (9) no'lu denklemde $x = 3^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^2 + 8.x - 11\right)^2 + 4\cdot\left(x^2 - 6.x + 9\right)\cdot\left(2.x - 2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 56x + 49}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(x^2 - 4x + 7\right)^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = \left|x^2 - 4x + 7\right| \tag{2.10}$$

olur ve (10) no'lu ifade de $x^2 - 4x + 7$ daima pozitif olduğundan,

$$\sqrt{\Delta} = x^2 - 4x + 7 \tag{2.11}$$

olarak elde edilir. (2.11) no'lu denklem (2.6) no'lu köklerde sırasıyla yerine yazılırsa,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2 + 8.x - 11\right) - \left(x^2 - 4.x + 7\right)}{2 \cdot \left(x^2 - 6.x + 9\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2 - 8.x + 11 - x^2 + 4.x - 7}{2 \cdot \left(x^2 - 6.x + 9\right)}$$

$$r_1 = -2\frac{\left(x-1\right)}{\left(x-3\right)^2} \tag{2.12}$$

elde edilir. (12) no'lu eşitlikte $x = 3^l$ ve $l \geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-\left(-x^2 + 8.x - 11\right) + \left(x^2 - 4.x + 7\right)}{2 \cdot \left(x^2 - 6.x + 9\right)}$$

$$r_2 = \frac{x^2 - 8.x + 11 + x^2 - 4.x + 7}{2 \cdot \left(x^2 - 6.x + 9\right)}$$

$$r_2 = \frac{2x^2 - 12.x + 18}{2x^2 - 12.x + 18}$$

$$r_2 = 1 \tag{2.13}$$

elde edilir. (13) no'lu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Ancak $n=1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı $t = 4\cdot(3)^{l-2}$ olamaz ancak $t = 3\cdot(3)^{l-2}$ ve $t = 2\cdot(3)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s > l$ olsun. $s > l$ ise $s = l + k$ yazılabilir. Burada, $k \in \mathbb{Z}^+$ dır.
(7) no'lu ifadede $s = l + k$ ve $x = 3^l\ (l \geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 8.3^l - 11\right)^2 + 4\cdot\left(3^{2l} - 6.3^l + 9\right)\cdot\left(2.3^{l+k} - 2\right)}$$

olur. Burada $x = 3^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^2 + 8.x - 11\right)^2 + 4\cdot\left(x^2 - 6.x + 9\right)\cdot\left(2.x\cdot 3^k - 2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^4 + \left(-16 + 8\cdot 3^k\right)\cdot x^3 + \left(78 - 48\cdot 3^k\right)\cdot x^2 + \left(-128 + 72\cdot 3^k\right)\cdot x + 49} \tag{2.14}$$

elde edilir. Eğer (4) no'lu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, (14) no'lu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^4 + \left(-16 + 8.3^k\right)x^3 + \left(78 - 48.3^k\right)x^2 + \left(-128 + 72.3^k\right)x + 49 = \left(ax^2 + bx + c\right)^2 \tag{2.15}$$

şeklinde olmalıdır. (15) no'lu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$x^4 + \left(-16 + 8.3^k\right)x^3 + \left(78 - 48.3^k\right)x^2 + \left(-128 + 72.3^k\right)x + 49 =$$
$$a^2x^4 + 2abx^3 + \left(b^2 + 2ac\right)x^2 + 2bcx + c^2$$

eşitliği elde edilir. Polinom eşitliği kullanılarak,

$a^2 = 1$ (2.16.1)

$2ab = -16 + 8.3^k$ (2.16.2)

$b^2 + 2ac = 78 - 48.3^k$ (2.16.3)

$2bc = -128 + 72.3^k$ (2.16.4)

$c^2 = 49$ (2.16.5) (2.16)

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a = \mp 1$ ve $c = \mp 7$ olmak üzere 4 durumun incelenmesi gerekir.

a) $a = 1,\ c = 7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$2b = -16 + 8.3^k \Rightarrow b = -8 + 4.3^k$ (17.1)

$b^2 + 14 = 78 - 48.3^k$ (17.2)

elde edilir. (17.1), (17.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8 + 4.3^k\right)^2 + 14 = 78 - 48.3^k$$
$$\Rightarrow 64 - 64.3^k + 16.3^{2k} + 14 = 78 - 48.3^k$$
$$\Rightarrow 16.3^{2k} - 16.3^k = 0$$
$$\Rightarrow 3^k\left(3^k - 1\right) = 0$$

elde edilir. $3^k \neq 0$ olduğundan $3^k = 1 \Rightarrow k = 0$ bulunur. Fakat $k \in \mathbb{Z}^+$ olması gerektiğinden dolayı bu durum olanaksızdır.

b) $a = 1,\ c = -7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=-8+4.3^k \qquad (2.18.1)$$
$$b^2-14=78-48.3^k \qquad (2.18.2)$$

elde edilir. (2.18.1), (2.18.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8+4.3^k\right)^2-14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}-14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k-28=0$$
$$\Rightarrow 4m^2-4m-7=0$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

c) $a=-1$, $c=7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=-8+4.3^k \qquad (2.19.1)$$
$$b^2-14=78-48.3^k \qquad (2.19.2)$$

elde edilir. (2.19.1), (2.19.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8+4.3^k\right)^2-14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}-14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k-28=0$$
$$\Rightarrow 4m^2-4m-7=0$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

d) $a=-1$, $c=-7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b=-16+8.3^k \Rightarrow b=-8+4.3^k \qquad (2.20.1)$$
$$b^2+14=78-48.3^k \qquad (2.20.2)$$

elde edilir. (2.20.1), (2.20.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8+4.3^k\right)^2+14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 64-64.3^k+16.3^{2k}+14=78-48.3^k$$
$$\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^k=0$$
$$\Rightarrow 3^k\left(3^k-1\right)=0$$

elde edilir. $3^k \neq 0$ olduğundan $3^k=1 \Rightarrow k=0$ bulunur. Fakat $k \neq 0$ dır. Dolayısıyla bu eşitlik sağlanmaz.

Bu 4 durumdan da görüleceği üzere, $\sqrt{\Delta}$ değeri $s>l$ için kök dışına çıkamaz. Dolayısıyla kökler her zaman irrasyonel olacağından n değeri bulunamaz.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k \in \mathbb{Z}^+$ dır.

(2.7) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=3^l\left(l \geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-3^{2l}+8.3^l-11\right)^2+4\left(3^{2l}-6.3^l+9\right)\left(2.3^{l-k}-2\right)}$$
$$=\sqrt{\left(x^2-8x+11\right)^2+8\left(x^2-6x+9\right)\left(x.3^{-k}-1\right)}$$
$$=\sqrt{x^4+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^3+\left(78-48.3^{-k}\right)x^2+\left(-128+72.3^{-k}\right)x+49} \qquad (2.21)$$

elde edilir. Pozitif tamsayı kökler ilgi alanımızda olduğundan,

$$x^4+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^3+\left(78-48.3^{-k}\right)x^2+\left(-128+72.3^{-k}\right)x+49=\left(ax^2+bx+c\right)^2 \qquad (2.22)$$

şeklinde olmalıdır. (2.22) no'lu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$x^4+\left(-16+8.3^{-k}\right)x^3+\left(78-48.3^{-k}\right)x^2+\left(-128+72.3^{-k}\right)x+49=$$
$$a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2$$

eşitliği elde edilir. Polinom eşitliği kullanılarak,

$$a^2=1 \qquad (23.1)$$
$$2ab=-16+8.3^{-k} \qquad (23.2)$$
$$b^2+2ac=78-48.3^{-k} \qquad (23.3)$$
$$2bc=-128+72.3^{-k} \qquad (23.4)$$
$$c^2=49 \qquad (23.5) \qquad (23)$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp 1$ ve $c=\mp 7$ olmak üzere 4 durumun incelenmesi gerekir.

a) $a=1$, $c=7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b=-16+8.3^{-k} \Rightarrow b=-8+4.3^{-k} \qquad (2.24.1)$$
$$b^2+14=78-48.3^{-k} \qquad (2.24.2)$$

elde edilir. (2.24.1), (2.24.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8+4.3^{-k}\right)^2+14=78-48.3^{-k}$$
$$\Rightarrow 64-64.3^{-k}+16.3^{-2k}+14=78-48.3^{-k}$$
$$\Rightarrow 16.3^{-2k}-16.3^{-k}=0$$
$$\Rightarrow 3^{-k}\left(3^{-k}-1\right)=0$$

elde edilir. $3^{-k} \neq 0$ olduğundan $3^{-k} = 1 \Rightarrow k = 0$ bulunur. Fakat $k \in \mathbb{Z}^{+}$ olması gerektiğinden dolayı bu durum olanaksızdır.

b) $a = 1$, $c = -7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = -8 + 4.3^{-k} \qquad (2.25.1)$$

$$b^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} \qquad (2.25.2)$$

elde edilir. (2.25.1), (2.25.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8 + 4.3^{-k}\right)^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 64 - 64.3^{-k} + 16.3^{-2k} - 14 = 78 - 48.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 16.3^{-2k} - 16.3^{-k} - 28 = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m - 7 = 0$$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

c) $a = -1$, $c = 7$

(2.16.2) ve (2.16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$$2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = -8 + 4.3^{-k} \qquad (2.26.1)$$

$$b^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k} \qquad (2.26.2)$$

elde edilir. (2.26.1), (2.26.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-8 + 4.3^{-k}\right)^2 - 14 = 78 - 48.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 64 - 64.3^{-k} + 16.3^{-2k} - 14 = 78 - 48.3^{-k}$$

$\Rightarrow 16.3^{-2k} - 16.3^{-k} - 28 = 0$

$\Rightarrow 4m^2 - 4m - 7 = 0$

elde edilir. Son denklemin kökleri irrasyonel olduğundan 3^k değerleri bu denklem için her zaman irrasyonel elde edilir.

d) $a = -1$, $c = -7$

(16.2) ve (16.3) eşitliklerinde bu değerler yerine yazılırsa;

$2b = -16 + 8.3^{-k} \Rightarrow b = -8 + 4.3^{-k}$ (2.27.1)

$b^2 + 14 = 78 - 48.3^{-k}$ (27.2)

elde edilir. (2.27.1), (2.27.2) de yerine yazılırsa,

$\left(-8 + 4.3^{-k}\right)^2 + 14 = 78 - 48.3^{-k}$

$\Rightarrow 64 - 64.3^{-k} + 16.3^{-2k} + 14 = 78 - 48.3^{-k}$

$\Rightarrow 16.3^{-2k} - 16.3^{-k} = 0$

$\Rightarrow 3^{-k}\left(3^{-k} - 1\right) = 0$

elde edilir. $3^{-k} \neq 0$ olduğundan $3^{-k} = 1 \Rightarrow k = 0$ bulunur. Fakat $k \in \mathbb{Z}^+$ olması gerektiğinden dolayı bu durum olanaksızdır.

Bu 4 durumdan da görüleceği üzere, $\sqrt{\Delta}$ değeri $l > s$ için kök dışına çıkamaz. Dolayısıyla kökler her zaman irrasyonel olacağından n değeri bulunamaz.

2.2.4 $\mathbb{Z}_{3^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t = 5.\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t = 5 \cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 2.4. yardımıyla

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n+\left(3^{l}-3\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(3^{l}-3\right)\cdot 2\cdot n\cdot(n-1)$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için, ağırlığı $t=5.\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(3^{l}-3\right)n+2n+\left(3^{l}-3\right)^{2}\frac{n(n-1)}{2}+\left(3^{l}-3\right)\cdot 2\cdot n\cdot(n-1) \qquad (2.28)$$

biçiminde olur. (28) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(3^{2l}-2\cdot 3^{l}-3\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+4.3^{l}+1\right)n+2 \qquad (2.29)$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(3^{2l}-2\cdot 3^{l}-3\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+4.3^{l}+1\right)n+2=2\cdot 3^{s} \qquad (2.30)$$

$$\left(3^{2l}-2\cdot 3^{l}-3\right)n^{2}+\left(-3^{2l}+4.3^{l}+1\right)n+2-2\cdot 3^{s}=0 \qquad (2.31)$$

(30) no'lu denklemin diskriminantını inceleyelim:

$$\Delta=\left(-3^{2l}+4.3^{l}+1\right)^{2}-4\cdot\left(3^{2l}-2\cdot 3^{l}-3\right)\left(2-2\cdot 3^{s}\right) \quad .$$

Son eşitlik incelendiğinde $l\geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta>0$ olur. Dolayısıyla (31) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.32}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 4.3^l + 1\right)^2 + 4 \cdot \left(3^{2l} - 2 \cdot 3^l - 3\right)\left(2 \cdot 3^s - 2\right)} \tag{2.33}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (31) no'lu kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned} &(1)\ l = s \\ &(2)\ s > l \\ &(3)\ s < l \end{aligned} \tag{2.34}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (33) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 4.3^l + 1\right)^2 + 4 \cdot \left(3^{2l} - 2 \cdot 3^l - 3\right)\left(2 \cdot 3^l - 2\right)} \tag{2.35}$$

olur. (35) no'lu denklemde $x = 3^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^2 + 4.x + 1\right)^2 - 4 \cdot \left(x^2 - 2x - 3\right) \cdot \left(2 - 2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^4 - 10x^2 + 25}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(x^2 - 5\right)^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = \left|x^2 - 5\right| \quad . \tag{2.36}$$

(36) no'lu ifade de $x^2 - 5$ daima pozitif olduğundan,

$$\sqrt{\Delta} = x^2 - 5 \tag{2.37}$$

olarak elde edilir. (2.37) no'lu denklem (2.32) no'lu köklerde sırasıyla yerine yazılırsa,

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2 + 4.x + 1\right) - \left(x^2 - 5\right)}{2 \cdot \left(x^2 - 2.x - 3\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2 - 4.x - 1 - x^2 + 5}{2 \cdot \left(x^2 - 2.x - 3\right)}$$

$$r_1 = -2 \frac{\left(x - 1\right)}{\left(x - 3\right) \cdot \left(x + 1\right)} \tag{2.38}$$

elde edilir. (2.36) no'lu eşitlikte $x = 3^l$ ve $l \geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2 + 4.x + 1\right) + \left(x^2 - 5\right)}{2 \cdot \left(x^2 - 2.x - 3\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2 - 4.x - 1 + x^2 - 5}{2 \cdot \left(x^2 - 2.x - 3\right)}$$

$$r_1 = \frac{2x^2 - 4.x - 6}{2x^2 - 4.x - 6}$$

$$r_1 = 1 \tag{2.39}$$

elde edilir. (32) no'lu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Yani, $n = 1$ dir. Ancak $n = 1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı

$t = 5\cdot(3)^{l-2}$ olamaz ancak $t = 4\cdot(3)^{l-2}$, $t = 3\cdot(3)^{l-2}$ ve $t = 2\cdot(3)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s > l$ olsun. $s > l$ ise $s = l + k$ yazılabilir. Burada, $k \in \mathbb{Z}^{+}$ dır.

(2.35) no'lu ifadede $s = l + k$ ve $x = 3^{l}\ (l \geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-3^{2l} + 4.3^{l} + 1\right)^{2} + 4\cdot\left(3^{2l} - 2\cdot 3^{l} - 3\right)\left(2\cdot 3^{l+k} - 2\right)}$$

Burada $x = 3^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^{2} + 4.x + 1\right)^{2} + 4\cdot\left(x^{2} - 2x - 3\right)\cdot\left(2.x\cdot 3^{k} - 2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^{4} + \left(-8 + 8\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{3} + \left(6 - 16\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{2} + \left(24 - 24\cdot 3^{k}\right)\cdot x + 25} \tag{40}$$

elde edilir. Eğer (31) no'lu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, (40) no'lu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^{4} + \left(-8 + 8\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{3} + \left(6 - 16\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{2} + \left(24 - 24\cdot 3^{k}\right)\cdot x + 25 = \left(ax^{2} + bx + c\right)^{2} \tag{41}$$

şeklinde olmalıdır. (2.41) no'lu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazılıp polinom eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$x^{4} + \left(-8 + 8\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{3} + \left(6 - 16\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{2} + \left(24 - 24\cdot 3^{k}\right)\cdot x + 25 =$$
$$a^{2}x^{4} + 2abx^{3} + \left(b^{2} + 2ac\right)x^{2} + 2bcx + c^{2}$$

ise

$$a^{2} = 1 \qquad (2.42.1)$$

$$2ab = -8 + 8.3^{k} \qquad (2.42.2)$$

$$b^{2} + 2ac = 6 - 16.3^{k} \qquad (2.42.3)$$

$$2bc = 24 - 24.3^{k} \qquad (2.42.4)$$

$c^2 = 25$ (2.42.5) (2.42)

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a = \mp 1$ ve $c = \mp 5$ olmak üzere 2 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a = 1$, $c = -5$ durumu ile $a = -1$, $c = 5$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.
Bu değerler (2.42.2) ve (2.42.3) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$2b = -8 + 8.3^k \Rightarrow b = -4 + 4.3^k$ (2.43.1)

$b^2 - 10 = 6 - 16.3^k$ (2.43.2)

(43.1), (43.2) de yerine yazılırsa,

$\left(-4 + 4.3^k\right)^2 - 10 = 6 - 16.3^k$

$\Rightarrow 16 - 32.3^k + 16.3^{2k} - 10 = 6 - 16.3^k$

$\Rightarrow 16.3^{2k} - 16.3^k = 0$

$\Rightarrow 3^{2k} - 3^k = 0$

$\Rightarrow 3^k = 1$ veya $3^k = 0$ elde edilir. Bu da bize böyle bir $k \in \mathbb{Z}^+$ olamayacağını gösterir.

b.) $a = 1$, $c = 5$ durumu ile $a = -1$, $c = -5$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.
Bu değerler (42.2) ve (42.3) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$2b = -8 + 8.3^k \Rightarrow b = -4 + 4.3^k$ (2.43.1)

$b^2 + 10 = 6 - 16.3^k$ (2.43.2)

elde edilir. (2.43.1), (2.43.2) de yerine yazılırsa,

$\left(-4 + 4.3^k\right)^2 + 10 = 6 - 16.3^k$

$\Rightarrow 16-32.3^{k}+16.3^{2k}+10=6-16.3^{k}$

$\Rightarrow 16.3^{2k}-16.3^{k}+20=0$

$\Rightarrow 8\cdot 3^{2k}-8\cdot 3^{k}+10=0$

elde edilir. Bu denklemde $\Delta<0$ olduğundan, $k\in\mathbb{Z}^{+}$ değeri bulunamaz.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^{+}$ dır.
(35) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=3^{l}\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-3^{2l}+4.3^{l}+1\right)^{2}+4\cdot\left(3^{2l}-2\cdot 3^{l}-3\right)\left(2\cdot 3^{l-k}-2\right)}$$

olur. Burada $x=3^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^{2}+4.x+1\right)^{2}+4\cdot\left(x^{2}-2x-3\right)\cdot\left(2.x\cdot 3^{-k}-2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^{4}+\left(-8+8\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{3}+\left(6-16\cdot 3^{k}\right)\cdot x^{2}+\left(24-24\cdot 3^{-k}\right)\cdot x+25} \qquad (2.40)$$

elde edilir. Eğer (31) no'lu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, (40) no'lu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^{4}+\left(-8+8\cdot 3^{-k}\right)\cdot x^{3}+\left(6-16\cdot 3^{-k}\right)\cdot x^{2}+\left(24-24\cdot 3^{-k}\right)\cdot x+25=\left(ax^{2}+bx+c\right)^{2} \qquad (2.41)$$

şeklinde olmalıdır. (2.41) no'lu eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazılırsa

$$x^{4}+\left(-8+8\cdot 3^{-k}\right)\cdot x^{3}+\left(6-16\cdot 3^{-k}\right)\cdot x^{2}+\left(24-24\cdot 3^{-k}\right)\cdot x+25=$$
$$a^{2}x^{4}+2abx^{3}+\left(b^{2}+2ac\right)x^{2}+2bcx+c^{2}$$

elde edilir. Burada polinom eşitliği kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$a^{2}=1 \qquad (2.42.1)$$

$$2ab=-8+8.3^{-k} \qquad (2.42.2)$$

$$b^2+2ac=6-16.3^{-k} \qquad (2.42.3)$$

$$2bc=24-24.3^{-k} \qquad (2.42.4)$$

$$c^2=25 \qquad (2.42.5) \qquad\qquad (2.42)$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp1$ ve $c=\mp5$ olmak üzere 4 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1$, $c=-5$ durumu ile $a=-1$, $c=5$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.
Bu değerler (2.42.2) ve (2.42.3) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$2b=-8+8.3^{-k} \Rightarrow b=-4+4.3^{-k} \qquad (2.43.1)$$

$$b^2-10=6-16.3^{-k} \qquad (2.43.2)$$

olur. (2.43.1), (2.43.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-4+4.3^{-k}\right)^2-10=6-16.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 16-32.3^{-k}+16.3^{-2k}-10=6-16.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 16.3^{-2k}-16.3^{-k}=0$$

$$\Rightarrow 3^{-2k}-3^{-k}=0$$

$\Rightarrow 3^{-k}=1$ veya $3^{-k}=0$ elde edilir. Bu da bize böyle bir $k\in\mathbb{Z}^+$ olamayacağını gösterir.

b.) $a=1$, $c=5$ durumu ile $a=-1$, $c=-5$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.
Bu değerler (2.42.2) ve (2.42.3) eşitliklerinde yerine yazılırsa

$$2b=-8+8.3^{-k} \Rightarrow b=-4+4.3^{-k} \qquad (2.43.1)$$

$$b^2+10=6-16.3^{-k} \qquad (2.43.2)$$

olur. (2.43.1), (2.43.2) de yerine yazılırsa,

$$\left(-4+4.3^{-k}\right)^2+10=6-16.3^{-k}$$

$$\Rightarrow 16-32.3^{k}+16.3^{2k}+10=6-16.3^{k}$$

$$\Rightarrow 16.3^{-2k}-16.3^{-k}+20=0$$

$$\Rightarrow 8\cdot 3^{-2k}-8\cdot 3^{-k}+10=0$$

olur ki bu denklemde $\Delta<0$ olduğundan, $k\in\mathbb{Z}^{+}$ değeri bulunamaz.

2.2.5 $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde ağırlığı $t=6.\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=6\cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 2.4. yardımıyla

$$1+\left(3^l-3\right)n+2n+\left(3^l-3\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(3^l-3\right)\cdot 2\cdot n\cdot(n-1)+$$
$$2^2\frac{n(n-1)}{2}+\left(3^l-3\right)^3\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6}$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için;

Ağırlığı $t=6.\left(3^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı aşağıdaki gibidir:

$$1+\left(3^l-3\right)n+2n+\left(3^l-3\right)^2\frac{n(n-1)}{2}+\left(3^l-3\right)\cdot 2\cdot n\cdot(n-1)+$$
$$2^2\frac{n(n-1)}{2}+\left(3^l-3\right)^3\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{6} \qquad (2.28)$$

(28) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(3^{3l}-9\cdot 3^{2l}+27\cdot 3^{l}-27\right)n^{3}+\left(-3^{3l}+30\cdot 3^{2l}-87\cdot 3^{l}+84\right)n^{2}+ \\ \left(2\cdot 3^{3l}-21\cdot 3^{2l}+66\cdot 3^{l}-63\right)n+6 \tag{2.29}$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir.

$$\left(3^{3l}-9\cdot 3^{2l}+27\cdot 3^{l}-27\right)n^{3}+\left(-3^{3l}+30\cdot 3^{2l}-87\cdot 3^{l}+84\right)n^{2}+ \\ \left(2\cdot 3^{3l}-21\cdot 3^{2l}+66\cdot 3^{l}-63\right)n+6-3^{s}\cdot 6=0 \tag{2.30}$$

Bu denklem $\mathrm{mod}(9)$ a göre incelenirse;

$$4n^{2}-3n-1\equiv 0 \qquad \mathrm{mod}(9)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemde $n\equiv 1+9k$ ve $n\equiv 2+9k$ denklemleri elde edilir. $n\equiv 2$ değeri (2.30) no'lu denklemde yerine yazıldığında

$$3^{2l}=3^{s}$$

elde edilir. $t=6.\left(3^{l-2}\right)$ ya daha küçük abir ağırlıkta kod varsa, $2l=s$ ve $n=2$ parametrelerini sağlaması gerekir.

BÖLÜM 3. $\mathbb{Z}_{5^l}$ HALKASI ÜZERİNDE HOMOJEN AĞIRLIĞA GÖRE MÜKEMMEL LİNEER KODLARIN VARLIĞIN TESPİTİ

Bu bölümde $\mathbb{Z}_{5^2}$, $\mathbb{Z}_{5^3}$ halkaları üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemleri yapılmış ve bu durumlar $\mathbb{Z}_{5^l}$ halkası üzerine genelleştirilmiştir. Homojen ağırlığı t olan söz sayıları hesaplanmış ve daha sonra hatalı vektör sayılarına göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili incelemeler yapılmıştır.

3.1. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Üzerinde Ağırlıklara Göre Sayma

Bu kısımda $\mathbb{Z}_{5^2}$, $\mathbb{Z}_{5^3}$ halkaları üzerinde homojen ağırlığa göre saymalar ve homojen ağırlığı t olan söz sayıları bulunmuş ve $\mathbb{Z}_{5^l}$ üzerine genelleştirilmiştir.

3.1.1. $\mathbb{Z}_{5^2}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{5^2}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibi

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ 5 & , \quad x=5,10,15,20\\ 4 & , \quad x\in\mathbb{Z}_{25}\text{-}\{0,5,10,15,20\}\end{cases}$$

olur.

Tablo 3.1. $\mathbb{Z}_{5^2}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;

$$t=0 \rightarrow 1\cdot\binom{n}{0}$$

$$t=4 \rightarrow 20\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=5 \rightarrow 4\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=8 \rightarrow 20^2\cdot\binom{n}{2}$$

$$t=9 \rightarrow 4\cdot 20\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t=10 \rightarrow 4^2\cdot\binom{n}{2}$$

$$t=12 \rightarrow 20^3\cdot\binom{n}{3}$$

$$t=13 \rightarrow 20^2\cdot 4\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{1}$$

$$t=14 \rightarrow 20\cdot 4^2\binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{2}$$

$$t=15 \rightarrow 4^3\binom{n}{3}$$

Teorem 3.1.1. t ağırlığı, $t=4x+y$ ve $0\le y<4$, $x\in\mathbb{Z}^+$, $y\in\mathbb{Z}^+$ ve $i\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $i=0$ ’dan $(x-y)-5i\ge 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının toplam sayısı,

$\mathbb{Z}_{5^2}$ de genel ağırlık formülü;

$$t = t \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{(x-y)-5i} \binom{n-((x-y)-5i)}{y+4i} \left(5^2-5\right)^{(x-y)-5i} 4^{y+4i}$$

biçimindedir.

3.1.2. $\mathbb{Z}_{5^3}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{5^3}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibi

$$w_{\text{hom}}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ 25 & , \quad x = 25, 50, 75, 100 \\ 20 & , \quad x \in \mathbb{Z}_{125} \text{-} \{0, 25, 50, 75, 100\} \end{cases}$$

olur.

Tablo 3.2. $\mathbb{Z}_{5^3}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;
$t = 0 \rightarrow 1 \cdot \binom{n}{0}$
$t = 20 \rightarrow 120 \cdot \binom{n}{1}$
$t = 25 \rightarrow 4 \cdot \binom{n}{1}$
$t = 40 \rightarrow 120^2 \cdot \binom{n}{2}$
$t = 45 \rightarrow 4 \cdot 120 \binom{n}{1} \binom{n-1}{1}$
$t = 50 \rightarrow 4^2 \cdot \binom{n}{2}$
$t = 60 \rightarrow 120^3 \cdot \binom{n}{3}$

Tablo 3.2. $\mathbb{Z}_{5^3}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı “Devam”

$t=65 \rightarrow 120^2 \cdot 4 \cdot \binom{n}{2} \cdot \binom{n-2}{1}$
$t=70 \rightarrow 120 \cdot 4^2 \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{2}$
$t=75 \rightarrow 4^3 \binom{n}{3}$

Teorem 3.1.2. t ağırlığı, $t=4x+y$ ve $0 \le y < 4$, $x \in \mathbb{Z}^+$, $y \in \mathbb{Z}^+$ ve $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $i=0$’dan $(x-y)-5i \ge 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının toplam sayısı, $\mathbb{Z}_{5^3}$ de genel ağırlık formülü;

$$t=5t \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{(x-y)-5i} \binom{n-((x-y)-5i)}{y+4i} \left(5^3-5\right)^{(x-y)-5i} 4^{y+4i}$$

biçimindedir.

3.1.3. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemi

$\mathbb{Z}_{5^l}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibi

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ 5^{l-1} & , \quad x \in 5^{l-1}\mathbb{Z}_{5^l}-\{0\} \\ 4 \cdot 5^{l-2} & , \quad x \notin 5^{l-1}\mathbb{Z}_{5^l} \end{cases}$$

olur.

Tablo 3.3. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;

$$t=0\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)^0\cdot\binom{n}{0}$$

$$t=4\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)^1\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=5\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow 4\cdot\binom{n}{1}$$

$$t=8\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)^2\cdot\binom{n}{2}$$

$$t=9\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow 4\cdot\left(5^l-5\right)^1\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$$

$$t=10\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow 4^2\cdot\binom{n}{2}$$

$$t=12\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)^3\cdot\binom{n}{3}$$

$$t=13\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)^2\cdot 4\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{1}$$

$$t=14\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow\left(5^l-5\right)\cdot 4^2\binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{2}$$

$$t=15\cdot\left(5^{l-2}\right)\rightarrow 4^3\binom{n}{3}$$

Teorem 3.1.3. t ağırlığı, $t=4x+y$ ve $0\leq y<4$, $x\in\mathbb{Z}^+$, $y\in\mathbb{Z}^+$ ve $i\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $i=0$'dan $\left(x-y\right)-5i\geq 0$ üst sınırına kadar t ağırlıklarının toplam sayısı, $\mathbb{Z}_{5^l}$ de genel ağırlık formülü;

$$t = t\left(5^{l-2}\right) \rightarrow \sum_{i=0} \binom{n}{(x-y)-5i} \binom{n-((x-y)-5i)}{y+4i} \left(5^{l}-5\right)^{(x-y)-5i} 4^{y+4i}$$

biçimindedir.

3.2. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Üzerinde Hatalı Vektör Sayılarına Göre Mükemmel Kod İncelemesi

3.2.1. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t = 4 \cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t = 4 \cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 3.3. yardımıyla

$$1+\left(5^{l}-5\right)n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t = 4 \cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(5^{l}-5\right)n = 5^{s}$$

olur. Burada $|V| = 5^{kn}$ olduğundan ve $|C| = a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|} = 5^{kn-a}$$

elde edilir. $kn-a=s$ alınmaktadır.

$1+\left(5^{l}-5\right)n = 5^{s}$ denklemini $\left(\bmod 5\right)$ de incelediğimizde

$1 \equiv 0 \pmod 5$

elde edilir ki bu da bize $t = 4 \cdot \left(5^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayıları için mükemmel kod olamayacağını gösterir.

3.2.2. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t = 5 \cdot 3^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t = 5 \cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 3.3. yardımıyla

$$1 + \left(5^l - 5\right)n + 4n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için, ağırlığı $t = 5 \cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1 + \left(5^l - 5\right)n + 4n = 5^s$$

biçimindedir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$1 + \left(5^l - 1\right) \cdot n = 5^s$$

$$\left(5^l - 1\right) \cdot n = 5^s - 1$$

$$n = \frac{5^s - 1}{5^l - 1}$$

Bu eşitlikte $l | s$ parametreleri için sonsuz çözüm vardır. Bazı (l, s, n) parametreleri aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 3.4.Bazı (l,s,n) parametrelerinin tablosu

l	s	n
2	4	26
2	6	651
2	8	16276
3	6	126
3	9	15751
3	12	1968876
4	8	626
4	12	391251
5	10	3126
5	15	9768751

Eğer mükemmel kod varsa bu parametreleri sağlamak durumundadır.

3.2.3. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t = 8\cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t = 8\cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 3.3. yardımıyla

$$1+\left(5^l-5\right)n+2n+\left(5^l-5\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t = 8\cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(3^l-3\right)n+4n+\left(3^l-3\right)^2\frac{n(n-1)}{2} \qquad (3.1)$$

biçimindedir. (1) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{5^{2l}}{2}-5^{l+1}+\frac{25}{2}\right)n^2+\left(-\frac{5^{2l}}{2}+6.5^l-\frac{27}{2}\right)n+1 \qquad (3.2)$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(5^{2l}-10.5^l+25\right)n^2+\left(-5^{2l}+12.5^l-27\right)n+2=2.5^s \qquad (3.3)$$

$$\left(\underbrace{5^{2l}-10.5^l+25}_{a}\right)n^2+\left(\underbrace{-5^{2l}+12.5^l-27}_{b}\right)n+\underbrace{2-2.5^s}_{c}=0 \qquad (3.4)$$

elde edilir. (4) no'lu denklemin diskriminantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\left(-5^{2l}+12.5^l-27\right)^2-4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2-2.5^s\right) \qquad (3.5)$$

$$\left(-5^{2l}+12.5^l-27\right)^2+4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2.5^s-2\right)$$

Son eşitlik incelendiğinde $l\geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta>0$ olur. Dolayısıyla (3.4) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (3.6)$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+12.5^{l}-27\right)^{2}+4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2.5^{s}-2\right)} \qquad (3.7)$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (3.6) no'lu kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

(1) $l=s$

(2) $s>l$ (3.8)

(3) $s<l$

(1) $l=s$ olsun. Bu taktirde, (3.7) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+12.5^{l}-27\right)^{2}+4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2.5^{l}-2\right)} \qquad (3.9)$$

olur. (3.9) no'lu denklemde $x=5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^{2}+12.x-27\right)^{2}+4\cdot\left(x^{2}-10.x+25\right)\cdot\left(2-2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^{4}-16x^{3}+110x^{2}-368x+529} \qquad (3.10)$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(x^{2}-8x+23\right)^{2}}$$

$$\sqrt{\Delta}=\left|x^{2}-8x+23\right|$$

elde edilir. (10) no'lu ifade de $x^{2}-8x+23$ daima pozitif olduğundan,

$$\sqrt{\Delta}=x^{2}-8x+23 \qquad (3.11)$$

olarak elde edilir. (3.11) no'lu denklem (3.6) no'lu köklerde sırasıyla yerine yazılırsa,

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2+12.x-27\right)-\left(x^2-8.x+23\right)}{2\cdot\left(x^2-10.x+25\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2-12.x+27-x^2+8.x-23}{2\cdot\left(x^2-10.x+25\right)}$$

$$r_1 = -2\frac{\left(x-1\right)}{\left(x-5\right)^2} \tag{3.12}$$

elde edilir. (12) no'lu eşitlikte $x=5^l$ ve $l\geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-\left(-x^2+12.x-27\right)+\left(x^2-8.x+23\right)}{2\cdot\left(x^2-10.x+25\right)}$$

$$r_2 = \frac{x^2-12.x+27+x^2-8.x+23}{2\cdot\left(x^2-10.x+25\right)}$$

$$r_2 = \frac{2x^2-20.x+50}{2x^2-20.x+50}$$

$$r_2 = 1 \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) no'lu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Ancak $n=1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı $t=4\cdot\left(3\right)^{l-2}$ olamaz ancak $t=3\cdot\left(3\right)^{l-2}$ ve $t=2\cdot\left(3\right)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s>l$ olsun. $s>l$ ise $s=l+k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.

(7) no'lu ifadede $s=l+k$ ve $x=5^l\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+12.5^{l}-27\right)^{2}+4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2.5^{l+k}-2\right)}$$

Burada $x=5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^{2}+12.x-27\right)^{2}+4\cdot\left(x^{2}-10.x+25\right)\cdot\left(2.x\cdot 5^{k}-2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^{4}+\left(-24+8\cdot 5^{k}\right)\cdot x^{3}+\left(190-80\cdot 5^{k}\right)\cdot x^{2}+\left(-368+200\cdot 5^{k}\right)\cdot x+529} \qquad (3.12)$$

elde edilir. Eğer (3.4) no'lu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, (3.12) no'lu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{aligned}&x^{4}+\left(-24+8\cdot 5^{k}\right)\cdot x^{3}+\left(190-80\cdot 5^{k}\right)\cdot x^{2}+\left(-368+200\cdot 5^{k}\right)\cdot x+529\\&=\left(ax^{2}+bx+c\right)^{2}\end{aligned} \qquad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
&a^{2}=1 && (3.14.1)\\
&2ab=-24+8.5^{k} && (3.14.2)\\
&b^{2}+2ac=190-80.5^{k} && (3.14.3)\\
&2bc=-568+200.5^{k} && (3.14.4)\\
&c^{2}=529 && (3.14.5)
\end{aligned} \qquad (3.14)$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp 1$ ve $c=\mp 23$ olmak üzere, simetriklikten dolayı 2 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1$, $c=-23$ durumu ile $a=-1$, $c=23$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

Bu değerler (3.14) no'lu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$2\cdot 1\cdot b=-24+8\cdot 5^{k} \Rightarrow b=-12+4\cdot 5^{k}$$

$$2\cdot\left(-12+4\cdot 5^{k}\right)\cdot\left(-23\right)=-568+200\cdot 5^{k}$$

bu eşitlik düzenlenirse

$$-276+92\cdot 5^{k}=284-100\cdot 5^{k}\;\Rightarrow\; 5^{k}=\frac{560}{192}$$

olur ki bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^{+}$ yoktur.

b.) $a=1$, $c=23$ durumu ile $a=-1$, $c=-23$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

Bu değerler (3.14) no'lu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$2\cdot 1\cdot b=-24+8\cdot 5^{k}\;\Rightarrow\; b=-12+4\cdot 5^{k}$$
$$2\cdot\left(-12+4\cdot 5^{k}\right)\cdot\left(23\right)=-568+200\cdot 5^{k}$$

bu eşitlik düzenlenirse

$$-276+92\cdot 5^{k}=-284+100\cdot 5^{k}\;\Rightarrow\; 5^{k}=\frac{8}{8}=1\;\Rightarrow\; k=0$$

olur ki bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^{+}$ yoktur.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^{+}$ dır.

(7) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=5^{l}\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+12.5^{l}-27\right)^{2}+4\cdot\left(5^{2l}-2.5^{l+1}+25\right)\cdot\left(2.5^{l-k}-2\right)}$$

Burada $x=5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+12.x-27\right)^2+4\cdot\left(x^2-10.x+25\right)\cdot\left(2.x\cdot5^{-k}-2\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^4+\left(-24+8\cdot5^{-k}\right)\cdot x^3+\left(190-80\cdot5^{k}\right)\cdot x^2+\left(-368+200\cdot5^{-k}\right)\cdot x+529} \quad (3.15)$$

elde edilir. Eğer (4) no'lu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, (3.15) no'lu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{aligned}&x^4+\left(-24+8\cdot5^{-k}\right)\cdot x^3+\left(190-80\cdot5^{k}\right)\cdot x^2+\left(-368+200\cdot5^{-k}\right)\cdot x+529\\&=\left(ax^2+bx+c\right)^2\end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{array}{lll}a^2=1 & (3.16.1) & \\ 2ab=-24+8.5^{-k} & (3.16.2) & \\ b^2+2ac=190-80.5^{-k} & (3.16.3) & \\ 2bc=-568+200.5^{-k} & (16.4) & \\ c^2=529 & (16.5) & (3.16)\end{array}$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp1$ ve $c=\mp23$ olmak üzere, simetriklikten dolayı 2 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1$, $c=-23$ durumu ile $a=-1$, $c=23$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

Bu değerler (3.16) no'lu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$2\cdot1\cdot b=-24+8\cdot5^{-k}\Rightarrow b=-12+4\cdot5^{-k}$$

$$2\cdot\left(-12+4\cdot5^{-k}\right)\cdot(-23)=-568+200\cdot5^{-k}$$

bu eşitlik düzenlenirse

$$-276+92\cdot5^{-k}=284-100\cdot5^{-k}\Rightarrow 5^{-k}=\frac{560}{192}$$

olur ki bu eşitliği sağlayan $k \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

b.) $a=1$, $c=23$ durumu ile $a=-1$, $c=-23$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

Bu değerler (3.16) no'lu denklemlerde yerlerine yazılırsa;

$$2\cdot 1\cdot b=-24+8\cdot 5^{-k} \Rightarrow b=-12+4\cdot 5^{-k}$$
$$2\cdot\left(-12+4\cdot 5^{-k}\right)\cdot(23)=-568+200\cdot 5^{-k}$$

bu eşitlik düzenlenirse

$$-276+92\cdot 5^{-k}=-284+100\cdot 5^{-k} \Rightarrow 5^{-k}=\frac{8}{8}=1 \Rightarrow k=0$$

olur ki bu eşitliği sağlayan $k \in \mathbb{Z}^+$ yoktur.

3.2.4. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=9.\left(5^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=9\cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 3.3. yardımıyla

$$1+\left(5^l-5\right)n+4n+\left(5^l-5\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(5^l-5\right)\cdot 4\cdot n\cdot(n-1)$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t=9.\left(5^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(5^{l}-5\right)n+4n+\left(5^{l}-5\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(5^{l}-5\right)\cdot 4\cdot n\cdot(n-1)$$

biçimindedir. Bu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15}{2}\right)n^{2}+\left(\frac{-5^{2l}+4.5^{l}+13}{2}\right)n+1 \qquad (3.17)$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15\right)n^{2}+\left(-5^{2l}+4.5^{l}+13\right)n+2=2\cdot 5^{s}$$

$$\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15\right)n^{2}+\left(-5^{2l}+4.5^{l}+13\right)n+2-2\cdot 5^{s}=0$$

denklemin diskriminantını inceleyelim.

$$\Delta=\left(-5^{2l}+4.5^{l}+13\right)^{2}-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15\right)\left(2-2\cdot 5^{s}\right) \qquad (3.18)$$

Son eşitlik incelendiğinde $l \geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta > 0$ dır. Dolayısıyla (18) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+4.5^{l}+13\right)^{2}-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15\right)\left(2-2\cdot 5^{s}\right)} \qquad (3.19)$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned}&(1)\ l = s\\&(2)\ s > l\\&(3)\ s < l\end{aligned} \tag{3.20}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (3.19) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-5^{2l} + 4.5^{l} + 13\right)^{2} - 4\cdot\left(5^{2l} - 2\cdot 5^{l} - 15\right)\left(2 - 2\cdot 5^{l}\right)} \tag{3.21}$$

olur. (3.21) no'lu denklemde $x = 5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^{2} + 4.x + 13\right)^{2} - 4\cdot\left(x^{2} - 2x - 15\right)\cdot\left(2 - 2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^{4} - 34x^{2} + 289}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(x^{2} - 17\right)^{2}}$$

$$\Delta = \left|x^{2} - 17\right| \tag{3.22}$$

ifadesi daima pozitif olur. Dolayısıyla

$$\Delta = x^{2} - 17$$

olur.

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2+4.x+13\right)-\left(x^2-17\right)}{2\cdot\left(x^2-2.x-15\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2-4.x-13-x^2+17}{2\cdot\left(x^2-2.x-15\right)} = \frac{-4x+4}{2x^2-4.x-30} \tag{3.23}$$

elde edilir. (23) no'lu eşitlikte $x=5^l$ ve $l\geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-\left(-x^2+4.x+13\right)+\left(x^2-17\right)}{2\cdot\left(x^2-2.x-15\right)}$$

$$r_2 = \frac{x^2-4.x-13+x^2-17}{2x^2-4.x-30}$$

$$r_2 = \frac{2x^2-4.x-30}{2x^2-4.x-30}$$

$$r_2 = 1 \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) no'lu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Ancak $n=1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı $t=4\cdot\left(3\right)^{l-2}$ olamaz ancak $t=3\cdot\left(3\right)^{l-2}$ ve $t=2\cdot\left(3\right)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s>l$ olsun. $s>l$ ise $s=l+k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.
$s=l+k$ ve $x=5^l$, $\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-5^{2l}+4.5^l+13\right)^2-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^l-15\right)\left(2-2\cdot 5^{l+k}\right)}$$

Burada $x=5^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+4\cdot x+13\right)^2-4\cdot\left(x^2-2\cdot x+5\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot 5^k\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^4+\left(-8+8\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot 5^k\right)\cdot x+289}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^4+\left(-8+8\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot 5^k\right)\cdot x+289=\left(ax^2+bx+c\right)^2$$

şeklinde olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$\begin{aligned}&x^4+\left(-8+8\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot 5^k\right)\cdot x+289\\&=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte polinom eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&a^2=1\\&2ab=-8+8.5^k\\&b^2+2ac=-18-16.5^k\\&2bc=120-120.5^k\\&c^2=289\end{aligned}$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp 1$ ve $c=\mp 17$ olmak üzere simetriklikten dolayı 2 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1,\ c=-17$ durumu ile $a=-1,\ c=17$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$-2b=-8+8.5^k \Rightarrow b=4-4.5^k$$
$$2\cdot\left(4-4.5^k\right)\cdot 17=120-120\cdot 5^k$$
$$\left(1-5^k\right)\cdot 17=15-15\cdot 5^k$$

eşitlik düzenlenirse

$5^k=1 \;\Rightarrow\; k=0$ olur. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ olmadığından buradan çözüm gelmez.

b.) $a=1,\ c=17$ durumu ile $a=-1,\ c=-17$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2b=-8+8.5^k \Rightarrow b=-4+4.5^k$$
$$2\cdot\left(-4+4.5^k\right)\cdot 17=120-120\cdot 5^k$$
$$\left(-1+5^k\right)\cdot 17=15-15\cdot 5^k$$

eşitlik düzenlenirse

$5^k=1 \;\Rightarrow\; k=0$ olur. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ olmadığından buradan çözüm gelmez.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.

(3.7) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=5^l\ (l\geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+4.5^l+13\right)^2-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^l-15\right)\left(2-2\cdot 5^{l-k}\right)}$$

Burada $x=5^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+4\cdot x+13\right)^2-4\cdot\left(x^2-2\cdot x+5\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot 5^{l-k}\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^4+\left(-8+8\cdot5^{-k}\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot5^{-k}\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot5^{-k}\right)\cdot x+289}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^4+\left(-8+8\cdot5^{-k}\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot5^{-k}\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot5^{-k}\right)\cdot x+289=\left(ax^2+bx+c\right)^2$$

şeklinde olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$\begin{aligned}&x^4+\left(-8+8\cdot5^{-k}\right)\cdot x^3+\left(-18-16\cdot5^{-k}\right)\cdot x^2+\left(120-120\cdot5^{-k}\right)\cdot x+289\\&=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Polinom eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}&a^2=1\\&2ab=-8+8.5^{-k}\\&b^2+2ac=-18-16.5^{-k}\\&2bc=120-120.5^{-k}\\&c^2=289\end{aligned}$$

biçiminde eşitlikler elde edilir. Buradan $a=\mp1$ ve $c=\mp17$ olmak üzere simetriklikten dolayı 2 durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1,\ c=-17$ durumu ile $a=-1,\ c=17$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$\begin{aligned}&-2b=-8+8.5^{-k}\Rightarrow b=4-4.5^{-k}\\&2\cdot\left(4-4.5^{-k}\right)\cdot17=120-120\cdot5^{-k}\\&\left(1-5^{-k}\right)\cdot17=15-15\cdot5^{-k}\end{aligned}$$

eşitlik düzenlenirse

$5^{-k}=1 \;\Rightarrow\; k=0$ olur. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^{+}$ olmadığından buradan çözüm gelmez.

b.) $a=1$, $c=17$ durumu ile $a=-1$, $c=-17$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2b=-8+8.5^{-k} \Rightarrow b=-4+4.5^{-k}$$
$$2\cdot\left(-4+4.5^{-k}\right)\cdot 17=120-120\cdot 5^{-k}$$
$$\left(-1+5^{-k}\right)\cdot 17=15-15\cdot 5^{-k}$$

eşitlik düzenlenirse

$5^{-k}=1 \;\Rightarrow\; k=0$ olur. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^{+}$ olmadığından buradan çözüm gelmez.

3.2.5. $\mathbb{Z}_{5^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=10.\left(5^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=10\cdot 5^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 3.3. yardımıyla

$$1+\left(5^{l}-5\right)n+4n+\left(5^{l}-5\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(5^{l}-5\right)\cdot 4\cdot n\cdot(n-1)+4^{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t=10.\left(5^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(5^{l}-5\right)n+4n+\left(5^{l}-5\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot\left(n-1\right)}{2}+\left(5^{l}-5\right)\cdot 4\cdot n\cdot\left(n-1\right)+4^{2}\cdot\frac{n\cdot\left(n-1\right)}{2}$$

biçiminde elde edilir. Bu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{5^{2l}-2\cdot 5^{l}+1}{2}\right)n^{2}+\left(\frac{-5^{2l}+4.5^{l}-3}{2}\right)n+1$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}+1\right)n^{2}+\left(-5^{2l}+4.5^{l}-3\right)n+2=2\cdot 5^{s}$$

$$\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}-15\right)n^{2}+\left(-5^{2l}+4.5^{l}+13\right)n+2-2\cdot 5^{s}=0 \qquad (3.25)$$

denkleminin diskriminantını inceleyelim.

$$\Delta=\left(-5^{2l}+4.5^{l}-3\right)^{2}-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}+1\right)\left(2-2\cdot 5^{s}\right)$$

Son eşitlik incelendiğinde $l \geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta > 0$ olur. Dolayısıyla (31) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\Delta=\left(-5^{2l}+4.5^{l}-3\right)^{2}-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^{l}+1\right)\left(2-2\cdot 5^{s}\right)}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned} &(1)\ l = s \\ &(2)\ s > l \\ &(3)\ s < l \end{aligned} \tag{3.26}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (3.25) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-5^{2l} + 4.5^{l} + 13\right)^2 - 4\cdot\left(5^{2l} - 2\cdot 5^{l} - 15\right)\left(2 - 2\cdot 5^{l}\right)} \tag{3.27}$$

olur. (3.27) no'lu denklemde $x = 5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^2 + 4.x - 1\right)^2 - 4\cdot\left(x^2 - 2x + 1\right)\cdot\left(2 - 2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 16x - 7}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^4 - 6x^2 + 16x - 7 = \left(ax^2 + bx + c\right)^2$$

$$x^4 - 6x^2 + 16x - 7 = a^2x^4 + 2abx^3 + \left(b^2 + 2ac\right)x^2 + 2bcx + c^2$$

olur. Buradan

$$a^2 = 1$$

$$2ab = 0$$

$$b^2 + 2ac = -6$$

$$2bc = 16$$

$$c^2 = -7$$

elde edilir. Bu eşitliklerde $c^2=-7$ olamayacağından $l=s$ durumundan çözüm gelmez.

(2) $s>l$ olsun. $s>l$ ise $s=l+k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.
$s=l+k$ ve $x=5^l$, $(l\geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-5^{2l}+4.5^l+13\right)^2-4\cdot\left(5^{2l}-2\cdot 5^l-15\right)\left(2-2\cdot 5^{l+k}\right)}$$

Burada $x=5^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+4.x-1\right)^2-4\cdot\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot 5^k\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{x^4+\left(8-8\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(10-16\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(8+8\cdot 5^k\right)\cdot x-7}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^4+\left(10-16\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(8-8\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(8+8\cdot 5^k\right)\cdot x-7=\left(ax^2+bx+c\right)^2$$

şeklinde olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$x^4+\left(8-8\cdot 5^k\right)\cdot x^3+\left(10-16\cdot 5^k\right)\cdot x^2+\left(8+8\cdot 5^k\right)\cdot x-7$$
$$=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2$$

olur. Burada polinom eşitliği kullanılarak

$$a^2=1$$
$$2ab=8-8.5^k$$
$$b^2+2ac=10-16.5^k$$

$$2bc = 8 + 8 \cdot 5^{k}$$
$$c^{2} = -7$$

elde edilir. Bu eşitliklerde $c^{2} = -7$ olamayacağından $s > l$ durumundan çözüm gelmez.

(3) $s < l$ olsun. $s < l$ ise $l = s + k$ yani $s = l - k$ yazılabilir. Burada, $k \in \mathbb{Z}^{+}$ dır.
(7) no'lu ifadede $s = l - k$ ve $x = 5^{l}\left(l \geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-5^{2l} + 4.5^{l} + 13\right)^{2} - 4 \cdot \left(5^{2l} - 2 \cdot 5^{l} - 15\right)\left(2 - 2 \cdot 5^{l-k}\right)}$$

Burada $x = 5^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^{2} + 4.x - 1\right)^{2} - 4 \cdot \left(x^{2} - 2x + 1\right) \cdot \left(2 - 2 \cdot x \cdot 5^{-k}\right)}$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^{4} + \left(8 - 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{3} + \left(10 - 16 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{2} + \left(8 + 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x - 7}$$

elde edilir. Eğer denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$x^{4} + \left(10 - 16 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{3} + \left(8 - 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{2} + \left(8 + 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x - 7 = \left(ax^{2} + bx + c\right)^{2}$$

şeklinde olmalıdır. Eşitliğin sağ tarafı açık bir şekilde yazıldığında

$$x^{4} + \left(8 - 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{3} + \left(10 - 16 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x^{2} + \left(8 + 8 \cdot 5^{-k}\right) \cdot x - 7$$
$$= a^{2}x^{4} + 2abx^{3} + \left(b^{2} + 2ac\right)x^{2} + 2bcx + c^{2}$$

olur. Burada polinom eşitliği kullanılarak

$$a^{2} = 1$$
$$2ab = 8 - 8.5^{-k}$$

$$b^2 + 2ac = 10 - 16.5^{-k}$$

$$2bc = 8 + 8 \cdot 5^{-k}$$

$$c^2 = -7$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerde $c^2 = -7$ olamayacağından $l > s$ durumundan çözüm gelmez.

BÖLÜM 4. $\mathbb{Z}_{p^l}$ HALKASI ÜZERİNDE HOMOJEN AĞIRLIĞA GÖRE MÜKEMMEL LİNEER KODLARIN VARLIĞIN TESPİTİ

Bu bölümde $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlığa göre sayma işlemleri $t=(2p-1)(p^{l-2})$ ağırlığına kadar yapılmıştır. Homojen ağırlığı t olan söz sayıları hesaplanmış ve daha sonra hatalılı vektör sayılarına göre mükemmel kodun varlığıyla ilgili incelemeler yapılmıştır.

4.1. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası Üzerinde Ağırlıklara Göre Sayma İşlemi

$\mathbb{Z}_{p^l}$ halkasında her bir elemana karşılık gelen homojen ağırlıklar aşağıdaki gibidir.

$$w_{\text{hom}}(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=0 \\ p^{l-1} & , \quad x\in p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l}-\{0\} \\ (p-1)\cdot p^{l-2} & , \quad x\notin p^{l-1}\mathbb{Z}_{p^l} \end{cases}$$

olur.

Tablo 4.1. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı

n uzunluk parametresi olmak üzere;
$t=0(p^{l-2})\rightarrow(p^l-p)^0\binom{n}{0}$
$t=(p-1)(p^{l-2})\rightarrow(p^l-p)^1\binom{n}{1}$

Tablo 4.1. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası Üzerinde Homojen Ağırlığı t Olan Söz Sayısı “(Devam)”

$t=p\left(p^{l-2}\right)\rightarrow(p-1)\left(3^l-3\right)^0\binom{n}{1}$
$t=(2p-2)\left(p^{l-2}\right)\rightarrow\left(p^l-p\right)^2\binom{n}{2}$
$t=(2p-1)\left(p^{l-2}\right)\rightarrow(p-1).\left(p^l-p\right)^1\binom{n}{1}\binom{n-1}{1}$

$t=2p\cdot\left(p^{l-2}\right)$ ağırlık için genel bir ifade elde edilemedi çünkü, örneğin $p=3$ için $t=6\cdot\left(3^{l-2}\right)$ ağırlığında $\left(3^l-3\right)^3\binom{n}{3}+2^2\binom{n}{2}$ tane hatalı vektörü varken, $p=5$ için $t=10\cdot\left(5^{l-2}\right)$ ağırlığında $4^2\binom{n}{2}$ tane hatalı vektörü vardır. Dolayısıyla bu ve bundan sonraki ağırlıklarda genel bir p incelemesi yapılamamaktır.

4.2. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Üzerinde Hatalı Vektör Sayılarına Göre Mükemmel Kod İncelemesi

4.2.1. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=(p-1)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=(p-1)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 4.1. yardımıyla

$$1+\left(p^l-p\right)n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t=(p-1)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(p^{l}-p\right)n=p^{s}$$

olur. Burada $|V|=p^{kn}$ olduğundan ve $|C|=a$ alınırsa,

$$\frac{|V|}{|C|}=p^{kn-a}$$

elde edilir. $kn-a=s$ alınmaktadır.

$1+\left(p^{l}-p\right)n=p^{s}$ denklemini $\left(\bmod p\right)$ de incelediğimizde

$$1\equiv 0 \pmod p$$

elde edilir ki bu da bize $t=\left(p-1\right)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayıları için mükemmel kod olamayacağını gösterir.

4.2.2. $\mathbb{Z}_{p^{l}}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=p\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=p\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 4.1. yardımıyla

$$1+\left(p^{l}-p\right)n+\left(p-1\right)n$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olmayacağını incelemek için, ağırlığı $t=p\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(p^{l}-p\right)n+\left(p-1\right)n=p^{s}$$

olur.Bu eşitlik düzenlenirse,

$$1+\left(p^{l}-1\right)\cdot n=p^{s}$$

$$\left(p^{l}-1\right)\cdot n=p^{s}-1$$

$$n=\frac{p^{s}-1}{p^{l}-1}$$

Bu eşitlikte $l|s$ parametreleri için sonsuz çözüm vardır. Eğer mükemmel kod varsa bu parametreleri sağlamak zorundadır.

4.2.3. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=\left(2p-2\right)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=\left(2p-2\right)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 4.1. yardımıyla

$$1+\left(p^{l}-p\right)n+\left(p-1\right)\cdot n+\left(p^{l}-p\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot\left(n-1\right)}{2}$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t=\left(2p-2\right)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(p^{l}-p\right)n+\left(p-1\right)\cdot n+\left(p^{l}-p\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot\left(n-1\right)}{2} \tag{4.1}$$

olur. (1) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{p^{2l}}{2}-p^{l+1}+\frac{p^{2}}{2}\right)n^{2}+\left(\frac{-p^{2l}+p^{l}\cdot\left(2+2p\right)-2-p^{2}}{2}\right)n+1 \tag{4.2}$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^{2}\right)n^{2}+\left(-p^{2l}+p^{l}\cdot(2+2p)-2-p^{2}\right)n+2=2.p^{s} \tag{4.3}$$

$$\left(\underbrace{p^{2l}-2p^{l+1}+p^{2}}_{a}\right)n^{2}+\left(\underbrace{-p^{2l}+p^{l}\cdot(2+2p)-2-p^{2}}_{b}\right)n+\underbrace{2-2.p^{s}}_{c}=0 \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) no'lu denklemin diskriminantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta=\sqrt{b^{2}-4ac}$$

$$\left(-p^{2l}+p^{l}\cdot(2+2p)-2-p^{2}\right)^{2}-4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^{2}\right)\cdot\left(2-2.p^{s}\right) \tag{4.5}$$

Son eşitlik incelendiğinde $l\geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta>0$ olur. Dolayısıyla (4.4) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.
Bu kökler;

$$r_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a} \tag{4.6}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-p^{2l}+p^{l}\cdot(2+2p)-2-p^{2}\right)^{2}-4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^{2}\right)\cdot\left(2-2.p^{s}\right)} \tag{4.7}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (4.6) no'lu kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned}&(1)\ l=s\\&(2)\ s>l\\&(3)\ s<l\end{aligned} \tag{4.8}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (4.7) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-p^{2l} + p^{l}\cdot(2+2p) - 2 - p^{2}\right)^{2} - 4\cdot\left(p^{2l} - 2p^{l+1} + p^{2}\right)\cdot\left(2 - 2.p^{s}\right)} \quad (4.9)$$

olur. Denklemde $x = p^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^{2} + x\cdot(2+2p) - 2 - p^{2}\right)^{2} - 4\cdot\left(x^{2} - 2px + p^{2}\right)\cdot\left(2 - 2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^{4} + x^{3}(-4p+4) + x^{2}\left(6p^{2} - 8p\right) + x\left(-4p^{3} + 4p^{2} + 8p - 8\right) + p^{4} - 4p^{2} + 4}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(x^{2} + x(2-2p) + p^{2} - 2\right)^{2}}$$

$$\sqrt{\Delta} = \left|x^{2} + x(2-2p) + p^{2} - 2\right|$$

olur. Bu ifade daima pozitif olduğundan

$$\sqrt{\Delta} = x^{2} + x(2-2p) + p^{2} - 2$$

olarak elde edilir. Öncelikle

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ifadesinde yerine koyalım.

$$r_1 = \frac{-\left(-x^{2} + x\cdot(2+2p) - 2 - p^{2}\right) - \left(x^{2} + x(2-2p) + p^{2} - 2\right)}{2\cdot(x-p)^{2}}$$

$$r_1 = \frac{x^{2} - x\cdot(2+2p) + 2 + p^{2} - x^{2} - x(2-2p) - p^{2} + 2}{2\cdot(x-p)^{2}}$$

$$r_1 = -2\frac{(x-1)}{(x-p)^{2}}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = p^l$ ve $l \geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-\left(-x^2 + x\cdot(2+2p)-2-p^2\right)+\left(x^2+x(2-2p)+p^2-2\right)}{2\cdot(x-p)^2}$$

$$r_2 = \frac{x^2 - x\cdot(2+2p)+2+p^2+x^2+x(2-2p)+p^2-2}{2\cdot(x-p)^2}$$

$$r_2 = \frac{2x^2-4px+2p^2}{2x^2-4px+2p^2}$$

$$r_2 = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Ancak $n=1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı $t=(2p-2)\cdot(p)^{l-2}$ olamaz ancak $t = p\cdot(p)^{l-2}$ ve $t=(p-1)\cdot(p)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s > l$ olsun. $s > l$ ise $s = l+k$ yazılabilir. Burada, $k \in \mathbb{Z}^+$ dır.

(4.7) no'lu ifadede $s = l+k$ ve $x = p^l\,(l \geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-p^{2l}+p^l\cdot(2+2p)-2-p^2\right)^2 - 4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^2\right)\cdot\left(2-2.p^{l+k}\right)}$$

Burada $x = p^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-x^2+x\cdot(2+2p)-2-p^2\right)^2 - 4\cdot\left(x^2-2px+p^2\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot p^k\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^k\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^k\right)+\\x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^k+8p-8\right)+p^4-4p^2+4\end{array}}$$

elde edilir. Eğer bu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, bu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^k\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^k\right)\\x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^k+8p-8\right)+p^4-4p^2+4=\left(ax^2+bx+c\right)^2\end{array}$$

olmalıdır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^k\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^k\right)+x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^k+8p-8\right)\\+p^4-4p^2+4=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2\end{array}$$

elde edilir. Burada polinom eşitliğinden;

$$a^2=1$$
$$2ab=-4-4p+8.p^k$$
$$b^2+2ac=6p^2+p\left(8-16p^k\right)$$
$$2bc=-4p^3+p^2\left(-4+8p^k\right)+8p-8$$
$$c^2=\left(p^2-2\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $a=\mp1$ ve $c=\mp\left(p^2-2\right)$ olmak üzere, simetriklikten dolayı iki durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1,\ c=-\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1,\ c=\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$2\cdot1\cdot b=-4-4p+8.p^k \Rightarrow b=-2-2p+4.p^k$

$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^k\right)\cdot\left(-p^2+2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^k\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$-2p^k=p+\frac{p}{p+1}$$

elde edilir. Burada $\frac{p}{p+1}$ tamsayı olmadığından, bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur.

b.) $a=1$, $c=\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1$, $c=-\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot1\cdot b=-4-4p+8.p^k \Rightarrow b=-2-2p+4.p^k$$
$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^k\right)\cdot\left(p^2-2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^k\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$p^k=1 \Rightarrow k=0$$

olur ki, bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.
(7) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=p^l\left(l\geq 2\right)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-p^{2l}+p^l\cdot\left(2+2p\right)-2-p^2\right)^2-4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^2\right)\cdot\left(2-2.p^{l-k}\right)}$$

Burada $x=p^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+x\cdot\left(2+2p\right)-2-p^2\right)^2-4\cdot\left(x^2-2px+p^2\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot p^{-k}\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^{-k}\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^{-k}\right)+\\ x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^{-k}+8p-8\right)+p^4-4p^2+4\end{array}}$$

elde edilir. Eğer bu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, bu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^{-k}\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^{-k}\right)\\ x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^{-k}+8p-8\right)+p^4-4p^2+4=\left(ax^2+bx+c\right)^2\end{array}$$

olmalıdır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{array}{l}x^4+x^3\left(-4p-4+8p^{k}\right)+x^2\left(6p^2+8p-16pp^{-k}\right)+x\left(-4p^3-4p^2+8p^2p^{-k}+8p-8\right)\\ +p^4-4p^2+4=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2\end{array}$$

elde edilir. Bu eşitlikte polinom eşitliğinden;

$$a^2=1$$

$$2ab=-4-4p+8.p^k$$

$$b^2+2ac=6p^2+p\left(8-16p^k\right)$$

$$2bc=-4p^3+p^2\left(-4+8p^k\right)+8p-8$$

$$c^2=\left(p^2-2\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $a=\mp1$ ve $c=\mp\left(p^2-2\right)$ olmak üzere, simetriklikten dolayı iki durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1$, $c=-\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1$, $c=\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot1\cdot b=-4-4p+8.p^{-k}\Rightarrow b=-2-2p+4.p^{-k}$$

$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^{-k}\right)\cdot\left(-p^2+2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^{-k}\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$-2p^k=\frac{p+1}{p^2+2p}$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur. .

b.) $a=1$, $c=\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1$, $c=-\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot1\cdot b=-4-4p+8.p^{-k}\Rightarrow b=-2-2p+4.p^{-k}$$
$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^{-k}\right)\cdot\left(p^2-2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^{-k}\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$p^k=1\Rightarrow k=0$$

olur ki, bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur.

4.2.4. $\mathbb{Z}_{p^l}$ Halkası üzerinde ağırlığı $t=(2p-1).\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hata vektör sayısına göre mükemmel kod olup olmadığının tespiti

Ağırlığı $t=(2p-1).\left(p^{l-2}\right)$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısının toplamı Tablo 4.1. yardımıyla

$$1+\left(p^l-p\right)n+(p-1)\cdot n+\left(p^l-p\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(p^l-p\right)\cdot(p-1)\cdot n\cdot(n-1)$$

olduğu görülür. Verilen n uzunluk parametresine göre mükemmel kod olup olamayacağını incelemek için, ağırlığı $t=(2p-1)\cdot p^{l-2}$ ya da daha küçük olan hatalı vektör sayısı

$$1+\left(p^{l}-p\right)n+\left(p-1\right)\cdot n+\left(p^{l}-p\right)^{2}\cdot\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\left(p^{l}-p\right)\cdot\left(p-1\right)\cdot n\cdot\left(n-1\right) \quad (4.10)$$

biçiminde olur. (4.10) no'lu denklem düzenlenirse;

$$\left(\frac{p^{2l}-2p^{l}-p^{2}+2p}{2}\right)n^{2}+\left(\frac{-p^{2l}+4p^{l}+p^{2}-2p-2}{2}\right)n+1 \quad (4.11)$$

elde edilir. Mükemmel kod olup olmadığı tespiti aşağıdaki gibi incelenir:

$$\left(p^{2l}-2p^{l}-p^{2}+2p\right)n^{2}+\left(-p^{2l}+4p^{l}+p^{2}-2p-2\right)n+2=2.p^{s} \quad (4.12)$$

$$\left(\underbrace{p^{2l}-2p^{l}-p^{2}+2p}_{a}\right)n^{2}+\left(\underbrace{-p^{2l}+4p^{l}+p^{2}-2p-2}_{b}\right)n+\underbrace{2-2.p^{s}}_{c}=0 \quad (4.13)$$

elde edilir. (4.13) no'lu denklemin diskriminantı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\Delta=\sqrt{b^{2}-4ac}$$

$$\left(-p^{2l}+4p^{l}+p^{2}-2p-2\right)^{2}-4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l}-p^{2}+2p\right)\cdot\left(2-2.p^{s}\right) \quad (4.14)$$

Son eşitlik incelendiğinde $l\geq 2$ için her zaman pozitiftir. Yani $\Delta>0$ olur. Dolayısıyla (4.13) no'lu denklemin reel iki kökü vardır. Bu köklerin tamsayı olup olmadığına dair inceleme aşağıda yapılmıştır. Bu denklemin kökleri n olduğundan, eğer bu kökler tamsayı değilse, n değerleri de tamsayı olamayacağından mükemmel kod yoktur sonucuna varılır.

Bu kökler;

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.15}$$

şeklinde olur. $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu inceleyelim.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-p^{2l} + 4p^l + p^2 - 2p - 2\right)^2 - 4\cdot\left(p^{2l} - 2p^l - p^2 + 2p\right)\cdot\left(2 - 2.p^s\right)} \tag{4.16}$$

ifadesi için delta kökün dışına çıkamıyorsa bu taktirde (15) no'lu kökler hiçbir zaman reel sayı olamayacağından, tamsayı olamaz. Bu yüzden, $\sqrt{\Delta}$ nın durumunu aşağıdaki gibi üç farklı şekilde inceleyebiliriz:

$$\begin{aligned} &(1)\ l = s \\ &(2)\ s > l \\ &(3)\ s < l \end{aligned} \tag{4.17}$$

(1) $l = s$ olsun. Bu taktirde, (16) no'lu denklem

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(-p^{2l} + 4p^l + p^2 - 2p - 2\right)^2 - 4\cdot\left(p^{2l} - 2p^l - p^2 + 2p\right)\cdot\left(2 - 2.p^s\right)} \tag{4.18}$$

olur. Denklemde $x = p^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(x^2 + 4x + p^2 - 2p - 2\right)^2 - 4\cdot\left(x^2 - 2x - p^2 + 2p\right)\cdot\left(2 - 2.x\right)}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{x^4 + x^2\left(-2p^2 + 4p - 4\right) + p^4 - 4p^3 + 8p^2 - 8p + 4}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{\left[x^2 - \left(p^2 - 2p + 2\right)\right]^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = \left|x^2 - \left(p^2 - 2p + 2\right)\right|$$

elde edilir. Bu ifade daima pozitif olduğundan

$$\sqrt{\Delta} = x^2 - p^2 + 2p - 2$$

olarak elde edilir. Öncelikle

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ifadesinde yerine koyalım.

$$r_1 = \frac{-\left(-x^2+4x+p^2-2p-2\right)-\left(x^2-p^2+2p-2\right)}{2\cdot\left(x^2-2x-p^2+2p\right)}$$

$$r_1 = \frac{x^2-4x-p^2+2p+2-x^2+p^2-2p+2}{2x^2-4x-2p^2+4p}$$

$$r_1 = -2\frac{\left(x-1\right)}{\left(x^2-2x-p^2+2p\right)}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = p^l$ ve $l \geq 2$ olduğundan r_1 kökü her zaman negatiftir. r_1'in pozitif değeri ile ilgilendiğimizden dolayı burada çözüm yoktur. Diğer kökte yerine yazılırsa,

$$r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-\left(-x^2+4x+p^2-2p-2\right)+\left(x^2-p^2+2p-2\right)}{2\cdot\left(x^2-2x-p^2+2p\right)}$$

$$r_2 = \frac{x^2-4x-p^2+2p+2+x^2-p^2+2p-2}{2x^2-4x-2p^2+4p}$$

$$r_2 = \frac{2x^2-4x-2p^2+4p}{2x^2-4x-2p^2+4p}$$

$$r_2 = 1$$

elde edilir. Bu eşitlikte r_2 kökü istenilen değer olan pozitif tamsayı değeri olarak elde edilir. Ancak $n = 1$ uzunluğundaki bir kodun ağırlığı $t = \left(2p-1\right)\cdot\left(p\right)^{l-2}$ olamaz ancak $t=p\cdot(p)^{l-2}$ ve $t=(p-1)\cdot(p)^{l-2}$ olabilir ki bu ağırlıkların durumları da yukarıda incelenmiştir.

(2) $s>l$ olsun. $s>l$ ise $s=l+k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^+$ dır.
(7) no'lu ifadede $s=l+k$ ve $x=p^l\,(l\geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-p^{2l}+4p^l+p^2-2p-2\right)^2-4\cdot\left(p^{2l}-2p^l-p^2+2p\right)\cdot\left(2-2.p^{l+k}\right)}$$

olur. Burada $x=p^l$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^2+4x+p^2-2p-2\right)^2-4\cdot\left(x^2-2x-p^2+2p\right)\cdot\left(2-2xp^k\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\begin{matrix}x^4+x^3\left(-8+8p^k\right)+x^2\left(-2p^2+4p-16pp^k+12\right)+\\ x\left(8p^2-8p^2p^k-16p-16pp^k\right)+p^4-4p^3+8p^2-8p+4\end{matrix}}$$

elde edilir. Eğer bu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, bu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{aligned}&x^4+x^3\left(-8+8p^k\right)+x^2\left(-2p^2+4p-16pp^k+12\right)+x\left(8p^2-8p^2p^k-16p-16pp^k\right)\\&+p^4-4p^3+8p^2-8p+4=\left(ax^2+bx+c\right)^2\end{aligned}$$

olmalıdır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}&x^4+x^3\left(-8+8p^k\right)+x^2\left(-2p^2+4p-16pp^k+12\right)+x\left(8p^2-8p^2p^k-16p-16pp^k\right)\\&+p^4-4p^3+8p^2-8p+4=a^2x^4+2abx^3+\left(b^2+2ac\right)x^2+2bcx+c^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada polinom eşitliğinden;

$$a^2=1$$

$$2ab=-8+8.p^k$$

$$b^2+2ac=-2p^2-16p^k+4p+12$$
$$2bc=8p^2-8p^2p^k-16p+16pp^k$$
$$c^2=\left(p^2-2p+2\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $a=\mp 1$ ve $c=\mp\left(p^2-2p+2\right)$ olmak üzere, simetriklikten dolayı iki durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1$, $c=-\left(p^2-2p+2\right)$ durumu ile $a=-1$, $c=\left(p^2-2p+2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot 1\cdot b=-8+8.p^k \Rightarrow b=-4+4.p^k$$
$$2\cdot\left(-4+4.p^k\right)\cdot\left(-p^2+2p-2\right)=8p^2-8p^kp^2-16p+16pp^k$$

olur. Bu eşitlik $\left(\bmod p\right)$ de incelenirse

$$16\equiv 0$$

sonucu elde edilir ki bu da bize bu denklemin tamsayı çözümü olmadığını gösterir.

b.) $a=1$, $c=\left(p^2-2p+2\right)$ durumu ile $a=-1$, $c=-\left(p^2-2p+2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot 1\cdot b=-8+8.p^k \Rightarrow b=-4+4.p^k$$
$$2\cdot\left(-4+4.p^k\right)\cdot\left(p^2-2p+2\right)=8p^2-8p^kp^2-16p+16pp^k$$

olur. Bu eşitlik $\left(\bmod p\right)$ de incelenirse

$$-16\equiv 0$$

sonucu elde edilir ki bu da bize bu denklemin tamsayı çözümü olmadığını gösterir.

(3) $s<l$ olsun. $s<l$ ise $l=s+k$ yani $s=l-k$ yazılabilir. Burada, $k\in\mathbb{Z}^{+}$ dır.
(7) no'lu ifadede $s=l-k$ ve $x=p^{l}\,(l\geq 2)$ yazılırsa,

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-p^{2l}+p^{l}\cdot(2+2p)-2-p^{2}\right)^{2}-4\cdot\left(p^{2l}-2p^{l+1}+p^{2}\right)\cdot\left(2-2.p^{l-k}\right)}$$

olur. Burada $x=p^{l}$ alınırsa

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\left(-x^{2}+x\cdot(2+2p)-2-p^{2}\right)^{2}-4\cdot\left(x^{2}-2px+p^{2}\right)\cdot\left(2-2\cdot x\cdot p^{-k}\right)}$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{\begin{array}{l}x^{4}+x^{3}\left(-4p-4+8p^{-k}\right)+x^{2}\left(6p^{2}+8p-16pp^{-k}\right)+\\ x\left(-4p^{3}-4p^{2}+8p^{2}p^{-k}+8p-8\right)+p^{4}-4p^{2}+4\end{array}}$$

elde edilir. Eğer bu denklemin pozitif tamsayı kökü varsa, bu kökün rasyonel çıkması gerekir. Dolayısıyla tamkare olmalıdır.

$$\begin{array}{l}x^{4}+x^{3}\left(-4p-4+8p^{-k}\right)+x^{2}\left(6p^{2}+8p-16pp^{-k}\right)\\ x\left(-4p^{3}-4p^{2}+8p^{2}p^{-k}+8p-8\right)+p^{4}-4p^{2}+4=\left(ax^{2}+bx+c\right)^{2}\end{array}$$

olmalıdır. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{array}{l}x^{4}+x^{3}\left(-4p-4+8p^{k}\right)+x^{2}\left(6p^{2}+8p-16pp^{-k}\right)+x\left(-4p^{3}-4p^{2}+8p^{2}p^{-k}+8p-8\right)\\ +p^{4}-4p^{2}+4=a^{2}x^{4}+2abx^{3}+\left(b^{2}+2ac\right)x^{2}+2bcx+c^{2}\end{array}$$

elde edilir. Burada polinom eşitliğinden;

$$a^{2}=1$$
$$2ab=-4-4p+8.p^{k}$$

$$b^2+2ac=6p^2+p\left(8-16p^k\right)$$

$$2bc=-4p^3+p^2\left(-4+8p^k\right)+8p-8$$

$$c^2=\left(p^2-2\right)^2$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $a=\mp 1$ ve $c=\mp\left(p^2-2\right)$ olmak üzere, simetriklikten dolayı iki durumun incelenmesi gerekir.

a.) $a=1,\ \ c=-\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1,\ \ c=\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot 1\cdot b=-4-4p+8.p^{-k} \Rightarrow b=-2-2p+4.p^{-k}$$

$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^{-k}\right)\cdot\left(-p^2+2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^{-k}\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$-2p^k=\frac{p+1}{p^2+2p}$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur. .

b.) $a=1,\ \ c=\left(p^2-2\right)$ durumu ile $a=-1,\ \ c=-\left(p^2-2\right)$ durumları simetrik olduğundan aynı sonucu verirler.

$$2\cdot 1\cdot b=-4-4p+8.p^{-k} \Rightarrow b=-2-2p+4.p^{-k}$$

$$2\cdot\left(-2-2p+4.p^{-k}\right)\cdot\left(p^2-2\right)=-4p^3+p^2\left(-4+8p^{-k}\right)+8p-8$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$p^k=1 \Rightarrow k=0$, olur ki, bu eşitliği sağlayan $k\in\mathbb{Z}^+$ yoktur.

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

2. bölümde $\mathbb{Z}_{3^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlıklara göre saymalar yapılıp, hata vektör sayılarına göre mükemmel kod incelemesi yapıldı. Bazı ağırlıklarda mükemmel kodun olabileceği, bazılarında ise mükemmel kod olmasının mümkün olmadığı gösterildi.

3. bölümde $\mathbb{Z}_{5^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlıklara göre saymalar yapılıp, hata vektör sayılarına göre mükemmel kod incelemesi yapıldı. Bazı ağırlıklarda mükemmel kodun olabileceği, bazılarında ise mükemmel kod olmasının mümkün olmadığı gösterildi.

3. bölümde $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkası üzerinde homojen ağırlıklara göre saymalar yapılıp, hata vektör sayılarına göre mükemmel kod incelemesi yapıldı. Bazı ağırlıklarda mükemmel kodun olabileceği, bazılarında ise mükemmel kod olmasının mümkün olmadığı gösterildi.

$\mathbb{Z}_{3^l}$, $\mathbb{Z}_{5^l}$ ve $\mathbb{Z}_{p^l}$ halkaları üzerinde, n uzunluk parametresine göre belli bir ağırlığa kadar olan denklemler incelenmiştir. Daha ileriki çalışmalarda yüksek ağırlıklar incelenebilir. Bazı ağırlıklarda, bazı parametrelere göre mükemmel kod olabileceği sonucuna varıldı. Bu sonuçlar bir program yardımıyla değerlendirilip, gerçekte mükemmel kod olup olmadığı ayrıca incelemeye değer bir çalışmadır.

KAYNAKLAR

[1] ÇALLIALP, F., Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, 2001

[2] ÇALLIALP, F., Soyut Cebir Problemleri, 1998

[3] DUMMIT, D.S., FOOTE, R.M., Abstract Algebra, John Wiley & Sons, Inc.,2004

[4] MONTGOMERY, H.L., NIVEN, I., ZUCKERMAN, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, Wiley, 1991

[5] GÜRLÜ, Ö., Meraklısına Sayılar Teorisine Giriş, İzmir – 2009

[6] ROMAN, S., Coding and Information Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1992

[7] HAMMING, R.W., Error Detecting and Error Correcting Codes, Bell Syst.Tech. J.V. 29: 147-160, 1950

[8] GOLAY, M.J.E., Notes on Dijital Coding, Proc. IRE. 37. 657., 1949

[9] TIETAVAINEN, A., On The Nonexistence of Perfect Codes Over Finite Fields, Siam J. Appl. Math. V. 24: 88-96, 1973

[10] VAN LINT, J.H., A Survey of Perfect Codes, Rocky Mountain J. Math., V.5: 199-226, 1975

[11] M. OZEN, V. SIAP, On The Existence of Perfect Codes Over $\mathbb{Z}_4$ with Respect to Homogenous Weight, Applied Mathematical Science 6, 2005-2011, 2012

[12] I.SIAP, M. OZEN ve V. SIAP, On The Existence of Perfect Quaternary Codes, Siam Discrete Mathmatics, Austin, Texas, 13-17 June, 2010

[13] LING S., BLACKFORD J.T., $\mathbb{Z}_{p^{k+1}}$ Linear Codes, IEEE Trans. Inform. Theory, V.48: 2592 – 2605, 2002

[14] HAMMONS JR. A.R., KUMAR P.V., CALDERBANK A.R., SLOANE N.J.A.,SOLE P., The $\mathbb{Z}_4$-Linearty of Kerdock, Prepata, Goethals and Related Codes., IEEE Trans. Inform. Theory, V.40: 301 - 319

[15] GREFERATH M., SCHMIDT S.E., Gray Isometries for Finite Chain Rings and a Nonlinear Ternary $\left(36,3^{1}2,15\right)$ Code, IEEE Trans. Inform. Theory, V. 45: 2522-2524, 1999

[16] WOLFMANN J., Negacylic and Cylic Codes Over $\mathbb{Z}_4$, IEEE Trans. Inform. Theory, V.45: 2527-2532, 1999

[17] TAPIA-RECILLAS H., VEGA G., A Genaralization of Negacylic Codes, In Proc. Int. Workshop on Coding and Cryptography In: D.Angot and C.Carlet (Ed), 519-529, 2001

[18] LING S., BLACKFORD J.T., $\mathbb{Z}_{p^{k+1}}$ Linear Codes, IEEE Trans. Inform. Theory. V.48: 2592-2605, 2002

[19] MACWILLIAMS F.J., SLOANE N.J.A., The Theory of Error Correcting Codes, Norh Holland Pub. Co., 1997

[20] JAIN S., NAM K.B., LEE K.S., On Some Perfect Codes With Respect to Lee Metric, Linear Algebra and its Applications,V.405: 104-120, 2005

[21] SIAP, I., OZEN, M., SIAP, V., On the Existence of Perfect Linear Codes Over $\mathbb{Z}_{2^l}$ with Respect to Homogenous Metric, The Arabian Journal for Science and Engineering, Vol. 0, Issue 0, pp. 0, (2012)

ÖZGEÇMİŞ

Ömer KARA, 06.09.1980 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlk ve ortaöğretimini 1998 yılında Sakarya'da tamamladı. 2002 yılında arasında Sakarya Üniversitesi Matematik bölümününden mezun oldu. 2003 yılında Sakarya Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Tezsiz yüksek Lisans Programını bitirdi. 2003 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığında ortaöğretim matematik öğretmeni olarak hizmet vermektedir.