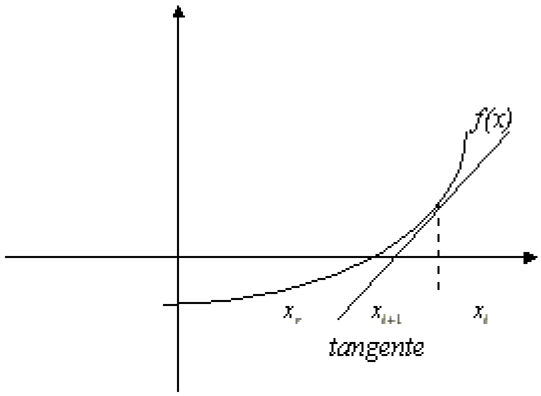
MÉTODO DE NEWTON- RAPHSON

Este método, el cual es un método iterativo, es uno de los más usados y efectivos. A diferencia de los métodos anteriores, el método de Newton-Raphson no trabaja sobre un intervalo sino que basa su fórmula en un proceso iterativo.

Supongamos que tenemos la aproximación x_i a la raíz x_r de $f(x)$,



Trazamos la recta tangente a la curva en el punto $(x_i, f(x_i))$; ésta cruza al eje x en un punto x_{i+1} que será nuestra siguiente aproximación a la raíz x_r.

Para calcular el punto x_{i+1}, calculamos primero la ecuación de la recta tangente. Sabemos que tiene pendiente

$m = f'(x_i)$

Y por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Hacemos $y = 0$:

$$-f(x_i) = f'(x_i)(x - x_i)$$

Y despejamos x:

$$x = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Que es la fórmula iterativa de Newton-Raphson para calcular la siguiente aproximación:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}, \textbf{ si } \quad f'(x_i) \neq 0$$

Note que el método de Newton-Raphson no trabaja con intervalos donde nos asegure que encontraremos la raíz, y de hecho no tenemos ninguna garantía de que nos aproximaremos a dicha raíz. Desde luego, existen ejemplos donde este método no converge a la raíz, en cuyo caso se dice que el método diverge. Sin embargo, en los casos donde si converge a la raíz lo hace con una rapidez impresionante, por lo cual es uno de los métodos preferidos por excelencia.

También observe que en el caso de que $f'(x_i) = 0$**, el método no se puede aplicar. De hecho, vemos geométricamente que esto significa que la recta tangente es horizontal y por lo tanto no intersecta al eje** x **en ningún punto, a menos que coincida con éste, en cuyo caso** x_i **mismo es una raíz de** $f(x)$

<u>Ejemplo 1</u>
Usar el método de Newton-Raphson, para aproximar la raíz de $f(x) = e^{-x} - \ln x$**, comenzando con** $x_0 = 1$ **y hasta que** $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución
En este caso, tenemos que

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x}$$

De aquí tenemos que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{-e^{-x_i} - \frac{1}{x_i}} = x_i + \frac{e^{-x_i} - \ln(x_i)}{e^{-x_i} + \frac{1}{x_i}}$$

Comenzamos con $x_0 = 1$ **y obtenemos:**

$$x_1 = x_0 + \frac{e^{-x_0} - \ln(x_0)}{e^{-x_0} + \frac{1}{x_0}} = 1.268941421$$

En este caso, el error aproximado es,

$$|\epsilon_a| = \left|\frac{1.268941421 - 1}{1.268941421} \times 100\%\right| = 21.19\%$$

Continuamos el proceso hasta reducir el error aproximado hasta donde se pidió.
Resumimos los resultados en la siguiente tabla:

Aprox. a la raíz	Error aprox.
1	
1.268941421	21.19%
1.309108403	3.06%
1.309799389	0.052%

Observe que cuando el método de Newton-Raphson converge a la raíz, lo hace de una forma muy rápida y de hecho, observamos que el error aproximado disminuye a pasos agigantados en cada paso del proceso. Aunque no es nuestro objetivo establecer formalmente las cotas para los errores en cada uno de los métodos que hemos estudiado, cabe mencionar que si existen estas cotas que miden con mayor precisión la rapidez ó lentitud del método en estudio.

Veremos a continuación un ejemplo del método de Newton Raphson, con la siguiente ecuación:

$X^3+X+16=0$

CONVERGENCIA DEL MÉTODO DE NEWTON RAPHSON

Para determinar en qué casos converge este método, se parte de la expresión para el método del punto fijo

$$|g'(\tau)|<1$$
$$x_{k-1}<x<a$$

$$x_{n-1}=g(x_n) \text{ **para** } n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde en este caso **g(x)** se define de la siguiente forma:

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Si se sabe que el método de aproximaciones sucesivas converge siempre que

$|g'(\tau)|<1 \quad x_{k-1}<x<a$, **entonces derivando** g(x):

$$g'(x)=1-\frac{\left[f'(x)\right]^2-f(x)f''(x)}{\left[f'(x)\right]^2}$$

Simplificando

$$g'(x) = 1 - \frac{\left[f'(x) \right]^2}{\left[f'(x) \right]^2} + \frac{f(x)\, f''(x)}{\left[f'(x) \right]^2}$$

Y por analogía con el método de aproximaciones sucesivas, el método de Newton-Raphson será convergente, si se cumple que:

$$\boxed{\left| \frac{f(\tau)\, f''(\tau)}{\left[f'(\tau) \right]^2} \right| < 1 \qquad x_{k-1} < x < a}$$

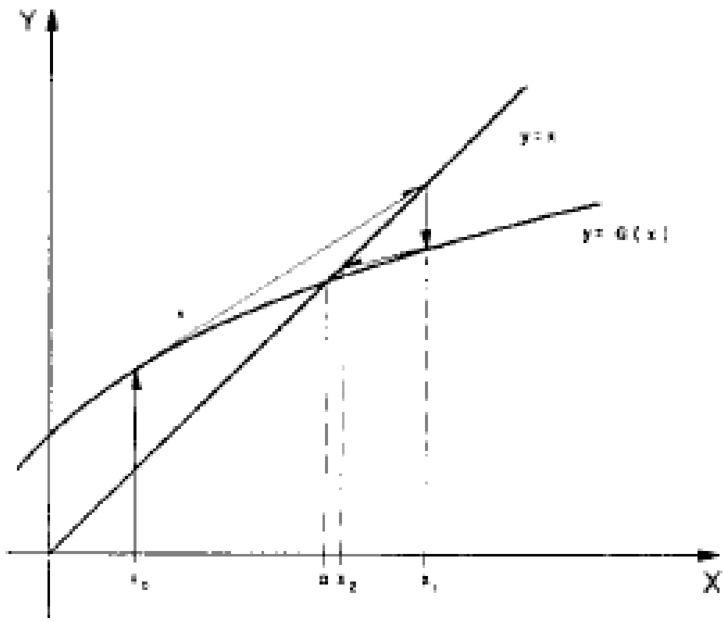


figura II.8.a